THEORETISCHE PHYSIK | 25. JULI 2013
THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE PHYSIK (T4) | KLAUSUR
PROF. DR. U. SCHOLLWÖCK | SOMMERSEMESTER 2013

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte							

Note:

WICHTIG! Schreiben Sie auf jedes Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Matrikelnummer: Name, Vorname:

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeitsrechnung [2+2=4 Punkte]

Fünfzehn Kinder spielen an einem Sommernachmittag. Fünf haben sich verlaufen und kehren nicht mehr zurück ($p(A) = 5/15$), acht bekommen einen Sonnenbrand ($p(B) = 8/15$) und sechs kehren ohne Sonnenbrand nach Hause zurück ($p(C) = 6/15$).

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Kind, das einen Sonnenbrand hat, verlaufen hat?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind, das sich verlaufen hat, einen Sonnenbrand hat?

Matrikelnummer: Name, Vorname:

Aufgabe 2: Beziehungen zwischen Antwortfunktionen [2+2=4 Punkte]

Ein magnetisches System sei durch die Zustandsgrößen S, T, Magnetisierung M und Magnetfeld B charakterisiert. Experimentell sind folgende Antwortfunktionen wichtig:

$$c_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M, \quad c_B = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B, \quad \chi_S = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_S, \quad \chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T.$$

(a) Betrachten Sie $B = B(T, S)$ für Zustandsänderungen mit $\mathrm{d}B = 0$ beziehungsweise $M = M(T, S)$ für Zustandsänderungen mit $\mathrm{d}M = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{c_B}{T} = -\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T \quad \text{und} \quad \frac{c_M}{T} = -\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\dfrac{c_B}{c_M} = \dfrac{\chi_T}{\chi_S}$.

Matrikelnummer: Name, Vorname:

Aufgabe 3: Anharmonischer Oszillator [5 Punkte]

Ein Proton auf einem Zwischengitterplatz in einem Metall kann als stark anharmonischer Oszillator aufgefasst werden. Als vereinfachtes Modell nehmen wir eine eindimensionale Hamiltonfunktion

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + ax^4$$

an. Berechnen Sie gemäß der klassischen Statistik die freie Energie F und die spezifische Wärme C_V als Funktion der Temperatur. Gilt das Dulong-Petit-Gesetz $C_V = k_B$?

Hinweis: Führen Sie das auftretende Ortsintegral auf die Gammafunktion $\Gamma(y) = \int_0^\infty \mathrm{d}q \; e^{-q} q^{y-1}$ zurück. $\Gamma(\frac{1}{4}) \approx 3.6$.

Matrikelnummer: Name, Vorname:

Aufgabe 4: Otto-Prozess [2+2+4+2=10 Punkte]

In einem Otto-Motor durchläuft die Arbeitssubstanz (ein Benzin-Luft-Gemisch) folgenden Kreisprozess:

$1 \to 2$ adiabatische Kompression

$2 \to 3$ isochore Wärmezufuhr bei Volumen V_2

$3 \to 4$ adiabatische Expansion

$4 \to 1$ isochore Wärmeableitung bei Volumen V_1

Setzen Sie voraus, dass die Arbeitssubstanz ein ideales Gas (mit mehratomigen Molekülen) ist, d.h. $PV = Nk_BT$, $E = (\gamma - 1)^{-1} Nk_BT$, $\gamma = const. > 1$.

(a) Leiten Sie die Adiabatengleichung her.

(b) Zeichnen Sie den Kreisprozess im PV–Diagramm und im TS–Diagramm auf (P beziehungsweise S auf der x–Achse).

(c) Berechnen Sie für alle Teilprozesse ($1 \to 2$, $2 \to 3$ usw.) jeweils die geleistete Arbeit und die zu- bzw. abgeführte Wärmemenge als Funktion von V_1, V_2, P_1, P_2, P_3, P_4.

(d) Bestimmen Sie den Wirkungsgrad η in Abhängigkeit des Verdichtungsverhältinisses $\epsilon = V_1/V_2$.

Hinweis: Der Wirkungsgrad ist das Verhältnis der insgesamt während des Kreisprozesses nach außen geleisteten Arbeit zu der dem System zugeführten Wärmemenge, $\eta = |\Delta W_{\text{tot}}|/\Delta Q_{23}$.

Matrikelnummer: Name, Vorname:

Aufgabe 5: Negative Temperaturen [2+3+3+1=9 Punkte]

Die Energieeigenwerte E_ν eines Systems seien sämtlich nicht entartet, äquidistant und von endlicher Anzahl: $E_\nu = (\nu - 1)\epsilon$ mit $\nu = 1, 2, \ldots, k$ und $\epsilon > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass sich die kanonische Zustandssumme zu

$$Z_k = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x} \frac{\sinh \frac{kx}{2}}{\sinh \frac{x}{2}}$$

berechnet. Dabei ist $x = \beta\epsilon = \dfrac{\epsilon}{k_B T}$.

(b) Berechnen Sie als Funktion von x die freie Energie F, die Entropie S und die Wärmekapazität $C = T\frac{\partial S}{\partial T}$.

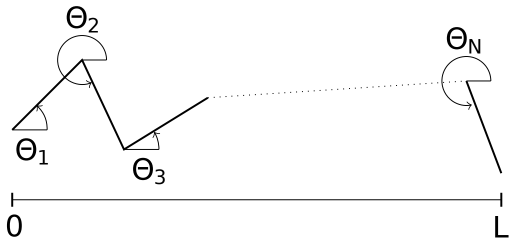
(c) Da das Spektrum nach oben beschränkt ist, existiert Z_k für alle reellen x bzw β, also insbesondere auch für negative Temperaturen $T < 0$. Beschreiben Sie qualitativ das Verhalten der mittleren Besetzungszahl $n_\nu = e^{-\beta E_\nu}/Z_k$ des Niveaus ν für $x > 0$ (positive Temperatur), $x < 0$ (negative Temperatur) und $x = 0$ (unendliche Temperatur).

(d) Was passiert, wenn man ein System negativer Temperatur mit einem System positiver Temperatur in thermischen Kontakt bringt?

Matrikelnummer: Name, Vorname:

Aufgabe 6: Kettenmoleкül [2+4+2+4+2=14 Punkte]

Ein Kettenmoleül in 2 Dimensionen bestehe aus N Gliedern der Länge a. Die verschiedenen Konfigurationen des Moleküls ergeben sich als Konfigurationen der im Bild gezeigten Winkel $\{\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_N\}$.



Alle Konfigurationen haben die Energie null, so dass sich die kanonische Zustandssumme des Moleküls bei festgehaltener Gesamtlänge $L = a\sum_{i=1}^{N}\cos(\Theta_i)$ als

$$Z(L,N) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\Theta_1)\ldots\mathrm{d}(\cos\Theta_N)\ \delta\Big(\sum_{i=1}^{N}\cos\Theta_i - \frac{L}{a}\Big)$$

ergibt. Das System lässt sich jedoch einfacher nach Transformation auf die Zugspannung σ diskutieren

$$Z_\sigma(T,\sigma,N) = \frac{1}{a}\int_{-aN}^{aN}\mathrm{d}L\ e^{\beta\sigma L} Z(L,N), \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $Z_\sigma(T,\sigma,N) = \exp(N\phi(x))$ mit $\phi(x) = \ln(2\sinh(x)/x)$ und $x = \beta\sigma a$. Geben Sie die Gibbs freie Energie an $G(T,\sigma,N) = -k_B T\ln Z_\sigma$. Hinweis: Um Schreibaufwand zu sparen, drücken Sie Ihre Ergebnisse hier und im Folgenden soweit möglich in Abhängigkeit von $\phi(x)$, $\phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x)$ und $\phi''(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\phi(x)$ aus.

(b) Berechnen Sie den Mittelwert der Länge $\langle L\rangle = L(T,\sigma,N)$. Bestimmen Sie den Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial T}|_\sigma$ und die Kompressibilität $\kappa_T = \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \sigma}|_T$. Welche Vorzeichen haben α und κ_T, wenn Sie $\sigma > 0$ annehmen? Warum wäre die Annahme $\sigma < 0$ unphysikalisch? Begründen Sie mögliche Unterschiede zum Vorzeichen von α und κ_T für das ideale Gas.

(c) Wie verhält sich L qualitativ für große ($x \gg 1$) und kleine ($x \ll 1$) Spannungen σ?

(d) Berechnen Sie die Entropie $S(T,\sigma,N)$ aus $\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T - L\mathrm{d}\sigma$ und daraus die Wärmekapazität bei konstanter Spannung $C_\sigma = T\frac{\partial S}{\partial T}|_\sigma$. Berechnen Sie weiterhin die freie Energie F durch Wechsel auf die unabhängige Variable L und daraus die Wärmekapazität bei konstanter Länge $C_L = T\frac{\partial S}{\partial T}|_L$.

(e) Wie verhält sich die freie Energie $F(T,L,N)$ für $x \ll 1$? Geben Sie für diesen Grenzfall die kanonische Zustandssume $Z(L,N)$ an.

Matrikelnummer: Name, Vorname:

Aufgabe 6: Kettenmolekül (Fortsetzung)