

# Übungen zur Vorlesung

## Einführung in die theoretische Teilchenphysik

WiSe 15/16

Blatt 7

### Aufgabe 1: Parität von Neutrinos und Mesonen

- Kann man Neutrinos als Eigenzustände des Paritätsoperators  $P$  auffassen, wenn man annimmt, dass die Neutrinos masselos sind? Welche Parität haben massive Neutrinos?
- Das  $K^+$ -Meson kann sowohl in zwei, also auch in drei Pionen zerfallen. Welcher dieser Prozesse verletzt Parität?

### Aufgabe 2: $SO(4)$ Algebra

- Zeigen Sie, dass für  $SO(4)$  Algebra-Elemente  $A$  gilt  $A^T + A = 0$ .
- Zeigen Sie, dass für  $SO(4)$  Algebra-Elemente  $A$  gilt  $g = \exp(A) \in SO(4)$ .
- Wieso kann man  $A$  schreiben als  $A = \sum_{i < j} A_{ij} E_{ij}$  wobei  $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ .
- Zeigen Sie, dass gilt:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} + \delta_{jl}E_{ki} + \delta_{ik}E_{lj} + \delta_{il}E_{jk}$$

- Zeigen Sie, dass es maximal zwei kommutierende Elemente in der  $SO(4)$  Algebra gibt. (Diese Elemente definieren eine *Cartan-Subalgebra*).
- Definieren Sie:

$$H_a = -iE_{(2a-1)(2a)}$$
$$E^{(\alpha_1, \alpha_2)} = E_{13} + \alpha_1 i E_{23} + \alpha_2 i (E_{14} + \alpha_1 i E_{24})$$

mit  $\alpha_a = \pm 1$  und  $a = 1, 2$ . (die Vektoren  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$  werden Wurzeln, im englischen *roots* der  $SO(4)$  Algebra genannt) Zeigen Sie, dass gilt:

$$[H_a, H_b] = 0$$
$$[H_a, E^{(\alpha_1, \alpha_2)}] = \alpha_a E^{(\alpha_1, \alpha_2)}$$

- Zeigen Sie, dass wenn wir die Kombinationen  $H_{\pm} = H_1 \pm H_2$  betrachten, dann können wir die Algebra umschreiben zu

$$[H_{\pm}, E^{\alpha(1, \pm 1)}] = 2\alpha E^{\alpha(1, \pm 1)}$$
$$[H_{\mp}, E^{\alpha(1, \pm 1)}] = 0$$

- Erklären Sie hiermit wieso auf der Ebene der Algebren gilt, dass

$$SO(4) \cong SU(2) \times SU(2)$$

### Aufgabe 3: Mesonenmasse

Eine heuristische Formel, um die Masse von leichten Mesonen abzuschätzen ist gegeben durch

$$M(\text{Meson}) = m_1 + m_2 + 159 \left( \frac{2m_u}{\hbar} \right)^2 \frac{S^2 - S_1^2 - S_2^2}{2m_1 m_2} \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

$m_1$  und  $m_2$  sind die Massen der Konstituentenquarks des Mesons und  $m_u$  ist die Masse des  $u$ -Quarks.  $S^2$ ,  $S_1^2$  und  $S_2^2$  sind die Spinquadrate von Meson und Konstituentenquarks. Berechnen Sie mit dieser Formel die Massen der Mesonen  $\pi$ ,  $K$ ,  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $K^*$  und  $\phi$  und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den experimentell beobachteten Werten. Benutzen Sie für die Rechnung die Konstituentenquarkmassen  $m_u = m_d = 308 \text{ MeV}/c^2$  und  $m_s = 483 \text{ MeV}/c^2$ . Berechnen Sie auch die Masse von  $\eta'$ . Was fällt Ihnen auf?

Bei Fragen E-Mail an: [mfuchs@mpp.mpg.de](mailto:mfuchs@mpp.mpg.de)