2.4 Starre Körper

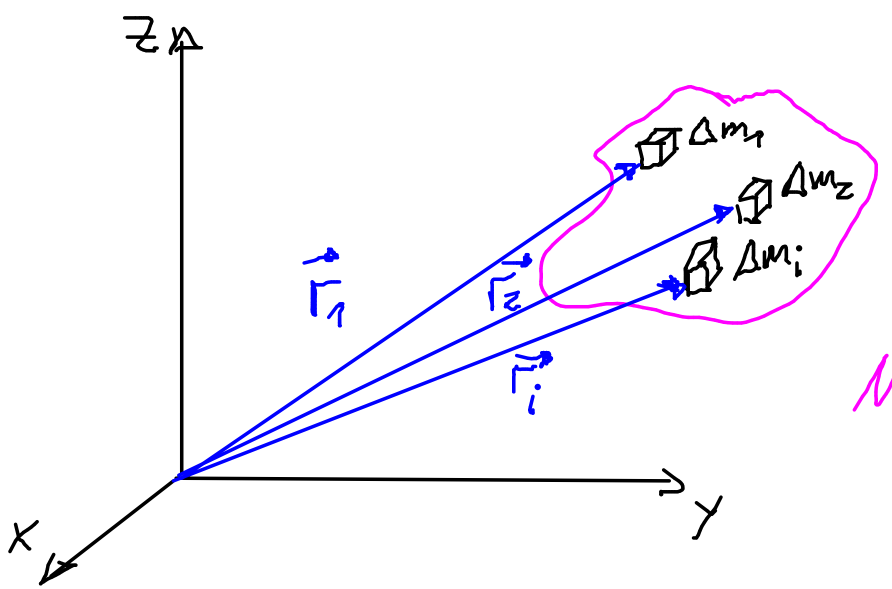
Starrer, ausgedehnter Körper = Anhäufung einzelner Massenpunkte Δm_i
("starr" heißt: Massenpunkte untereinander fest verbunden)

Bewegungen eines starren Körpers

- Translation
- Rotation
- Translation + Rotation

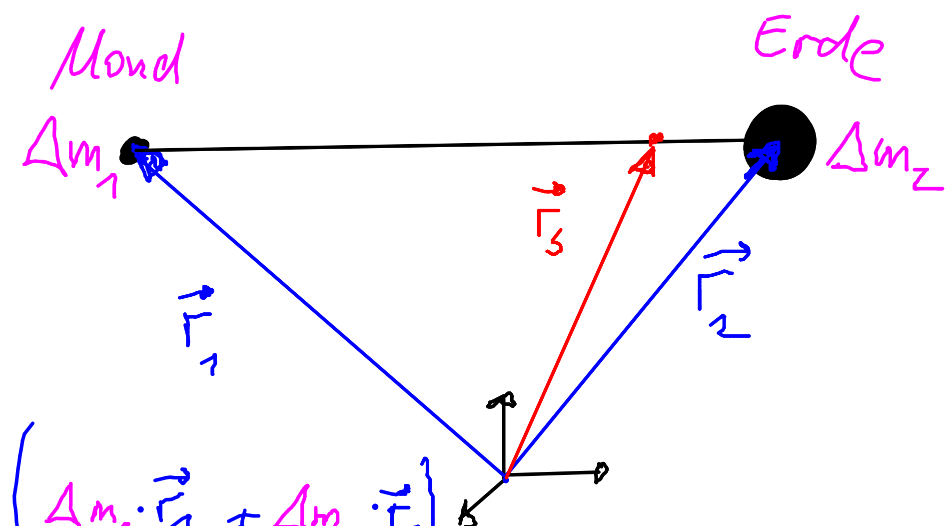
- **Schwerpunkt:**

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \, \Delta m_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \Delta m_i}$$



Gesamtmasse
$$M = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i$$

Beispiel:



$$\vec{r}_S = \frac{1}{\Delta m_1 + \Delta m_2} \cdot \left(\Delta m_1 \cdot \vec{r}_1 + \Delta m_2 \cdot \vec{r}_2 \right)$$

- Schwerpunktsatz

  Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und die Summe aller äußeren Kräfte auf ihn wirkt

⇒ Bewegungsgleichungen für Translationsbewegung eines starren Körpers:

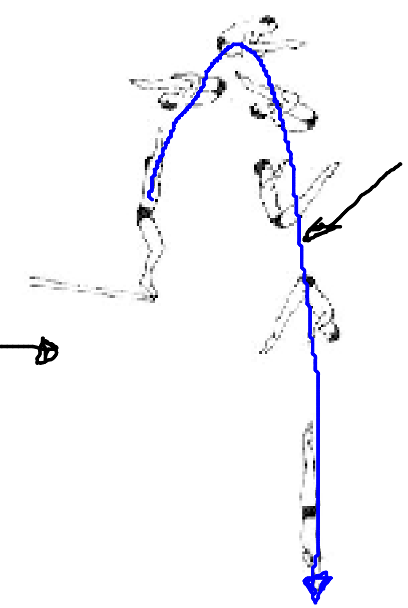
$$\vec{r}_S(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_S \cdot t^2 + \vec{v}_{S,0}\cdot t + \vec{r}_{S,0}$$
$$\vec{v}_S(t) = \vec{a}_S \cdot t + \vec{v}_{S,0}$$
$$\vec{a}_S(t) = \vec{a}_S = \text{const}$$

$\vec{r}_{S,0}$, $\vec{v}_{S,0}$ sind Ort und Geschwindigkeit des Schwer= punktes am Bewegungsbeginn

⇒ Kinematik des Schwerpunktes identisch zu Bewegung eines Massenpunktes!

- Es gilt das Superpositionprinzip

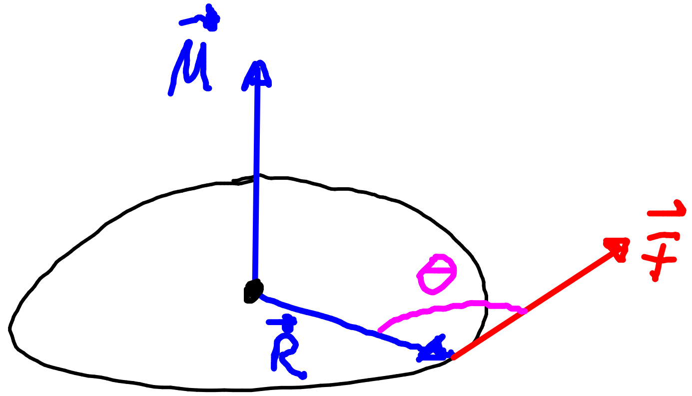
⇒ z.B.: Der Schwerpunktsbewegung eines starren Körpers kann eine Rotationsbewegung überlagert sein, z.B. ⟶



Wurfparabel des Schwer= punktes

▶ Rotationsbewegung:

- <u>Drehmoment</u> = Kraft mal Hebelarm



Hebelarm: zur Kraft senkrechter Abstand zum Drehpunkt

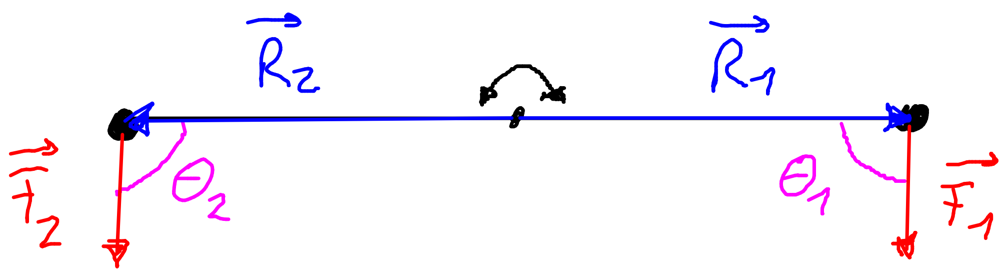
$\rightarrow$ Drehmoment: $\boxed{M = R \cdot F \cdot \sin\theta}$

Drehmoment $M = |\vec{M}|$ ist Vektorgröße $(\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F})$

$\Rightarrow$ <u>Hebelgesetz:</u>

$$\boxed{\text{Kraft} \cdot \text{Kraftarm} = \text{Last} \cdot \text{Lastarm}}$$

z.B.

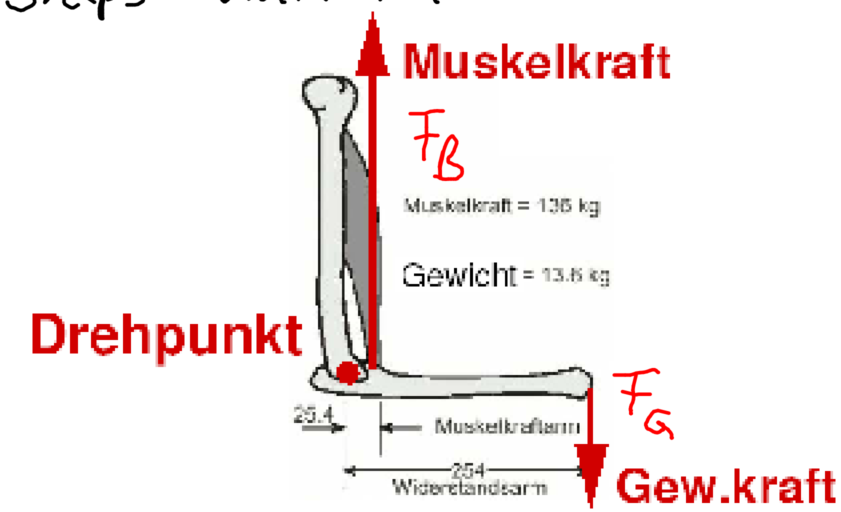


$$M_2 = |\vec{R}_2| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \sin\theta_2 \overset{!}{=} |\vec{R}_1| \cdot |\vec{F}_1| \cdot \sin\theta_1 = M_1$$

$\Updownarrow$

Gleichgewicht

z.B. Bizeps – Unterarm



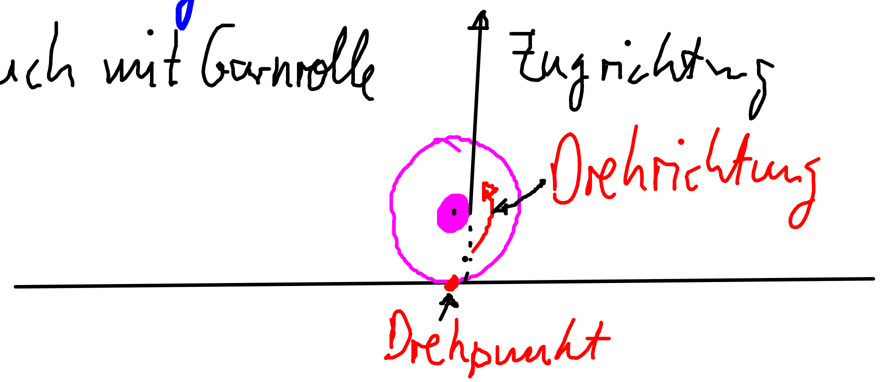
$F_B \cdot 25.4\,\text{mm} \overset{!}{=} F_G \cdot 254\,\text{mm}$

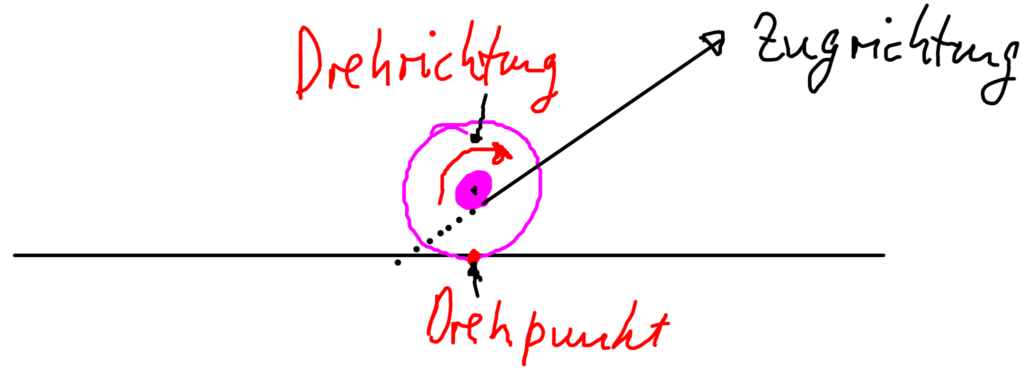
$\Rightarrow F_B = F_G \cdot \dfrac{254\,\text{mm}}{25.4\,\text{mm}} = 10 \cdot F_G$

Falls Winkel $\theta \neq 90^\circ \Rightarrow F_B = F_G \cdot \dfrac{10}{\sin\theta}$

- **Wo liegt der Drehpunkt / die Drehachse? Nicht immer in Symmetrieachse!**

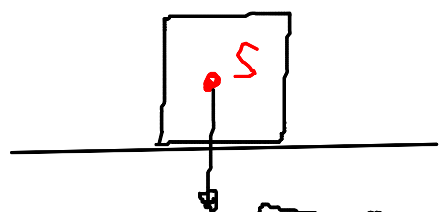
Versuch mit Garnrolle





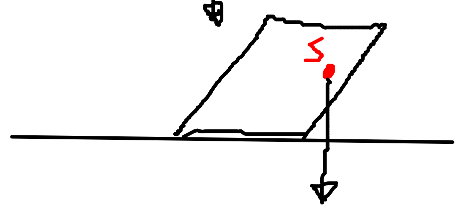
- **Gleichgewicht** (Statik) $\longleftrightarrow$ $\sum_i \vec{F}_i = 0$ und $\sum_i \vec{M}_i = 0$

- stabil



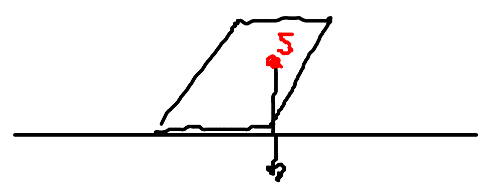
kippt nur nach großer Störung; Schwerpunkt S muss angehoben werden

- instabil



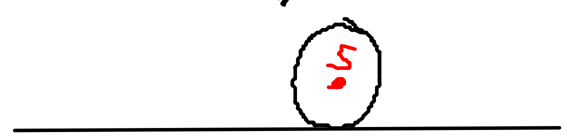
kippt von allein; Schwerpunkt S außerhalb Auflagefläche

- labil



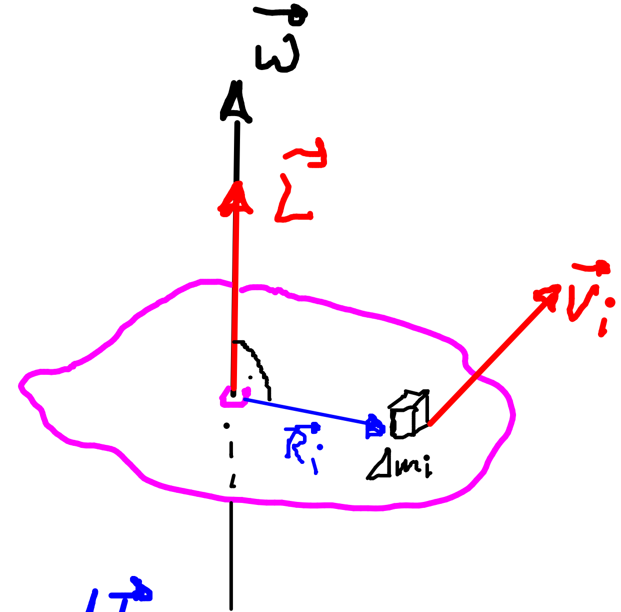
kippt nach kleiner Störung; Schwerpunkt S am Rand der Auflagefläche

- indifferent



Schwerpunkt S ändert Höhe nicht bei Verschieben / Kippen, $E_{pot} = const$

- **Drehimpuls** $\boxed{L = R \cdot p = I \cdot \omega}$



Trägheitsmoment I: $\quad I = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \cdot R_i^2 \quad$ mit $R_i = |\vec{R}_i|$

Drehimpuls $L = |\vec{L}|$ ist Vektorgröße $(\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = I \cdot \vec{\omega})$

Aus 2. Newtonsche Axiom $\left(\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$ folgt: $\quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

- ## Drehimpulserhaltungssatz

Drehimpuls eines Körpers bleibt erhalten, wenn keine äußeren Drehmomente wirken, gleichgültig, welche inneren Kräfte wirksam sind

Versuch: Drehimpuls ist Vektor:

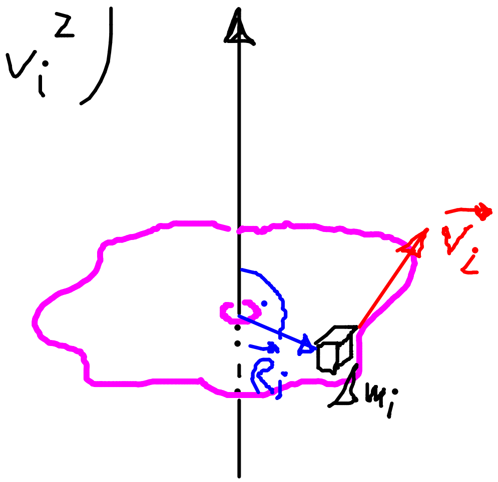
$$\vec{0} = \vec{L}_{ges} = \vec{0}_{Stuhl} + \vec{0}_{Rad} = \vec{L}_{Stuhl}\downarrow + \vec{L}_{Rad}\uparrow = \vec{L}_{Stuhl}\uparrow + \vec{L}_{Rad}\downarrow$$

Drehachse &-richtung des Rads bzw. des Stuhls

(NB: $\uparrow \hat{=}$, $\downarrow \hat{=}$)

- **Rotationsenergie**

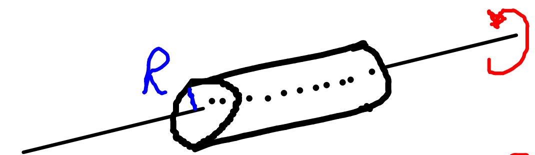
folgt aus kinetischer Energie $\left(\Delta E_{kin,i} = \frac{1}{2}\Delta m_i \cdot v_i^2\right)$



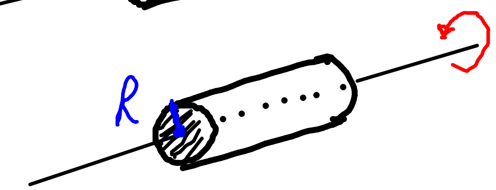
$$\Rightarrow \quad \boxed{E_{rot} = \frac{1}{2}\cdot I \cdot \omega^2}$$

Beispiel für Trägheitsmomente I:
bei Drehung um Symmetrieachse

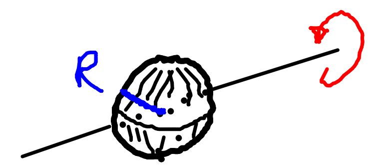
Hohlzylinder : $I_{sym} = m \cdot R^2$



Vollzylinder : $I_{sym} = \frac{1}{2}\cdot m \cdot R^2$

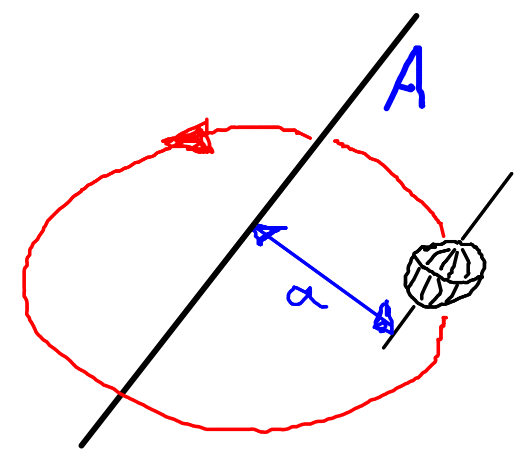


Kugel : $I_{sym} = \frac{2}{5}\, m R^2$

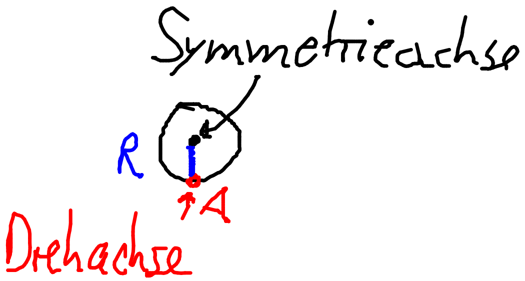


bei Drehung um eine Achse A, die um den Abstand a verschoben ist, gilt der Steinersche Satz:

$$\boxed{I_A = I_{sym} + m \cdot a^2}$$



Versuch: Vollzylinder gewinnt Wettlauf auf schiefer Ebene gegen Hohlzylinder



$$E_{pot} = m\cdot g\cdot h \overset{!}{=} E_{kin} + E_{rot} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_A\, \omega^2$$

$$\omega = \frac{v}{R} \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_A \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(m + I_A \cdot \frac{1}{R^2}\right)\cdot v^2$$

$$a = R \Rightarrow I_A = I_{sym} + mR^2 \quad \Rightarrow \quad = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(m + \left(mR^2 + mR^2\right)\cdot\frac{1}{R^2}\right)\cdot v_{Hohl}^2 & \text{Hohl-Zylinder} \\ \frac{1}{2}\left(m + \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\cdot\frac{1}{R^2}\right)\cdot v_{Voll}^2 & \text{Voll-Zylinder} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E_{pot} : \begin{cases} mgh = \frac{3}{2} m\, v_{Hohl}^2 \Rightarrow v_{Hohl} = \sqrt{\frac{2}{3} gh} = \sqrt{\frac{10}{15} gh} \\ mgh = \frac{5}{4} m\, v_{Voll}^2 \Rightarrow v_{Voll} = \sqrt{\frac{4}{5} gh} = \sqrt{\frac{12}{15} gh} > v_{Hohl} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vollzylinder erreicht höhere Geschwindigkeit $v_{Voll} > v_{Hohl}$

Translation und Rotation (zur Vertiefung)

Ort $\vec{r}$	Winkel φ
Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ $(\lvert\vec{\omega}\rvert = \dot{\varphi})$
Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$
Masse m	Trägheitsmoment $I = \sum_i \Delta m_i \cdot R_i^2$
Kraft $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$	Drehmoment $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ $(= \vec{R} \times \vec{F})$
Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$	Drehimpuls $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$ $(= \vec{R} \times \vec{p})$
kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	Rotationsenergie $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$

(Beispiel: $\varphi(t) = \omega \cdot t + \varphi_0$

$$\longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

bzw $\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$)

2.5 Mechanik deformierbarer Körper

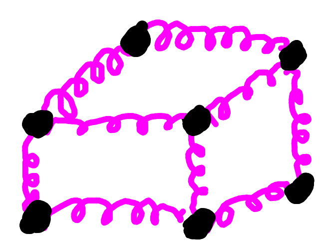
... folgt aus elektrischen Wechselwirkungen zwischen Grundbausteinen:

(1) anziehende Kräfte zwischen (gleichen/unterschiedliche) Atomen:

Größe der Kraft	typ. Wechselwirkung	Aggregatzustand
gering	van der Waals-Wechselw.	gasförmig
mittel	Van der Waals-Ww/ Wasserstoff-Brücken	flüssig
hoch	Coulomb-Wechselw.	fest

(2) abstoßende Kräfte, falls Atome zu nahe zusammen

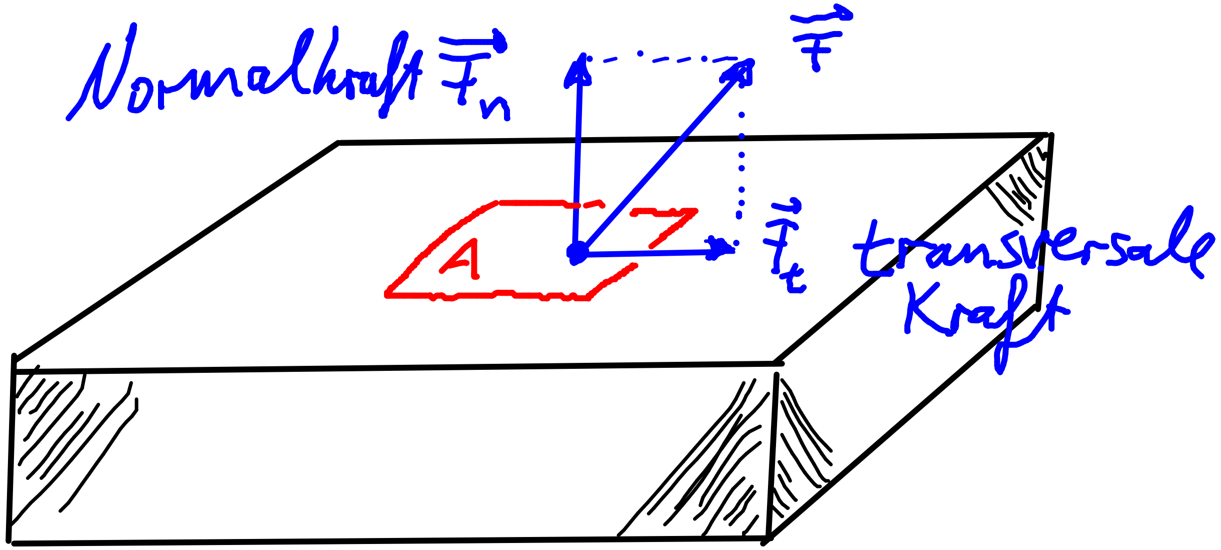
⇒ mikroskopisches Bild für Festkörper



• Deformation von Festkörpern

→ Elastizitätslehre

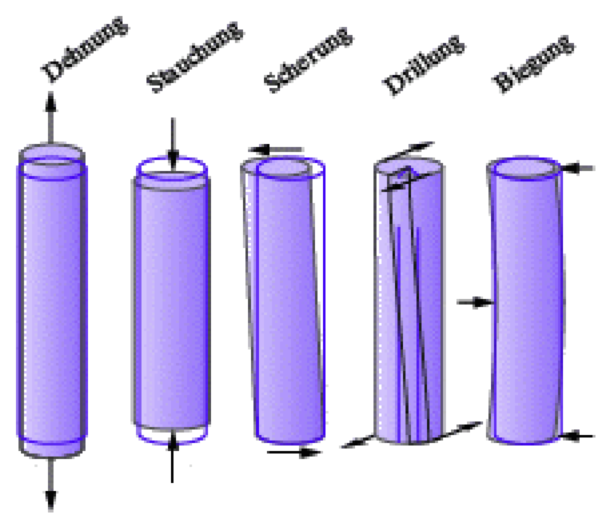
- Elastische Verformung = reversible Verformung
- Plastische Verformung = irreversible Verformung



mechanische Spannung $\vec{S} := \frac{\text{Kraft } \vec{F}}{\text{Fläche } A}$

- Normalspannung: $\vec{\sigma} := \frac{\vec{F}_n}{A}$
- Schubspannung: $\vec{\tau} := \frac{\vec{F}_t}{A}$

- mögliche Deformationen:



Elastizitätsmodul E

- **Dehnung / Stauchung** ändern Länge L unter Normalkraft $\vec{F}_n$

$$\boxed{|\vec{\sigma}| = \frac{|\vec{F}_n|}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L} = E \cdot \varepsilon}$$

Dehnung $\varepsilon := \frac{\Delta L}{L}$

E: Elastizitätsmodul, Einheit $\frac{N}{m^2}$

Versuch: Dehnungs-Spannungsdiagramm