Übungen zur Vorlesung

Einführung in die theoretische Teilchenphysik

WiSe 15/16

Blatt 5

Aufgabe 1: Gruppentheorie

Der zweidimensionale Vektor $\mathbf{A}$ habe im Kartesischen Koordinatensystem I die Form $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$.

a) Wie lautet seine Koordinatendarstellung im System I', das bezüglich I um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn gedreht wurde? Schreiben Sie Ihr Ergebnis in der Form

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\theta) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} .$$

b) Zeigen sie, dass $\mathbf{R}(\theta)$ eine orthogonale Matrix ist und berechnen Sie $\det\mathbf{R}(\theta)$. Zu welcher Gruppe gehört $\mathbf{R}(\theta)$?

c) Zeigen Sie explizit, dass $\mathbf{R}(\theta_1)\mathbf{R}(\theta_2) = \mathbf{R}(\theta_1 + \theta_2)$. Ist die Gruppe abelsch?

d) Betrachten Sie nun die Matrix $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Zu welcher Gruppe gehört $\mathbf{S}$? Welchen Effekt hat sie auf den Vektor $\mathbf{A}$?

Aufgabe 2: Pauli Matrizen

Die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind die Generatoren der Gruppe $SU(2)$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten

a)

$$\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = \sigma_3^2 = \mathrm{id},$$

b)

$$\det\sigma_i = 1 , \qquad \mathrm{tr}\sigma_i = \sum_k (\sigma_i)_{kk} = 0 ,$$

c)

$$\sigma_i \, \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

d)

$$\Big[\sigma_i \, , \sigma_j\Big] = 2\, i\epsilon_{ijk}\sigma_k , \qquad \Big\{\sigma_i \, , \sigma_j\Big\} = 2\delta_{ij} \; .$$

Aufgabe 3: Unitäre Representation

Betrachten Sie ein Element der Gruppe $SU(N)$ gegeben durch $U = exp(-i\theta^a T_a)$ wobei T_a die Erzeuger der Gruppe sind.

a) Zeigen Sie, dass $tr(T_a) = 0$.

Hinweis: Benutzen Sie die Identität für invertierbare Matrizen $ln[det(A)] = tr[ln(A)]$.

b) Zeigen Sie, dass die T_a hermitesche Matrizen sind.

c) Zeigen Sie, dass $a = 1, ..., N^2 - 1$.

Im Allgemeinen erfüllen die Erzeuger folgende Algebra:

$$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c$$
$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N}\delta^{ab} + d_{abc}T^c$$

wobei f_{abc} und d_{abc} sogenannte Strukturkonstanten sind und der Antikommutator definiert ist als $\{A, B\} := AB + BA$. Zudem ist es immer möglich die Erzeuger so zu normieren, dass gilt:

$$Tr[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

d) Zeigen Sie, dass somit gilt:

$$Tr[T^a T^b T^c] = \frac{1}{4}(d_{abc} + if_{abc})$$
$$[\sum_a^{N^2-1} T^a T^a, T^b] = 0$$

Man nennt einen Operator der Form $\sum_a^{N^2-1} T^a T^a$ welcher mit allen Erzeuger kommutiert einen quadratischen Casimir-Operator.

e) Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme von aufgabe $a) - d)$ eine mögliche Darstellung der Erzeuger von $SU(2)$.

Bei Fragen E-Mail an: *mfuchs@mpp.mpg.de*