Lösung Klausur E1 Mechanik vom 19. Feb. 2013

Aufgabe 1: Hydrodynamik (16 Punkte)

a) $p = \rho g H$

b) Bernoulli: $p = \frac{1}{2}\rho v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} = \sqrt{2g(H - (h + \frac{d}{2}))}$

c) $Q_1 = Q_2 = A_2 v = (\frac{d}{2})^2 \pi v$

d) $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$ mit $h_0 = h + \frac{d}{2} \rightarrow t_P = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

$x(t_P) = vt_P = \sqrt{\frac{2p}{\rho}\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{\frac{4p(h+\frac{d}{2})}{\rho g}} = 2\sqrt{(H - (h + \frac{d}{2}))(h + \frac{d}{2})}$

$\rightarrow$ Auftreffpunkt P$(2\sqrt{(H - (h + \frac{d}{2}))(h + \frac{d}{2})}|0)$

Aufgabe 2: Bergab, bergauf (16 Punkte)

a) Energieerhaltung: $E_{pot} = E_{kin} \rightarrow mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gh_1}$

b) Impulserhaltung bei Stoß: $p_{vorher} = p_{nachher}$

$\rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_2 \rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$

c) Energieerhaltung:

$E_{kin}^{unten} = E_{kin}^{oben} + E_{pot}^{oben} \rightarrow \frac{1}{2}Mv_2^2 = \frac{1}{2}Mv_H^2 + Mgh_2$ mit $M = m_1 + m_2$

$v_H^2 = v_2^2 - 2gh_2 \rightarrow v_H = \sqrt{2(\frac{m_1}{M})^2 gh_1 - 2gh_2} \geq 0$

$\rightarrow h_1 \geq (\frac{m_1+m_2}{m_1})^2 h_2$

d) Abheben: Zentrifugalkraft $\geq$ Gewichtskraft $\rightarrow M\frac{v_H^2}{h_2} \geq Mg \rightarrow v_H^2 \geq h_2 g$

$\rightarrow h_2 g \leq 2(\frac{m_1}{m_1+m_2})^2 gh_1 - 2gh_2$

$\rightarrow h_1 \geq \frac{3}{2}(\frac{m_1+m_2}{m_1})^2 h_2$

Aufgabe 3: Drehpendel (16 Punkte)

a) Bewegungsgleichung: $D = \dot{L} = I\ddot{\varphi}$ mit $D = -D_r\varphi$

$\rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{D_r}{I}\varphi$ mit $I = 2(\frac{2}{5}MR^2 + M(\frac{L}{2} + R)^2)$ (Satz von Steiner)

b) Ansatz: $\varphi(t) = Ae^{i\omega t} \to \ddot{\varphi} = -A\omega^2 e^{i\omega t}$

Einsetzen in Gleichung aus a):

$-A\omega^2 e^{i\omega t} = -\frac{D_r}{I} Ae^{i\omega t} \to -\omega^2 = -\frac{D_r}{I} \to \omega = \pm\sqrt{\frac{D_r}{I}}$

Allg. Lösung der DGL : $\varphi(t) = ae^{i\omega_0 t} + be^{-i\omega_0 t}$ mit Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{D_r}{I}}$

c) Anfangsbedingungen: $\varphi(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}(t=0) = \frac{v_0}{\frac{L}{2}+R}$

$\varphi(0) = a + b \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow a = -b$

$\dot{\varphi}(0) = i\omega_0 a - i\omega_0 b \stackrel{!}{=} \frac{v_0}{\frac{L}{2}+R} \to 2ai\omega_0 = \frac{v_0}{\frac{L}{2}+R} \to a = -i\frac{\frac{v_0}{\frac{L}{2}+R}}{2\omega_0}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \varphi(t) &= -i\frac{v_0}{2\omega_0(\frac{L}{2}+R)}(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) \\
&= -i\frac{v_0}{2\omega_0(\frac{L}{2}+R)}(2i\sin\omega_0 t) \\
&= \frac{2v_0}{\omega_0(L+2R)}\sin\omega_0 t
\end{aligned}$$

d) Das Richtmoment D_r hängt vom Schermodul G ab ($D_r = \frac{\pi}{2}G\frac{r^4}{l}$)

$\Rightarrow$ Bestimmung des Schermoduls $G = \frac{2l}{\pi r^4}D_r$ durch Messung von

- Schwingungsfrequenz $\omega_0 \Rightarrow D_r = I\omega_0^2$
- Radius des Drahts r
- Länge des Drahts l

Aufgabe 4: Rollender Doppelkegel (15 Punkte)

a) Parametrisierung $r(z) = k \cdot z$ mit $r(L) \stackrel{!}{=} R \Rightarrow k = \frac{R}{L}$

$I = \int\limits_V r_\perp^2 \mathrm{d}m \Rightarrow$ Für homogenen Körper $I = \rho\int\limits_V r_\perp^2 dV$ mit $\rho = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 L}$

Verwendung von Zylinderkoordinaten:

$$I_{Kegel} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^L \mathrm{d}z \int_0^{r(z)} r^2 r \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\rho \int_0^L \frac{1}{4}(kz)^4 \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\rho k^4 \frac{1}{5} L^5 = \frac{\pi}{10} \frac{M}{\frac{1}{3}R^2\pi L} \frac{R^4}{L^4} L^5$$

$$= \frac{3}{10} M R^2$$

b) $E_{pot}^{oben} = E_{kin}^{unten} = E_{trans} + E_{rot}$

$$2MgH = \frac{1}{2}(2M)v^2 + \frac{1}{2}(2I_K)\omega^2 \qquad \text{mit } \omega = \frac{v}{R}$$

$$= Mv^2 + I_K \frac{v^2}{R^2}$$

$$v^2 = \frac{2MgH}{M + \frac{I_K}{R^2}} = \frac{2MgH}{M + \frac{\frac{3}{10}MR^2}{R^2}} = \frac{20}{13} gH$$

$$v = \sqrt{\frac{20}{13} gH}$$

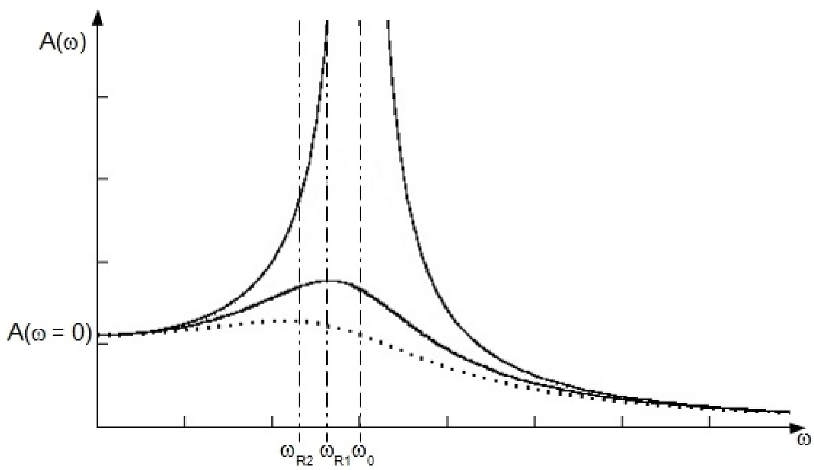
c) Für den hohlen Doppelkegel gleicher Masse (und Abmessungen) ist:

$I_{Hohlkegel} > I_{Vollkegel} \Rightarrow v \sim \frac{M}{M + \frac{I_K}{R^2}}$

v wird kleiner (mehr Energie in Rotation im Vergleich zur Translation)

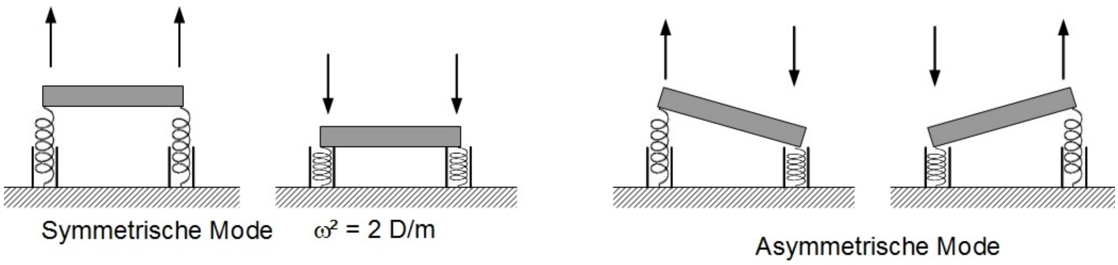
Aufgabe 5: Verständnisfragen (15 Punkte)

a)



b) 2 Freiheitsgrade: symmetrische und asymmetrische Mode (Schwingen/Rotieren).

Skizze:



c)

1) Physikalische Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleich. (Relativitätsprinzip)

(oder: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt für alle phys. Gesetze)

2) Die Lichtgeschwindigkeit c ist konstant.

Aufgabe 6: Weltuntergang? (12 Punkte)

a) Im Schwerpunktsystem der Erde ist die kinetische Energie des herannahenden Asteroiden $E_{kin} = \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 = \frac{1}{2}M_A(v_E + v_A)^2 \approx 4,24 \cdot 10^{20} J$

Durch den Fall im Gravitationsfeld der Erde gewinnt der Asteroid die Energie:

$\Delta E_{kin} = E_{pot}^{\infty} - E_{pot}^{\text{Erdoberfläche}} = 0 - (-G\frac{M_E M_A}{R_E}) \approx 3,13 \cdot 10^{18} J$

$\rightarrow E_{kin,ges.} = E_{kin} + \Delta E_{kin} \approx 4,27 \cdot 10^{20} J$

b) Der Bahndrehimpuls des Asteroiden wird vollständig auf die Erde übertragen

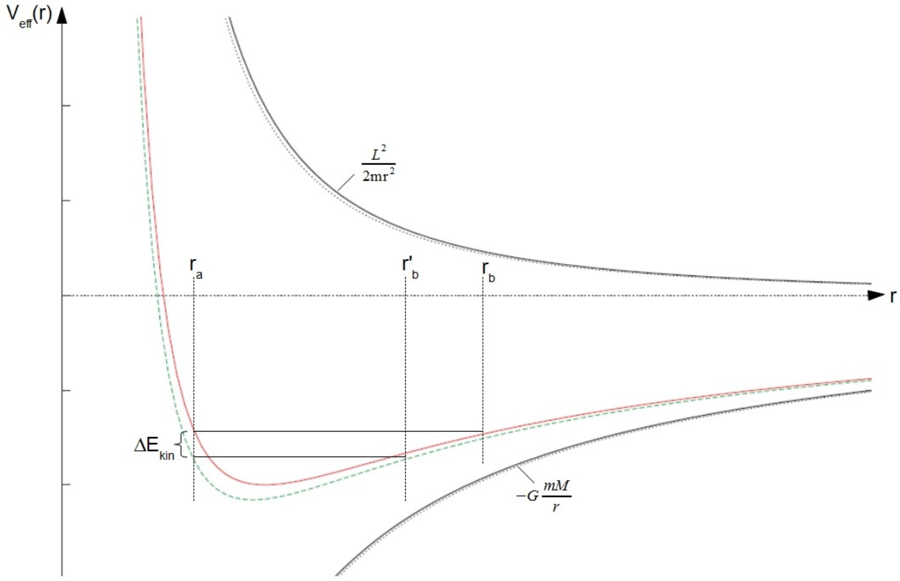
Drehimpulsänderung: $\Delta L_E = M_A r_a v_A \approx 7,5 \cdot 10^{26} kg\frac{m^2}{s}$

(ΔL_E ist klein im Vergleich zum Drehimpuls der Erde $L_E \approx 2,7 \cdot 10^{40} kg\frac{m^2}{s}$.)

c) $V_{eff} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$

Hier: $M \hat{=} M_{Sonne}$ und $m \hat{=} M_E$ bzw. nach Kollision $m \hat{=} M_E + M_A$

Skizze (Abstand der Potentiale übertrieben!)



Überlegungen:

L wird kleiner $\Rightarrow$ das neue effektive Potential liegt unter dem ursprünglichen.

Durch den Stoß im Perihel verliert die Erde Drehimpuls ohne den Abstand zur Sonne zu ändern. Sie fällt bei r_a vom oberen in das untere, leicht abgesenkte, effektive Potential. Die Differenz entspricht gerade der verminderten tangentialen kinetischen Energie.

Aus der Skizze ist dann ersichtlich, dass sich der Abstand im Aphel zu r_b' verkleinert. Da $r_a + r_b = 2a \Rightarrow$ a wird kleiner.

$\Rightarrow$ mit Kepler III: $\frac{T'^2}{T^2} = \frac{a'^3}{a^3}$ Umlaufzeit T' wird kleiner.

Aufgabe 7: Federwaage (10 Punkte)

Gleichgewichtsbedingung der Drehmomente $\Rightarrow F_1 L = F_2 L$

$\rightarrow (m_1 - m_{\text{Öl}})g = m_2 g$ mit $m_{\text{Öl}} = \frac{4}{3} R_1^3 \pi \rho_{\text{Öl}} \Rightarrow m_2 = m_1 - m_{\text{Öl}}$

Wähle Koordinate x (z.B. untere Ende der Feder) mit Ruhelage x = 0.

Rücktreibende Kraft: $F_{Feder} = -D \cdot x$

Reibungskraft (Stokes): $F_R = -6\pi \eta_{\text{Öl}} R_1 \dot{x}$

Träge Masse: $F_M = (m_1 + m_2) \cdot \ddot{x}$

Bewegungsgleichung: $M\ddot{x} + 6\pi\eta_{\text{Öl}} R_1 \dot{x} + Dx = 0$; mit $M = m_1 + m_2$

Teilen durch M liefert $\Rightarrow \ddot{x} + \frac{6\pi\eta_{\text{Öl}} R_1}{M}\dot{x} + \frac{D}{M}x = 0$

Vergleich mit allg. Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators:

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{3\pi\eta_{\text{Öl}} R_1}{M}$, $\omega_0^2 = \frac{D}{M}$

Aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0 \rightarrow (\frac{3\pi\eta_{\text{Öl}} R_1}{M})^2 = \frac{D}{M} \Rightarrow D = \frac{(3\pi\eta_{\text{Öl}} R_1)^2}{M}$

Zahlenwerte: $m_2 = 0,23kg,\ D = 2,4 \cdot 10^{-3}\frac{N}{m}$