4. Übungsblatt **Besprechung: 12./14.11.2011**

1. Stöße

Der Bewegungsablauf von Landung bis Absprung beim Känguruh kann vereinfacht auch als Stoßvorgang betrachtet werden. Für diese Aufgabe soll angenommen werden, dass das Känguruh aus der Sprunghöhe von 2.25 m auf dem Boden landet und dann sofort wieder abspringt. Das Känguruh habe eine Masse von 55 kg.

(a) Berechnen Sie die vertikale Impulskomponente bei der Landung.

(b) Wenn dieser Stoßprozess von Ladung und Absprung vollkommen elastisch und ohne Arbeitsaufwand des Känguruhs stattfindet, welche maximale Sprunghöhe erreicht das Känguruh nach dem Absprung?

(c) Berücksichtigen wir nun den Untergrund, von dem das Känguruh abspringt. Bei einem sandigen Untergrund hinterlässt das Känguruh im Boden einen Fussabdruck, sodass der Stoßprozess inelastisch ist. Wie groß ist Arbeit, die zur Verformung des Sandes aufgewendet wurde, wenn das Känguruh nur noch mit der Hälfte des Lande-Impulses aus (a) abspringen kann? Wie hoch würde das Känguruh dabei springen?

(d) Wenn das Känguruh nach der Ladung auf hartem Untergrund nicht mehr abspringt, handelt es sich dann um einen vollkommen inelastischen Stoß? (Antwort mit kurzer Begründung)

(Lösungswerte: (a) 363 kg·m/s, (b) 2.25 m, (c) 898 J, 0.56 m, (d) Ja)

Lösung:

(a) Die potentielle Energie von $E_{\text{pot}} = 1214$ J aus Aufgabe 3 des dritten Übungsblatts liegt bei der Landung vollständig als kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv_\perp^2 \stackrel{!}{=} E_{\text{pot}}$ vor.
$\Rightarrow v_\perp = \sqrt{\frac{2E_{\text{pot}}}{m}} \approx 6.6\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Damit beträgt die vertikale Impulskomponente $p_\perp = m \cdot v_\perp \approx 363\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$

(b) Beim Stoßprozess gilt Energieerhaltung. Beim elastischen Stoß wird keine kinetische Energie in Wärme (oder als Deformationsarbeit) umgewandelt. Also ist die maximale Sprunghöhe wiederum 2.25 m. (Voraussetzung ist, dass das Känguruh die gesamte Energie bei dem Stoßprozess kurzzeitig in Sehnen und Bändern speichern kann.)

(c) Im Stoßprozess gilt Impulserhaltung $p_{\perp,\text{Landung}} + 0 \stackrel{!}{=} p_{\perp,\text{Absprung}} + p_{\text{Sand}}$
wobei nach Aufgabenstellung $p_{\perp,\text{Absprung}} = \frac{1}{2}p_{\perp,\text{Landung}}$.
Da der Sand nach dem Absprung wieder ruht, also $v_{\text{Sand}} = 0$ ist, und da $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ ist, gilt für die Energiebetrachtung:
$E_{\text{kin,Landung}} + 0 \stackrel{!}{=} E_{\text{kin,Absprung}} + E_{\text{kin,Sand}} + Q_{\text{Sand}}$
$\Rightarrow \quad \frac{p^2_{\perp,\text{Landung}}}{2m} \stackrel{!}{=} \frac{p^2_{\perp,\text{Absprung}}}{2m} + Q_{\text{Sand}} = \frac{\frac{1}{4}p^2_{\perp,\text{Landung}}}{2m} + Q_{\text{Sand}}$
$\Rightarrow \quad Q_{\text{Sand}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{p^2_{\perp,\text{Landung}}}{2m} \approx 898$ J
Die Sprunghöhe folgt aus Energieerhaltung: $E_{\text{kin,Absprung}} \stackrel{!}{=} E_{\text{pot,Absprung}}$
$\Rightarrow \quad \frac{p^2_{\perp,\text{Absprung}}}{2m} = \frac{p^2_{\perp,\text{Landung}}}{4m} \stackrel{!}{=} mgH_{\text{Absprung}}$
$\Rightarrow \quad H_{\text{Absprung}} = \frac{p^2_{\perp,\text{Landung}}}{4gm^2} \approx 0.56$ m

(d) Es ist ein vollkommen inelastischer Stoß, da die Gesamtenergie in Deformationsarbeit oder Wärme umgewandelt wird. Am harten Untergrund wird zwar keine Deformationsarbeit geleistet. Stattdessen muss das Känguruh mit Hilfe seiner Beinmuskeln die Bewegung abbremsen. Um die Bewegung zu beenden, muss das Känguruh also seine Muskeln deformieren.

2. Drehimpulserhaltung, Trägheitsmoment

Wenn eine Katze rücklings zu Boden fällt, gelingt es ihr dennoch, sich in der Luft zu drehen und auf den Füßen zu landen. (Ergänzen Sie die nachfolgenden Aussagen jeweils physikalisch korrekt.)

(a) Trotzdem die Katze sich in der Luft von selbst drehen kann, muss sie dabei den ....- Erhaltungssatz beachten.

Wenn die Katze in der Luft mit ihrem Schwanz wie mit einem Propeller rotieren würde, dann würde dadurch auch ihr Körper in Rotation versetzt werden.

(b) Wenn die Katze den Schwanz im Uhrzeigersinn rotiert, dann rotiert der Katzenkörper .... Uhrzeigersinn.

Bei einer Körpermasse von insgesamt 4 kg beträgt die Masse des Schwanzes geschätzt ein Zwanzigstel. Betrachten wir den Katzenkörper als Vollzylinder mit Radius $r_K = 6$ cm und den Schwanz als dünnen Stab der Länge $l_S = 20$ cm.
Hinweis: Das Trägheitsmoment eines dünnen Stabs, der um seinen Endpunkt rotiert, beträgt $I_S = \frac{1}{3}ml^2$.

(c) Wie viele Umdrehungen pro Sekunde müsste die Katze mit ihrem Schwanz machen, damit der Katzenkörper in einer halben Sekunde gerade eine halbe Umdrehung ausführt?

(d) (freiwillig) Aus welcher Höhe wäre die Kateze gefallen, wenn die Fallzeit eine halbe Sekunde ist?

(Lösungswerte: (a) Drehimpulserhaltung, (b) entgegen, (c) -2.57/s (d) 1.23 m)

Lösung:

(a) Antwort: Drehimpulserhaltung. Wenn sie sich frei in der Luft drehen möchte, dann ist dies nur möglich, wenn die Katze einen Körperteil in die eine Richtung und zugleich einen anderen Körperteil in die andere Richtung dreht.

(b) Antwort: entgegen dem Uhrzeigersinn. Erklärung wie bei (a)

(c) Daten: Masse Schwanz $m_S = \frac{1}{20} \cdot 4$ kg$=$ 0.2 kg, Masse Katzenkörper ohne Schwanz $m_K =$ 4 kg$-m_S = 3.8$ kg, Länge des Schwanzes $l_S = 0.20$ m, Radius des Katzenkörpers $r_K = 0.06$ m.
Lösungsansatz: Drehimpulserhaltung $L_K + L_S \stackrel{!}{=} 0$
Mit Trägheitsmoment Katzenkörper (als Vollzylinder) $I_K = \frac{1}{2}m_K r_K^2$ und Katzenschwanz (als Stab um Endpunkt) $L_S = \frac{1}{3}m_S l_S^2$ folgt mit $L = I \cdot \omega$

$$L_K + L_S = I_K \cdot \omega_K + I_S \cdot \omega_S = \frac{1}{2}m_K r_K^2 \omega_K + \frac{1}{3}m_S l_S^2 \omega_S$$

Aufgelöst nach ω_S

$$\omega_S = -\frac{\frac{1}{2}m_K r_K^2}{\frac{1}{3}m_S l_S^2} \cdot \omega_K$$

Die Katze soll sich in $t = \frac{1}{2}$ s um 180° drehen. Damit folgt $\omega_K = \frac{180°}{\frac{1}{2}\text{ s}} \hat{=} \frac{\pi}{\frac{1}{2}\text{ s}} = 2\pi \frac{1}{\text{s}}$
Alle Zahlenwerte eingesetzt, ergibt sich:

$$\omega_S = -\frac{\frac{1}{2} \cdot 3.8\text{ kg} \cdot (0.06\text{ m})^2}{\frac{1}{3} \cdot 0.2\text{ kg} \cdot (0.20\text{ m})^2} \cdot 2\pi = -2.565 \cdot 2\pi \approx -16.12\frac{1}{\text{s}}$$

Der Schwanz muss sich mit $\omega_S \approx -16.12\frac{1}{\text{s}}$ drehen, was also knapp 2.57 Umdrehungen pro Sekunde entgegen der Rotation des Körpers erfordert.

(d) Lösungsansatz: phys. Phänomen 1dim Bewegungsgesetz $x(t) = \frac{1}{2}at^2$
Mit $a = g = 9.81$ m/s^2 und $t = 0.5$ s folgt $x = \frac{1}{2}gt^2 = 0.5 \cdot 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0.5\text{ s})^2 \approx 1.23$ m

3. Drehmoment, Schwerpunkt, Statik

Die meisten Insekten haben sechs Beine. Geben Sie eine physikalische Begründung!

Lösung:

Zentraler Grund ist, dass man mit sechs Beinen ohne Energieaufwand das Gleichgewicht halten und sich mit minimalem Energieaufwand fortbewegen kann.

- 1 Bein: Nur stabil, wenn Schwerpunkt genau über Stützpunkt am Boden.

- 2 Beine: seitlich stabil, vor-&rückwärts nur stabil, wenn Schwerpunkt zwischen den Beinen liegt.
- 3 Beine: statisch stabil; instabil, sobald ein Bein zur Fortbewegung angehoben wird
- 4 Beine: statisch stabil; stabil, wenn nur ein Bein zur Fortbewegung angehoben wird; instabil, sobald zwei Beine angehoben werden ($\rightarrow$ komplizierte Koordination des Bewegungsablaufs ist energieaufwändig)
- 5 Beine: statisch stabil; stabil bei Anheben von bis zu zwei Beinen ($\rightarrow$ komplizierte Koordination des Bewegungsablaufs ist energieaufwändig)
- 6 Beine: statisch stabil; stabil bei Anheben von bis zu drei Beinen (symmetrische Beinbewegung zur Fortbewegung möglich, einfach Koordination, minimaler Energieaufwand)