**6. Übungsblatt** **Besprechung: 26./28.11.2011**

## 1. Volumenstromstärke, Viskosität, Strömungswiderstand

Eine Infusionsflasche hängt 80.00 cm über der Einstichstelle. Die Kanüle hat eine Länge von 4.00 cm. Der Strömungswiderstand des Schlauches kann vernachlässigt werden.

(a) Wie groß müsste der Durchmesser der Kanüle sein, wenn 500 ml Infusionslösung in $t \approx 1682$ Sekunden verabreicht werden soll? Dabei sei die Viskosität der Infusionslösung $\eta = 1.00$ mPa·s und die Dicht $\rho = 1000$ kg/m$^3$.
(Blutdruck und Abnahme der Flüssigkeitssäule werden vernachlässigt!)

(b) Wie groß ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der Kanüle von 0.5 mm Durchmesser?

(Lösungswerte: (a) $d \approx 0.5$ mm (b) $\overline{v} \approx 1.5$ m/s, )

**Lösung:**
Es sind: Höhe $h = 0.8$ m, Länge der Kanüle $L = 0.04$ m, Infusionszeit $t \approx 1682$ s.

(a) Es sind Volumen $V = 50 \cdot 10^{-6}$ m$^3$, $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ Pa·s, $\rho = 1000$ kg/m$^3$.
Es gilt $\Delta p = R_s \cdot I$ mit Volumenstromstärke $I = \frac{V}{t}$ und Strömungswiderstand $R_s \rightarrow I = \Delta p / R_s$.

$$I = \frac{V}{t} = \frac{\Delta p}{R_s} \quad \rightarrow \quad R_s = \frac{\Delta p \cdot t}{V}$$

Strömungswiderstand folgt aus Formel von Hagen-Poiseuille zu $R_s = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$, also eingesetzt

$$R_s = \frac{8\eta \cdot L}{\pi \cdot r^4} = \frac{\Delta p \cdot t}{V} \quad \rightarrow \quad r^4 = \frac{8\eta \cdot L \cdot V}{\pi \cdot \Delta p \cdot t}$$

Die Druckdifferenz $\Delta p$ folgt aus dem Schweredruck, da die Infusionsflasche über der Einstichstelle hängt, also $\Delta p = \rho g h$

$$\rightarrow \quad r^4 = \frac{8\eta \cdot L \cdot V}{\pi \cdot \rho g h \cdot t}$$

Zahlenwerte einsetzen ergibt:

$$r^4 = \frac{8 \cdot 1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa\,s} \cdot 0.04\ \mathrm{m} \cdot 500 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3}{\pi \cdot 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0.80\ \mathrm{m} \cdot 1682\ \mathrm{s}} \approx \frac{1.6 \cdot 10^{-7}}{4.147 \cdot 10^7}\ \mathrm{m}^4 \approx 38.58 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{m}^4 \approx 38.58 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{mm}^4$$

Zweimal Quadratwurzelziehen ergibt $r \approx 2.49 \cdot 10^{-4}$ m $\approx 0.25$ mm, also Durchmesser $\approx 0.5$ mm

(b) Die mittlere Geschwindigkeit folgt aus der Volumenstromstärke $I = \frac{V}{t} = \frac{x \cdot A}{t} = \frac{x}{t} \cdot A = \overline{v} \cdot A$ (vgl. Kontinuitätsgleichung). Kanülenradius $r = 0.5/2$ mm$= 2.5 \cdot 10^{-4}$ m.

$$\rightarrow \quad \overline{v} = \frac{I}{A} = \frac{V}{t \cdot A} = \frac{500 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3}{1682\ \mathrm{s} \cdot \pi \cdot (2.5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m})^2} \approx 1.51 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

## 2. Schwingungen

Ein Federpendel werde ausgelenkt und schwinge leicht gedämpft. Mit welcher Eigenfrequenz $f$ schwingt die Masse $m = 1500$ g, wenn die Federkonstante $D = 60$ N/m beträgt? (Die "Eigenfrequenz" bezieht sich auf die dämpfungsfreie Schwingung.)
Wie lange dauert es, bis die Schwingungsamplitude auf die Hälfte abgefallen ist, wenn die Dämpfungskonstante $\gamma = 0.007$ s$^{-1}$ beträgt?
(Lösungswerte: $f \approx 1$ Hz, $T_{1/2} \approx 99$ s )

**Lösung:**
Für ein Federpendel gilt als Zusammenhang zwischen Kreiseigenfequenz $\omega$, Pendelmasse $m$ und Federkonstante $D$: $\quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Die Eigenfrequenz $f$ und die Kreiseigenfrequenz $\omega$ hängen zusammen gemäß: $f = \frac{\omega}{2\pi}$, sodass eingesetzt in obige Formel folgt

$$\rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \quad .$$

Zahlenwerte einsetzen ergibt $\quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{60\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{1.5\ \mathrm{kg}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{40\frac{1}{\mathrm{s}^2}} \approx 1\ \mathrm{s}^{-1} = 1\ \mathrm{Hz}$.
Die Zeit, nach der die Schwingungsamplitude auf die Hälfte abgefallen ist, beträgt lt. Vorlesung

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\delta} = \frac{\ln(2)}{0.007\frac{1}{\mathrm{s}}} \approx 99.021\ \mathrm{s}$$

## 3. Hydro-/Aerodynamik

Ergänzen Sie folgende Aussagen physikalisch korrekt:

(a) Damit ein Vogel fliegen kann, muss die Luft oberhalb des Flügels ··········· als unterhalb des Flügels strömen.

(b) Wenn Flüssigkeit aus einem Rohr mit großem Querschnitt in ein Rohr mit kleinerem Querschnitt fließt, dann nimmt der statische Druck ··········· .

(c) Damit bei Verringerung des Kapillardurchmessers um 16% noch die gleiche Volumenstromstärke vorliegt, muss die Druckdifferenz um ··········· % verändert werden.
(Hinweis: Zur Lösung genügen Proportionalitätssrelationen!)

(d) In einer viskosen Flüssigkeit sinkt eine ··········· Kugel schneller als eine ··········· Kugel.

(Lösungswerte: (a) schneller, (b) ab, (c) 100%, (d) große schneller als kleine )

**Lösung:**

(a) Antwort: schneller. Denn nach Bernoulli-Gleichung wächst mit steigender Strömungsgeschwindigkeit der dynamische Druck, während zugleich der statische Druck abnimmt. Der geringere statische Druck über dem Flügel verglichen mit dem statischen Druck unter dem Flügel erzeugt den dynamischen Auftrieb, damit der Vogel fliegen kann.

(b) Antwort: ab. Nach Kontinuitätsgleichung ist die Volumenstromstärke konstant. Damit steigt beim Übergang vom großen zum kleinen Rohr die Strömungsgeschwindigkeit. Eine größere Strömungsgeschwindigkeit ($v$) bedeutet einen größeren dynamischen Druck ($\frac{1}{2}\rho v^2$), sodass der statische Druck abnehmen muss, damit die Bernoulli-Gleichung erfüllt wird.

(c) Antwort 100%. Nach Hagen-Poisseuille ist der Strömungswiderstand $R_s \propto \frac{1}{r^4}$. Damit der Volumenstrom $I = \frac{\Delta p}{R_s}$ =const. bleibt, muss also $\Delta p$ in gleichem Maße anwachsen wie $R_s$, also für $r = r_0 - 16\% \cdot r_0 = 0.84 \cdot r_0$ wird

$$\frac{\Delta p}{R_s} = \frac{\Delta p_0}{R_{s,0}} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta p}{\Delta p_0} = \frac{R_s}{R_{s,0}} = \frac{\frac{1}{r^4}}{\frac{1}{r_0^4}} = \frac{r_0^4}{r^4} = \left(\frac{r_0}{0.84 \cdot r_0}\right)^4 \approx 2.01 \quad .$$

Damit muss die Druckdifferenz $\Delta p$ um Faktor 2.01 ansteigen, beträgt somit $\Delta p = 1.01\Delta p_0 + \Delta p_0$, muss also um 101% gegenüber $\Delta p_0$ vergrößert werden.

(d) Antwort: große schneller als kleine. Nach Stokesschem Reibungsgesetz wächst die Sinkgeschwindigkeit mit dem Quadrat der Kugelradius.