



## Lösungsblatt 1

### Aufgabe 1 (Induktion).

1. *Induktionshypothese:*  $\sum_{k=1}^n (2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$

*Induktionsanfang:*  $n = 1$  :

$$2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

*Induktionsschritt:*  $n \rightarrow n+1$  :

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k-1 = \sum_{k=1}^n (2k-1) + 2(n+1) - 1 \stackrel{I.H.}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

2. *Induktionshypothese:*  $\sum_{i=1}^k x^i = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ und } x \neq 1$

*Induktionsanfang:*  $k = 0$ :

$$1 = \frac{1-x^1}{1-x} = 1$$

*Induktionsschritt:*  $n \rightarrow n+1$  :

$$\sum_{i=1}^{k+1} x^i = \sum_{i=1}^k x^i + x^{k+1} \stackrel{I.H.}{=} \frac{1-x^{k+1}}{1-x} + x^{k+1} = \frac{1-x^{k+1} + x^{k+1} - x^{k+2}}{1-x} = \frac{1-x^{k+2}}{1-x}$$

### Aufgabe 2 (Vereinfachen Sie).

a)  $(a^n)^{\frac{-2}{n}} = a^{n \cdot \frac{-2}{n}} = a^{-2}$

b)  $b^x \cdot a^{4x} \cdot b^{-5x} = b^{x(1-5)} a^{4x} = \left(\frac{a}{b}\right)^{4x}$

c)  $\frac{x^2 \cdot x^5}{(x^4)^3} = \frac{x^7}{x^{12}} = x^{-5}$

d)  $\frac{a^{-2} \cdot b^3 \cdot c}{a \cdot b^{-2} \cdot c^{-1}} = \frac{b^{3+2} c^2}{a^3} = \frac{b^5 c^2}{a^3}$

e)  $\left(\frac{a \cdot x^2}{y}\right)^2 \cdot \left(\frac{y^2}{a^2 \cdot x}\right)^3 = \frac{a^2 x^4 y^6}{y^2 a^6 x^3} \frac{xy^4}{a^4}$

f)  $\left(\frac{3 \cdot y^2}{z}\right)^{-2} = \frac{z^2}{9 \cdot y^4}$

g)  $\frac{e^{4x+2}}{e^{2x-3}} = e^{4x+2-2x+3} = e^{2x+5}$

h)  $e^x e^{2x+1} = e^{3x+1}$

i)  $(e^{x+1})^2 = e^{2x+2}$

j)  $\left[\left(\frac{a^2 \cdot b^{-1} \cdot c^3}{a^{-1} \cdot b \cdot c^2}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(\frac{a^3 \cdot c}{b^2}\right)^2 = \frac{a^6 \cdot c^2}{b^4}$

k)  $\left[\left(\frac{3^{-2} \cdot x^{-2} \cdot y^2}{5^{-5} \cdot x^{-2} \cdot y^5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3^{-1} \cdot x^{-3} \cdot y^{-2}}{5^{-2} \cdot x^{-2} \cdot y^{-1}}\right)^2\right]^2 = (5^{-5} 3^2 \cdot y^3)^2 \cdot \left(\frac{5^2}{3 \cdot x \cdot y}\right)^4 = \frac{y^2}{x^4 5^2}$

### Aufgabe 3.

- a) falsch,  $\ln$  is nicht linear ( $\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$ )
- b) richtig
- c) richtig
- d) falsch
- e) richtig
- f) falsch,  $\ln a / \ln b \neq \ln(a/b)$

### Aufgabe 4.

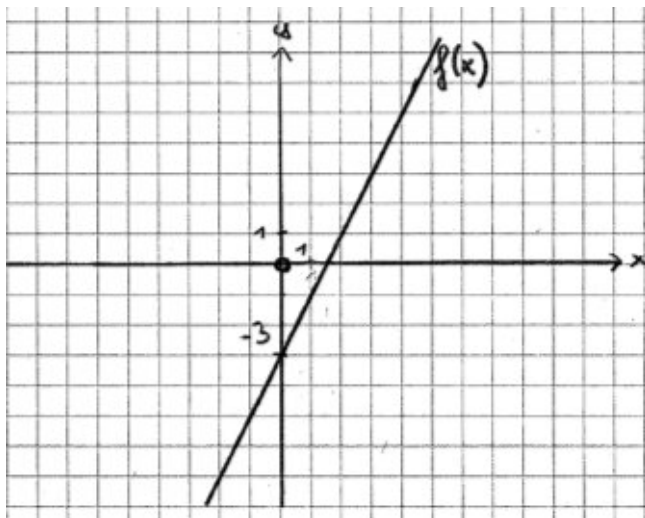
- a)  $x = 2^{-3}$
- b)  $x = 10^{1,5} = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1000}$
- c)  $e^{-1} = x$
- d)  $x^2 = 121 \Rightarrow x = 11$
- e)  $\log_2 7 = x$
- f)  $x = 10^{27,3}$
- g)  $x = e^{8,65133}$
- h) Benutze  $\log_2: x = 2x + 4 \Rightarrow x = -4$
- i)  $3^2 = x + 4 \Rightarrow x = 5$
- j)  $5^{x+2} = 5^{3(2-x)} \Rightarrow x + 2 = 6 - 3x \Rightarrow x = 1$
- k)  $2^{x+2} = 2^4 \Rightarrow x = 2$
- l)  $2^8 = x - 4 \Rightarrow x = 4 + 2^8$

### Aufgabe 5.

1.  $y = \frac{10-7}{8-3}x + t$ , setze  $x = 8$  ein zur Bestimmung von  $t$ :  $10 = \frac{3}{5} \cdot 8 + t \Rightarrow t = 10 - \frac{24}{5} = 5\frac{1}{5}$ .  
Berechne  $y(5) = \frac{3}{5} \cdot 5 + 5\frac{1}{5} = 8\frac{1}{5}$  und  $y(x) = \frac{3}{5}x + 5\frac{1}{5} \stackrel{!}{=} 6 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{3}$ .
2.  $y = \frac{9-5,5}{6,5-4}x + t = \frac{7}{5}x + t$  Benutze  $y(4) = 1,4 \cdot 4 + t = 5,5 \Rightarrow t = -0,1$ .  
Berechne nun  $y(5) = 1,4 \cdot 5 - 0,1 = 6,9$  und  $y(x) = 1,4x - 0,1 \stackrel{!}{=} 6 \Rightarrow x = 6,1/1,4$ .

### Aufgabe 6.

- a)  $m = \frac{1+4}{-2-3} = -\frac{5}{5} = -1$  ist die Steigung der Gerade,  $t$  bestimmt man durch einsetzen zu  $-1$ . Die Geradengleichung ist demnach  $y = -1 \cdot x - 1$ .  
 $x = 0$  einsetzen ergibt den y-Achsen-Schnittpunkt  $y = -1$  und Auflösen von  $y = 0 = -1 \cdot x - 1$  ergibt den x-Achsen-Schnittpunkt  $x = -1$ .



b)

$$c) m = -3,1 = \frac{y_2 + 0,12}{1,3 - 0,5} \Rightarrow -3,1 \cdot 0,8 - 0,12 = -2,6 = y_2$$

### Aufgabe 7.

$$1. y = \log x \iff 10^y = x \Rightarrow f^{-1}(x) = 10^x$$

$$2. y = \log_2(x^2), x > 0 \Rightarrow 2^y = 2^{\log_2 x^2} \Rightarrow x^2 = 2^y \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^{0,5x}$$

$$3. y = 2^x \Rightarrow \log_2 y = \log_2 2^x = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 x$$

$$4. y = 5^{2x} \Rightarrow \log_5 y = \log_5 5^{2x} \Rightarrow 2x = \log_5 y \Rightarrow x = \frac{\log_5 y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_5 x$$

### Aufgabe 8.

$$1. y = \ln \left( \frac{x}{a} + \sqrt{1 + (x/2)^2} \right) \iff e^y = \frac{x}{a} + \sqrt{1 + (x/2)^2}$$

$$\iff \left( e^y - \frac{x}{a} \right)^2 = 1 + \left( \frac{x}{a} \right)^2$$

$$\iff e^{2y} - 2e^y \frac{x}{a} + (x/a)^2 = 1 + (x/a)^2$$

$$\iff e^{2y} - 1 = 2e^y x/a$$

$$\iff \frac{a(e^{2y} - 1)}{2e^y} = x$$

$$\iff x = a \sinh y$$

$$2. y = \ln(x/a + \sqrt{(x/a)^2 - 1}) \iff (e^y - x/a)^2 = \left( \frac{x}{a} \right)^2 - 1$$

$$\iff e^{2y} - 2e^y \frac{x}{a} + (x/a)^2 = \left( \frac{x}{a} \right)^2 - 1$$

$$\iff e^{2y} + 1 = 2e^y \frac{x}{a}$$

$$\iff \frac{a}{2} (e^y + e^{-y}) = x$$

$$\Rightarrow x = a \cosh y$$

$$3. y = -\omega \ln(1 - kx) \iff e^{-\frac{y}{\omega}} = 1 - kx \iff \frac{1 - e^{-\frac{y}{\omega}}}{k} = x$$