Lösungen zum Übungsblatt 4

Aufgabe 1.

a) $x \cdot y = 3 * 9 + 1 * 3 + 2 * 6 = 27 + 3 + 12 = 42$

b) $x \cdot x = 3 * 3 + 1 * 1 + 2 * 2 = 14 = |x|^2$

c) $y \cdot z = 9 * 2 + 6 * 0 + 6 * (-3) = 0$

d) $x \times x = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 3*2-3*2 \\ 3*1-3*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, *bedeutet nur, dass kollineare Vektoren Vektorprodukt* 0 *haben.*

e) $x \times z = \begin{pmatrix} -3-0 \\ -4-3*(-3) \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

f) $y \times z = \begin{pmatrix} -9 \\ 12+27 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 39 \\ -6 \end{pmatrix}$

g) $\sphericalangle(x,y) = 0$, *da* $y = 3 \cdot x$

i) $\sphericalangle(y,z) = \cos^{-1}\left(\frac{y \cdot z}{|y||z|}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

h) $\sphericalangle(x,z) = \cos^{-1}\left(\frac{x \cdot z}{|y||z|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3y \cdot z}{|y||z|}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 2. $x \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + 2b \stackrel{!}{=} 2$, *daher ist die Lösung* $\begin{pmatrix} a \\ 1-\frac{a}{2} \end{pmatrix}$. *Im anderen Fall gilt:* $a + 2b + 3c \stackrel{!}{=} 2$ *also ist eine Parametrisierung der Lösung* $\begin{pmatrix} 2-2b+3c \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.

a) $z_1 + z_2 = 4 - 2i$

b) $z_1 \cdot z_2 = -32 - 17i$

c) $z_1 \cdot z_1 = -16 + 30i$

d) $\bar{z}_1 = 3 - 5i$

e) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = 9 + 24 = 34$

f) $|z_1| = z_1 \cdot \bar{z}_1 = 34$

g) $\Re(z_1) = 3$

h) $\Im(z_1) = 5$

i) $\left|e^{i\Re(z_1)}\right|^2 = 1$

j) $e^{i\frac{\pi}{2}} = 1$

Aufgabe 4.

a) Wohldefiniertheit von „+“: Seien $f,g \in V$: Die Komposition von stetigen Funktionen ist stetig und „+“ ist stetig, also ist $f + g \in V$ klar.

Assoziativität von „+“: Seien $f,g,h \in V$:

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) = ((f + g) + h)\,(x)$$

- *Neutrales Element für „+“: $0 : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ ist klar stetig, also $\in V$ und $\forall f \in V : 0 + f = f$*
- *Inverses Element für „+“: Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R} \in V$, dann ist klar, dass $-f : [0,1] \to \mathbb{R} \in V$ und klar $f + (-f) = 0$*
- *Kommutativität von „+“: Sei $f,g \in V$ dann ist $f(x) + g(x) = g(x) + f(x) \quad \forall x \in [0,1]$, also $f + g = g + f$*
- *Wohldefiniertheit von „$\cdot$“ folgt wieder aus Stetigkeit der Skalarmultiplikation und Komp. st. Fktn.*
- *Assozitativität von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, v \in V$: $(\alpha \cdot (\beta \cdot v)) = \alpha(\beta v(x)) = (\alpha * \beta)v(x) = (\alpha * \beta \cdot v)(x)$*
- *Distributivität: $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, f,g \in V$*

$$(\alpha \cdot (f + g)) = (\alpha \cdot f)(x) + (\alpha \cdot g)(x) \quad (\alpha + \beta) \cdot f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$$

- *Existenz des Einselements für „$\cdot$“: $1 \in \mathbb{R}$ und $\forall f \in V : (1 \cdot f)(x) = l \cdot f(x) = f(x)$*

Also wissen wir das V einen Vektorraum bildet.

b) Linearität folgt aus der Linearität des Integral, Symmetrie ist offensichtlich. Das Skalarprodukt ist ≥ 0 überall aber die andere Bedingung der Positivität gilt natürlich nicht.