1

2.4 Starre Körper

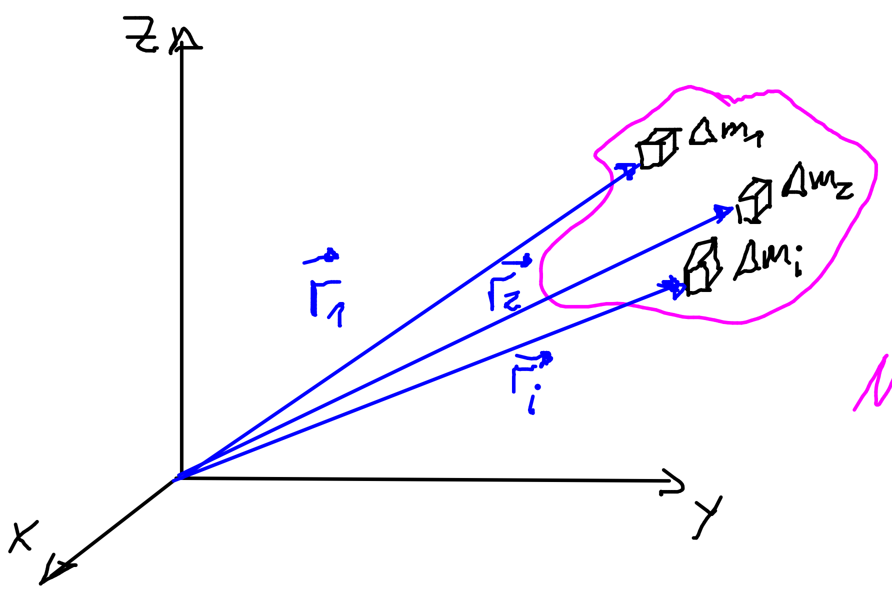
Starrer, ausgedehnter Körper = Anhäufung einzelner Massenpunkte Δm_i
("starr" heißt: Massenpunkte untereinander fest verbunden)

Bewegungen eines starren Körpers

- Translation
- Rotation
- Translation + Rotation

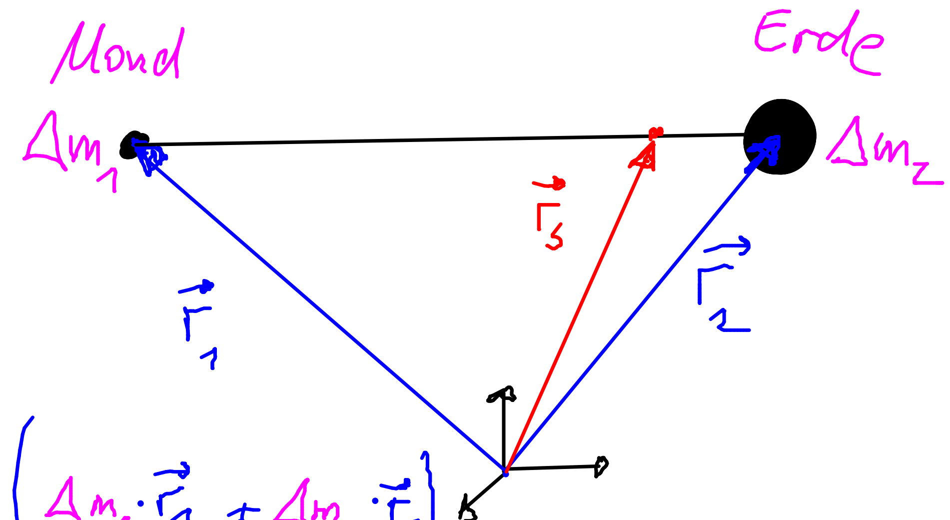
$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \, \Delta m_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \Delta m_i}$$

- Schwerpunkt:



Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i$

Beispiel:



$$\vec{r}_S = \frac{1}{\Delta m_1 + \Delta m_2} \cdot \left(\Delta m_1 \cdot \vec{r}_1 + \Delta m_2 \cdot \vec{r}_2 \right)$$

Schwerpunktsatz

Der **Schwerpunkt** bewegt sich so, als ob die **gesamte Masse** in ihm **vereinigt** wäre und die Summe aller **äußeren Kräfte** auf ihn wirkt

⇒ Bewegungsgleichungen für Translationsbewegung eines starren Körpers:

$$\vec{r}_S(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_S \cdot t^2 + \vec{v}_{S,0} \cdot t + \vec{r}_{S,0}$$

$$\vec{v}_S(t) = \vec{a}_S \cdot t + \vec{v}_{S,0}$$

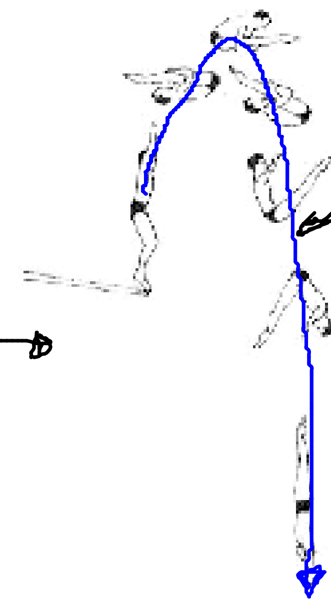
$$\vec{a}_S(t) = \vec{a}_S = \text{const}$$

$\vec{r}_{S,0}$, $\vec{v}_{S,0}$ sind Ort und Geschwindigkeit des Schwerpunktes am Bewegungsbeginn

⇒ Kinematik des Schwerpunktes identisch zu Bewegung eines Massenpunktes!

- Es gilt das Superpositionsprinzip

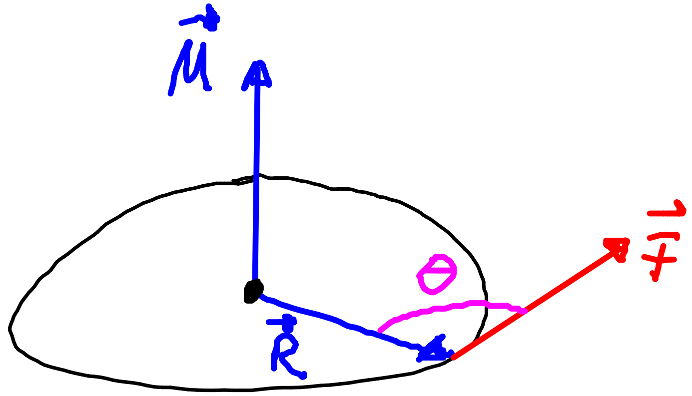
⇒ z.B.: Der **Schwerpunktsbewegung** eines starren Körpers kann eine **Rotationsbewegung überlagert** sein, z.B. →



Wurfparabel des Schwerpunktes

▶ Rotationsbewegung:

- Drehmoment = Kraft mal Hebelarm



Hebelarm: zur Kraft senkrechter Abstand zum Drehpunkt

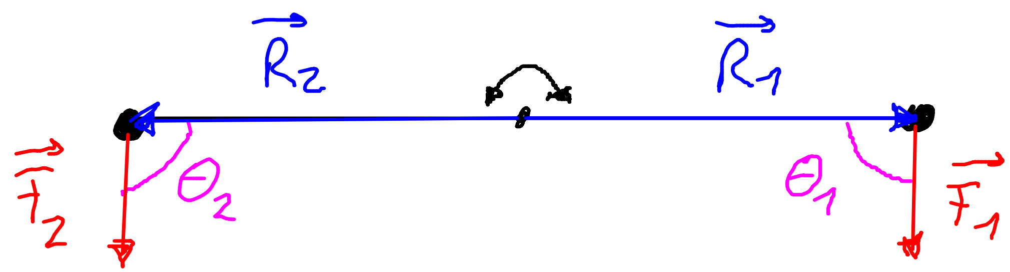
$\rightarrow$ Drehmoment: $\boxed{M = R \cdot F \cdot \sin\theta}$

Drehmoment $M = |\vec{M}|$ ist Vektorgröße $(\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F})$

$\Rightarrow$ Hebelgesetz:

$\boxed{\text{Kraft} \cdot \text{Kraftarm} = \text{Last} \cdot \text{Lastarm}}$

z.B.

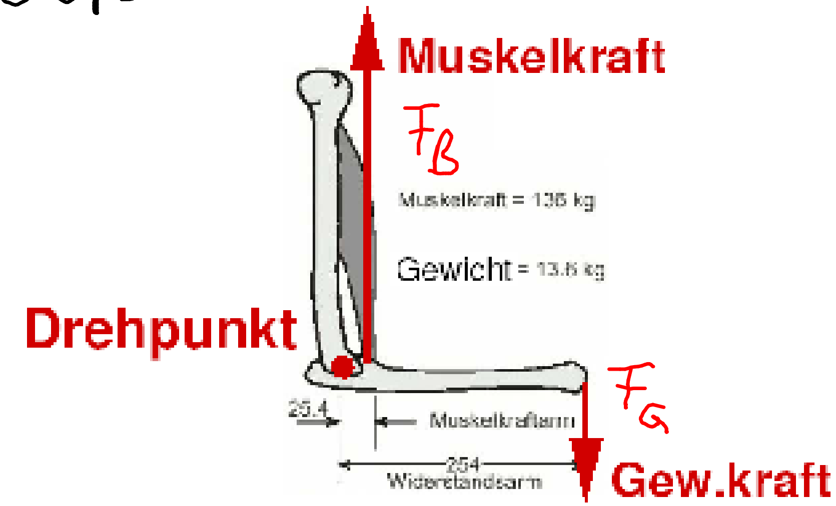


$$M_2 = |\vec{R}_2| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \sin\theta_2 \overset{!}{=} |\vec{R}_1| \cdot |\vec{F}_1| \cdot \sin\theta_1 = M_1$$

$\Updownarrow$

Gleichgewicht

z.B. Bizeps – Unterarm



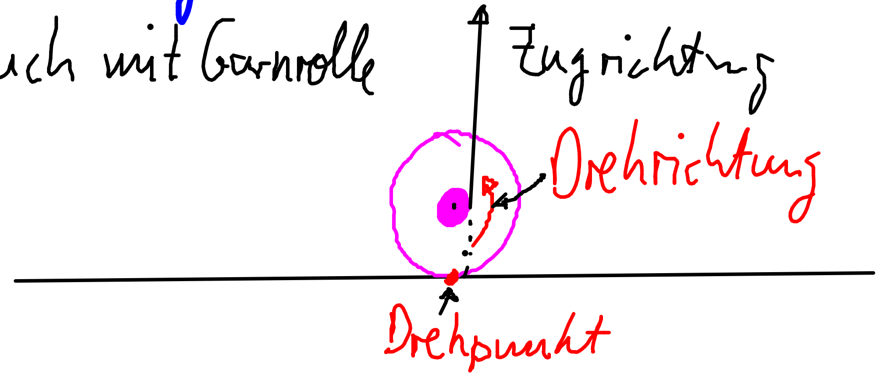
$$F_B \cdot 25.4\,\text{mm} \overset{!}{=} F_G \cdot 254\,\text{mm}$$

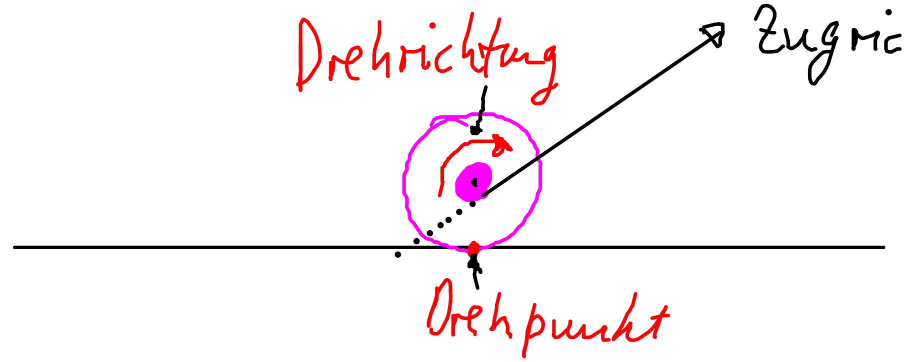
$$\Rightarrow F_B = F_G \cdot \frac{254\,\text{mm}}{25.4\,\text{mm}} = 10 \cdot F_G$$

Falls Winkel $\theta \neq 90°$ $\Rightarrow$ $F_B = F_G \cdot \dfrac{10}{\sin\theta}$

- **Wo liegt der Drehpunkt / die Drehachse? Nicht immer in Symmetrieachse!**

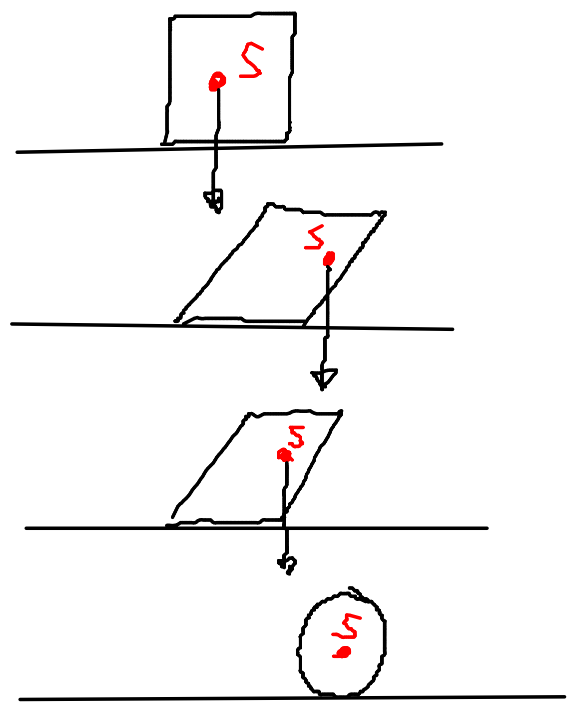
Versuch mit Garnrolle



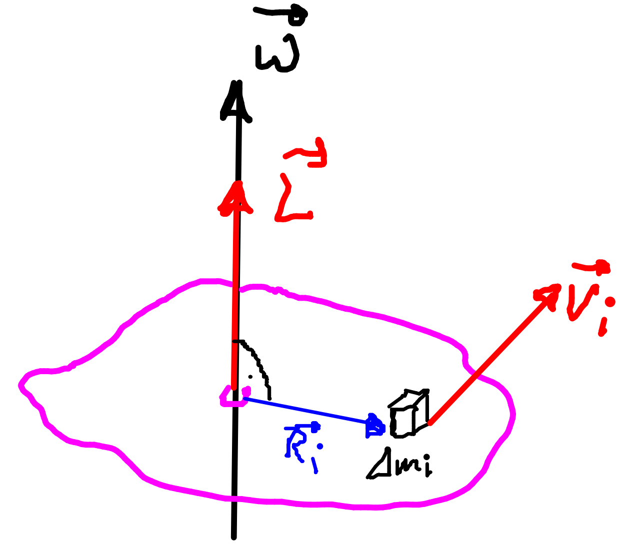


- **Gleichgewicht** (Statik) $\longleftrightarrow$ $\sum_i \vec{F}_i = 0$ und $\sum_i \vec{M}_i = 0$

- stabil — kippt nur nach großer Störung; Schwerpunkt S muss angehoben werden
- instabil — kippt von allein; Schwerpunkt S außerhalb Auflagefläche
- labil — kippt nach kleiner Störung; Schwerpunkt S am Rand der Auflagefläche
- indifferent — Schwerpunkt S ändert Höhe nicht bei Verschieben / Kippen, $E_{pot} = const$



- **Drehimpuls** $\boxed{L = R \cdot p = I \cdot \omega}$



Trägheitsmoment I: $I = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \cdot R_i^2$ mit $R_i = |\vec{R}_i|$

Drehimpuls $L = |\vec{L}|$ ist Vektorgröße ($\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = I \cdot \vec{\omega}$)

Aus 2. Newtonsche Axiom ($\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$) folgt: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

- **Drehimpulserhaltungssatz**

Drehimpuls eines Körpers bleibt erhalten, wenn keine äußeren Drehmomente wirken, gleichgültig, welche inneren Kräfte wirksam sind

Versuch: Drehimpuls ist Vektor: