



## Lösungsblatt 2

**Aufgabe 1** (Nullstellen).

- a)  $0 = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 = x(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x) \Rightarrow x_1 = 0 \text{ and } x_2 = -\frac{3}{4}$
- b)  $0 = x^3(2x^2 - 8) = x^3(x - 2)(x + 2)$
- c) *Substituiere mit*  $z := x^2 : 0 = 16z^2 - 40z + 9$ , *hat Lösungen*  $z_1 = \frac{9}{4}$  *und*  $z_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{3}{2}, x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}$
- d)  $\frac{1}{2} = \cos(1 + x)$ , *cos ist*  $\frac{1}{2}$  *bei*  $\frac{\pi}{3}$  *also*  $x = \frac{\pi}{3} - 1$

**Aufgabe 2** (Trigonometrische Funktionen).

1.  $\sin(\alpha) = 1/2$  *und*  $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  *Längen entsprechend.*
2.  $\sin(\alpha) \simeq 0,8835$  *und*  $\tan(\alpha) = 1,8862$  *ebenso.*
3.  $\tan(\alpha) = \frac{5}{7} \Rightarrow \alpha = 0,62024\text{rad}$ , *etwa 35,54Grad* *und*  $\tan(\alpha) = \frac{7}{5} \Rightarrow \alpha = 0,95054\text{rad}$ , *etwa 54,46 Grad*

**Aufgabe 3** (Grenzwerte).

- a) 2197
- b)  $-\frac{1}{2}$
- c) 1
- d)  $-\frac{3}{4}$
- e)  $\frac{1}{4}$
- f) 40
- g)  $\frac{1}{6}$
- h)  $\frac{2}{5}$
- i)  $-\frac{1}{2}$
- j) *siehe unten*

l)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{x^2 + x - 2}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{x^2 - 1}_{\rightarrow 0}} \stackrel{L.H.}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{2x} = \frac{3}{2}$

m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{1 - \cos 3x}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{1 - \cos x}_{\rightarrow 0}} \stackrel{L.H.}{=} \frac{\overbrace{3 \sin 3x}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{\sin x}_{\rightarrow 0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \cos 3x}{\cos x} = 9$

n)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\frac{x}{e^x}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{e^x}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{L.H.}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

o)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\frac{x}{\ln x}}^{\rightarrow \infty}}{\underbrace{\ln x}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{L.H.}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$

p)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\overbrace{\ln x}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{x - 1}_{\rightarrow 0}} \stackrel{L.H.}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1$

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{L.H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

q) *siehe unten*

r)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \underbrace{x}_0 \cdot \underbrace{\ln x}_{\rightarrow -\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\ln x}^{\rightarrow -\infty}}{\underbrace{1}_x} \stackrel{L.H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$

$$s) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \underbrace{\frac{1}{e^x - 1}}_{\infty} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x}}_0 \stackrel{L.H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{e^x + xe^x + e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2+x} = -\frac{1}{2}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^0 = 1 \text{ wobei } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e$$

$$v) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{zu j) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \underbrace{-3x}_{\rightarrow -\infty} + \underbrace{\sqrt{9x^2 + 4x - 5}}_{\rightarrow +\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2 + 6x - 5} - 3x)(\sqrt{9x^2 + 4x - 5} + 3x)}{\sqrt{9x^2 + 4x - 5} + 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 4x - 5 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 4x - 5} + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 5}{\sqrt{9x^2 + 4x - 5} + 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{5}{x}}{\sqrt{9 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} + 3} = \frac{4}{3+3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

#### Aufgabe 4 (Stetigkeit).

a)  $f(x) = |x|$  also  $f(0) = |0| = 0$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$ . Zusammen gilt also  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$  also ist die Funktion in  $x_0 = 0 \in \mathbb{D}_f$  stetig.

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + 3 = 5$  also haben wir linksseitige Stetigkeit.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} 3x + 1 = 4$ , aber  $f(1) = 5$ , folglich haben wir keine rechtsseitige Stetigkeit. Insgesamt ist  $f(x)$  also an der Stelle  $x_0 = 1$  nicht stetig.

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$  und  $f(0) = 1$  also rechtsseitig stetig, aber  $\lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$  also nicht linksstetig. und damit nicht stetig in  $x_0 = 0$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} 4x - 7 = 1 = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 4x + 5$  damit links- und rechtsseitig stetig und insgesamt stetig an der Stelle  $x_0 = 2$ .

e)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{1} = 1 = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2$  also  $f(x)$  stetig an der Stelle  $x_0 = 1$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1} = 2 \neq 1 = f(1)$ , also nicht rechtsseitig stetig und wegen  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$  auch nicht linksseitig stetig.  $f(x)$  ist somit an  $x_0 = 1$  nicht stetig.

Wichtig:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \neq x + 1$ . Die rechte Seite ist klar stetig. Sie unterscheidet sich nur durch den Definitionsbereich von  $f(x)$ .

g)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x - 1}{1} = -5 = f(-1)$  also rechtsstetig. Ebenso gilt linksseitige Stetigkeit (und ergo Stetigkeit in  $x_0 = -1$ ) wegen  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x - 1}{1} = -5$ .

Auch hier gilt:  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = \frac{(2x-3)(x+1)}{x+1} \neq 2x - 3$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  es gilt  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , somit ist  $x_0$  eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

i)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$   $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  also wieder ein Pol mit VZ-Wechsel bei  $x_0 = 1$ .

j)  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+2}{2x-3} = 6 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  aber  $2 \notin \mathbb{D}$  also ist  $x_0 = 2$  eine hebbare Definitionslücke. Bei  $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x+4}{x-1} = \infty$  also divergiert  $f(x)$  bei  $x_1 = 1$ .

k)  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$ , sei  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+1}, & x \neq \pm 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$  mit  $\mathbb{D}_{\tilde{f}} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Jetzt gilt  $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ , also ist  $x_2 = 1$  hebbare Definitionslücke da  $x_2 \in \mathbb{D}_{\tilde{f}}$ . Andererseits gilt:  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = \infty$  also ist  $x_1 = -1$  eine Polstelle mit VZW.

l)  $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+1} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2}$ . Betrachte  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x-1} = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x-1} = -\infty$ . Damit ist  $x_0 = 1$  eine Polstelle mit VZW.

m)  $f(x) = \frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)}$ . Definiere  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^3+8}, & x \neq 2 \\ \frac{1}{12}, & x = 2 \end{cases}$ , dann ist  $\mathbb{D}_{\tilde{f}} = \mathbb{R}$ . Zudem ist  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x^2-2x+4} = \frac{1}{12} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x^2-2x+4}$ , also ist  $\tilde{f}(x)$  definiert auf ganz  $\mathbb{R}$  und ist stetig an der Stelle  $x_0 = -2$ , also  $x_0$  ist hebbare Unstetigkeit.

n)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{(x+2)^2}$ , also ist  $x_0 = -2$  eine Polstelle ohne VZW.

### Aufgabe 5.

a)  $f'(x) = \frac{3}{5}x^2 + 6x - 1$

b)  $f'(x) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}x}}$

c)  $f'(x) = 4x - 6$

d)  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e)  $f'(x) = abx^{b-1}$

f)  $f'(x) = \frac{12}{x^5}$

g)  $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

h)  $f'(x) = 2x - 2^x \ln 2 + \frac{1}{x \ln 10}$

i)  $f'(x) = x^{-\frac{2}{3}} + x^{-5} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x^5}$

j)  $f'(x) = 18x(3x+1) + 3(9x^2-2) = 81x^2 + 18x - 6$  r)  $f'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

s)  $f'(x) = 3x^2(\tan x)(\sin x - \cos x) + x^3 \frac{1}{\cos^2 x}(\sin x - \cos x) + x^3(\tan x)(\cos x + \sin x)$

$$= x^2 \tan x [3 \sin x - 3 \cos x + x \cos x + x \sin x] + \left( \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) x^3$$

$$= x^2 \tan x [\sin x(3+x) + \cos x(-3+x)] + \left( \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) x^3$$

$$= x^2 \frac{\sin^2 x}{\cos x} (3+x) + x^2(-3+x) \sin x + x^3 \frac{\sin x}{\cos^2 x} - x^3 \frac{1}{\cos x}$$

t)  $f'(x) = \frac{4(x+5)-4x}{(x+5)^2} = \frac{20}{(x+5)^2}$

u)  $f'(x) = \frac{(x+1)2-(2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$

v)  $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$$w) f'(x) = \frac{2ax(cx+d)-(ax^2+b)c}{(cx+d)^2} = \frac{2acx^2+2adx-acx^2-bc}{(cx+d)^2} = \frac{acx^2+2adx-bc}{(cx+d)^2}$$

$$x) f'(x) = \frac{(\ln x - \sin x + x^{-2})(e^x - \sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}}) - (e^x + \cos x + \sqrt{x})(\frac{1}{x} - \cos x - 2x^{-3})}{(\ln x - \sin x + x^{-2})^2}$$

$$\begin{aligned} y) f'(x) &= \frac{(cx + dx^{-1})(a - \frac{b}{x^2}) - (ax + bx^{-1})(c - \frac{d}{x^2})}{(cx + dx^{-1})^2} \\ &= \frac{acx + adx^{-1} - bcx^{-1} - bdx^{-3} - acx + adx^{-1} - bcx^{-1} + bdx^{-3}}{(cx + dx^{-1})^2} \\ &= \frac{2adx^{-1} - 2bcx^{-1}}{(cx + dx^{-1})^2} \\ &= \frac{2(ad - bc)}{x(cx + dx^{-1})^2} \end{aligned}$$

$$z) f'(x) = \frac{\sin x e^x - e^x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\alpha) f'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\beta) f'(x) = 3(3x^2 - 13)^2 \cdot 6x = 18x(3x^2 - 13)^2$$

$$\gamma) f'(x) = 2x + 4$$

$$\delta) f'(x) = \frac{1}{2}(6x^3 - 3x + 2)^{-\frac{1}{2}}(18x^2 - 3) = \frac{18x^2 - 3}{2\sqrt{6x^3 - 3x + 2}}$$

$$\varepsilon) f'(x) = e^{-\frac{x}{2}}(-x)$$

$$\zeta) f'(x) = -\sin(5x^4 - 3x^2 + 2)(20x^2 - 6x)$$

$$\eta) f'(x) = 4a(ax + b)^3$$

$$\theta) f'(x) = 3 \cos 3x$$

$$\iota) f'(x) = \sin(\omega x + \alpha) + x \cdot \omega \cdot \cos(\omega x + \alpha)$$

$$\kappa) f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\lambda) f'(x) = 2 \sin(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 6 \sin(3x) \cos(3x)$$

$$\mu) f'(x) = e^{1-x^2}(-2x) = -2xe^{1-x^2}$$

$\nu)$  siehe unten.

$$\xi) f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\omicron) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\ln x}{x^2}}} \frac{x^2 \frac{1}{x} - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1-2 \ln x}{2\sqrt{\ln x} \cdot x^2}$$

$\pi)$  siehe unten.

$$\rho) f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 6)^{-\frac{1}{3}}2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-6}}$$

$$\sigma) f'(x) = \ln(3x^2) + x \frac{1}{3x^2}6x = \ln(3x^2) + 2$$

$\tau)$  siehe unten.

$\upsilon)$  siehe unten.

$$\phi) f'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \sinh(x)$$

$$\chi) f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$$

$$\begin{aligned} \psi) f'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4 \cosh^2 x - 4 \sinh^2 x}{4 \cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \end{aligned}$$

$$\omega) f'(x) = \ln \left( \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} \right) := \ln(g(x))$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{\cdot}-x}{\sqrt{\cdot}+x} \cdot \frac{\sqrt{\cdot}+x}{\sqrt{\cdot}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt{\cdot}+x)^2} = \frac{1}{(\sqrt{\cdot}+x)^2} = \left( \sqrt{x^2+1}+x \right)^{-2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \sqrt{x^2+1}+x \right)^2 \cdot \left( -2 \frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)^3} \cdot \left( \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1 \right) \right) \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}+x} + \frac{-2x}{\sqrt{x^2+1} \cdot (\sqrt{x^2+1}+x)} \\ &= \frac{-2\sqrt{x^2+1}-2x}{\sqrt{x^2+1} \cdot (\sqrt{x^2+1}+x)} \\ &= \frac{-2(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1} \cdot (\sqrt{x^2+1}+x)} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu } \nu) f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left( \frac{1}{3}x^3 + x^{-1} \right) + \sqrt{x} \left( x^2 - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{x^3}{6\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \sqrt{x}x^2 - \frac{\sqrt{x}}{x^2} \\ &= \frac{x^3\sqrt{x}}{6x} + \frac{\sqrt{x}}{2x^2} + \sqrt{x}x^2 - \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \sqrt{x} \left( \frac{x^2}{6} + \frac{1}{2x^2} + x^2 - \frac{1}{x^2} \right) = \sqrt{x} \left( \frac{7}{6}x^2 - \frac{1}{2x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu } \pi) f(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} \quad u'(x) = -\cos(-x) + x^3 \cos(-x) - 3x^2 \sin(-x) \quad v'(x) = 2x \\ f'(x) &= \frac{(x^2+12)(-\cos(-x) + x^3 \cos(-x) - 3x^2 \sin(-x)) - \sin(-x)(1-x^3)2x}{(x^2+12)^2} \\ &= \frac{\cos(-x)(x^5+12x^3-x^2-12) + \sin(-x)(-x^4-36x^2-2x)}{(x^2+12)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu } \tau) f(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} \quad u'(x) = (12x^3 - 2x^2 + 8x) \cos(x^2) + (12x - 1) \sin(x^2) \quad v'(x) = e^{3x^2+2x} \cdot (6x + 2) \\ f'(x) &= \left( e^{3x^2+2x} \left( (12x^3 - 2x^2 + 8x) \cos(x^2) + (12x - 1) \sin(x^2) \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{3x^3+2x} (6x + 2) \left( (12x^3 - 2x^2 + 8x) \cos(x^2) + (12x - 1) \sin(x^2) \right) \right) (e^{6x^2+2x})^{-1} \\ &= \frac{(12x^3 - x^2 + 8x) \cos(x^2) + (-36x^3 - 6x^2 - 10x - 9) \cdot \sin(x^2)}{e^{3x^2+2x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu } \upsilon) f'(x) &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (2x^2 - a)^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} (2x^2 - a)^{-\frac{3}{4}} \cdot 4x = \frac{\sqrt[4]{2x^2 - a}}{2\sqrt{x}} + \frac{4x \cdot \sqrt{x}}{4\sqrt[4]{(2x^2 - a)^3}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{2x^2 - a}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{(2x^2 - a)^3}} \end{aligned}$$