LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

FAKULTÄT FÜR PHYSIK
R: RECHENMETHODEN FÜR PHYSIKER, WISE 2015/16
DOZENT: JAN VON DELFT
ÜBUNGEN: BENEDIKT BRUOGNOLO, DENNIS SCHIMMEL, FRAUKE SCHWARZ, LUKAS WEIDINGER

http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/15r/

Repetitorium A: Matrizen, Reihenentwicklungen

Mi 30.03, Do 31.03, Fr 01.04, Mo 04.04, Di 05.04.2016
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Beispielaufgaben: {T}: wird im Tutorien besprochen; {S}: Selbststudium.

Repetitoriumsaufgabe 1: Lösung von linearen Gleichungssystemen durch Matrixinversion und Gauss-Verfahren [2]

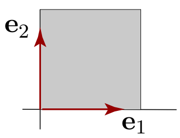
Formulieren Sie das folgende Gleichungssystem in Matrixschreibweise und lösen Sie es einmal durch Matrixinversion und anschließend mit dem Gauss-Verfahren!

$$x - z = 2 \tag{1}$$
$$-3x + y + z = 4 \tag{2}$$
$$2y + z = 1 \tag{3}$$

Repetitoriumsaufgabe 2: Aufstellen und Wirkung von Matrizen [2]

Betrachten Sie die folgenden zwei Basistransformationen in $\mathbb{R}^2$, mit Standardbasis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.
A : Rotation um den Winkel $45°$ gegen den Uhrzeigersinn.
B : Streckung der 1-Achse um den Faktor $s_1 = 2$ und Streckung der 2-Achse um den Faktor $s_2 = \frac{1}{2}$.

(a) Stellen Sie die Veränderungen der rechts abgebildeten Figur durch Anwendung von A, BA, B und AB auf die Basisvektoren grafisch dar. Zeichnen Sie auch die Basisvektoren ein.



(b) Finden Sie die Matrixdarstellung (bezüglich der Standardbasis) von A und B.

(c) Überlegen sie sich anhand der Graphiken aus (a), ob $AB = BA$ gelten kann und überprüfen sie ihre Vermutung explizit, indem sie AB und BA berechnen.

Repetitoriumsaufgabe 3: Basistransformation [2]

Gegeben sei eine alte Basis $\{\mathbf{v}_i\}$ des $\mathbb{R}^2$ und eine neue $\{\mathbf{v}'_i\}$. Die alte Basis lässt sich folgendermaßen durch die neue Ausdrücken:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{3}{4}\mathbf{v}'_1 + \frac{1}{3}\mathbf{v}'_2, \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{8}\mathbf{v}'_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}'_2$$

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T, die die alte Basis auf die neue abbildet. Transformieren Sie anschliesend den Koordinatenvektor $\mathbf{x} = (1, 2)^T$ in die neue Basis.

(b) Wählen Sie nun für die alte Basis $\mathbf{v}_1 = (3,1)^T$ und $\mathbf{v}_2 = (-1/2, 3/2)^T$ und berechnen Sie $\mathbf{v}'_1$ und $\mathbf{v}'_2$ explizit. Machen Sie nun eine Skizze, die die alten und neuen Basisvektoren enthält, sowie den Vektor $\mathbf{x}$. Sind die in (a) diskutierten Koordinaten dieses Vektors bezueglich beider Basen mit ihrer Skizze konsistent?

(c) Überlegen Sie sich, wie der Vektor $\mathbf{y}' = (\frac{3}{4}, \frac{1}{3})^T$ (dargestellt in der neuen Basis) in der alten Basis aussieht. Betrachten sie dazu die zwei Gleichungen, die die beiden Basen verknüpfen. Überprüfen sie ihre Vermutung, indem sie die Transformationsmatrix von der neuen in die alte Basis bestimmen und wenden sie diese auf $\mathbf{y}'$ an.

Repetitoriumsaufgabe 4: Lineare Abbildungen [2]

(a) *(3 Punkte)* Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen (bezüglich der Standardbasis) von folgenden linearen Abbildungen in drei Dimensionen

(i) A: Rotation um die z-Achse um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn.

(ii) B: Streckung um einen Faktor 3 in z-Richtung.

Auf welchen Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$ wird der Punkt $\mathbf{x} = (2,1,3)^T$ durch die Abbildung A abgebildet?
Ist die Matrix der Abbildung AB orthogonal? (Begünden Sie Ihre Antwort!)

(b) *(2 Punkte)* Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Durch die lineare Abbildung C werden diese Vektoren auf die Vektoren

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \tilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \tilde{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

abgebildet.

(i) Drücken Sie die Vektoren der Standardbasis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, und $\mathbf{e}_3$ durch Linearkombinationen von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ aus. Auf welche Vektoren wird die Standardbasis durch die lineare Abbildung C abgebildet?

(ii) Wie lautet die Matrixdarstellung der Abbildung C bezüglich der Standardbasis?

Repetitoriumsaufgabe 5: Lineare Abbildung und Basistransformation in $\mathbb{R}^3$ [5]
Punkte: (a)[1]; (b)[0.5]; (c)[1]; (d)[1.5]; (e)[1]

Gegeben sei folgende Basis des $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$.

(a) Wie lautet die Matrixdarstellung $(t^i_{\ j})$ der Transformation T von Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ zu der Standardbasis, definiert durch $\mathbf{v}_j = \mathbf{e}_i \, t^i_{\ j}$? Bestimmen Sie auch die Matrixdarstellung der inversen Transformation, T^{-1}.

(b) Wie lauten die Komponenten $\tilde{x}^i$ des Vektors $\mathbf{x} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, definiert durch $\mathbf{x} = \mathbf{v}_i \tilde{x}^i$?

(c) R sei eine Rotation um $\pi/4$ im mathematisch positiven Drehsinn um die $\mathbf{e}_2$-Achse. Wie lautet ihre Matrixdarstellung $(r^i_{\ j})$ bezüglich der Standardbasis, definiert durch $\mathbf{e}_j \overset{R}{\mapsto} \mathbf{e}_i\, r^i_{\ j}$?

(d) Wie lautet die Matrixdarstellung $(\tilde{r}^i_{\ j})$ dieser Rotation bezüglich der Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, definiert durch $\mathbf{v}_j \overset{R}{\mapsto} \mathbf{v}_i\, \tilde{r}^i_{\ j}$?

(e) $\mathbf{x}'$ sei das Bild von $\mathbf{x}$ unter dieser Rotation, $\mathbf{x} \overset{R}{\mapsto} \mathbf{x}'$. Wie lauten dessen Komponenten $\tilde{x}'^j$ in der Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, definiert durch $\mathbf{x}' = \mathbf{v}_j \tilde{x}'^j$?

Repetitoriumsaufgabe 6: Eigenwerte von Matrizen(I) [2]

Berechnen Sie zu den folgenden Matrizen jeweils die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 \\ -4 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$

(c) $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hinweis: In einigen Fällen erhält man bei der Berechnung des charakteristischen Polynoms dieses in bereits faktorisierter Form, die nicht mehr ausmultipliziert werden muss. Die Rechnung vereinfacht sich damit erheblich.

Repetitoriumsaufgabe 7: Diagonalisierung einer hermiteschen 3×3 Matrix [2]

Gegeben sei die hermitesche Matrix A. Im Folgenden soll diese diagonalisiert werden.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2i \\ 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
Hinweis: Wenden Sie bei der Berechnung der Determinanten nicht die Regel von Sarrus an, sondern nützen Sie die Nullen geschickt aus!

(b) Konstruieren Sie mit den Ergebnissen aus (a) eine diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation S für A, sowie deren Inverse, S^{-1}.
Hinweis: Falls die Eigenvektoren ein Orthonormalsytem bilden, gilt $S^{-1} = S^\dagger$.)

(c) Überprüfen Sie durch explizites Ausmultiplizieren, dass die in (b) konstruierte Ähnlichkeittransformation S die Matrix A wirklich diagonalisiert.

Repetitoriumsaufgabe 8: Taylor-Entwicklungen [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M). [T]

Taylor-entwickeln Sie folgende Funktionen. Dabei können Sie wählen, ob Sie die entsprechenden Ableitungen berechnen um die Koeffizienten der Taylorreihe zu bestimmen, oder ob Sie die bekannten Entwicklungen von $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\frac{1}{1-x}$ und $\ln(1+x)$ einsetzen.

(a) $f(x) = \frac{1}{1-\sin(x)}$ um $x = 0$, bis einschließlich 4. Ordnung.

(b) $g(x) = \sin(\ln(x))$ um $x = 1$, bis einschließlich 2. Ordnung.

(c) $h(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$ um $x = 0$, bis einschließlich 2. Ordnung.

Kontrollergebnisse: der Term höchster erbetener Ordnung ist: (a) $\frac{2}{3}x^4$, (b) $-\frac{1}{2}(x-1)^2$, (c) $-\mathrm{e}\frac{1}{2}x^2$.

Repetitoriumsaufgabe 9: Taylor-Entwicklungen (Selbststudium) [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M)

Taylor-entwickeln Sie folgende Funktionen. Dabei können Sie wählen, ob Sie die entsprechenden Ableitungen berechnen um die Koeffizienten der Taylorreihe zu bestimmen, oder ob Sie die bekannten Entwicklungen von $\cos(x)$, $\frac{1}{1-x}$, e^x und $\ln(1+x)$ einsetzen.

(a) $f(x) = \frac{\cos(x)}{1-x}$ um $x = 0$ bis einschließlich dritter Ordnung.

(b) $g(x) = \mathrm{e}^{\cos(x^2+x)}$ um $x = 0$ bis einschließlich dritter Ordnung.

(c) $h(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(x)$ um $x = 1$ bis einschließlich dritter Ordnung.

[Kontrollergebnisse: der Term höchster erbetener Ordnung ist jeweils: (a) $\frac{1}{2}x^3$, (b) $-\mathrm{e}\,x^3$, (c) $\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-1}(x-1)^3$.]

Repetitoriumsaufgabe 10: Taylor-Entwicklung in 2 Dimensionen [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M). [S]

Geben Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion $g(x, y) = \mathrm{e}^x\cos(x+2y)$ in x und y um den Punkt $(x, y) = (0, 0)$ an. Berechnen Sie explizit alle Terme bis einschließlich zweiter Ordnung,

(a) durch Ausmultiplizieren der Reihenentwicklungen der Exponential- und Cosinus-Funktionen;

(b) mittels der Formel für die Taylor-Reihe einer Funktion von zwei Variablen.

[Kontrollergebnisse: der gemischte Term zweiter Ordnung ist jeweils: (a) $-2xy$, (b) $-2xy$.]

Repetitoriumsaufgabe 11: Iteratives Lösen einer Differentialgleichung für $\dot{x}$ [2]

[5] Lösen Sie folgende Differentialgleichung für die Funktion $x(t)$ iterativ mittels einer Reihenentwicklung für kleine t, bis einschließlich der 2.Ordnung:

$$\dot{x} - \cos t = \frac{\ln x}{2x} \quad , \qquad x(0) = 1 \ .$$

Repetitoriumsaufgabe 12: Iteratives Lösen einer Differenzialgleichung mittels Reihenentwicklung [2]

Lösen Sie folgende Differentialgleichung iterativ mittels Reihenentwicklung für kleine t bis einschließlich der 2.Ordnung:

$$x'(t) + \sin t = e^{ax(t)}, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad x(0) = 1$$

Repetitoriumsaufgabe 13: Taylorentwicklung der Umkehrfunktion [2]

Diese Aufgabe behandelt die Taylorentwicklungen von Umkehrfunktionen.
Der Entwicklungspunkt der Taylorreihe liegt in dieser Aufgabe immer bei $x = 0$.
Sie dürfen die bekannten Entwicklungen von e^x, $\ln(1 + x)$ und $\sin(x)$ verwenden.

(a) $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion zu e^x.
Insbesondere bedeutet dies, dass folgende Gleichung gilt:

$$e^{\ln(1+x)} = 1 + x \tag{4}$$

Verifizieren Sie diese Gleichung bis zur 2. Ordnung (einschließlich) in x durch Entwicklung der linken Seite in eine Taylorreihe.

(b) Entwickeln Sie $\arcsin(x)$ bis zur 3. Ordnung einschließlich!

Hinweis: Machen Sie den Ansatz $\arcsin(\sin(x)) = x$. Setzen Sie die Entwicklung von $\sin(x)$ ein und machen Sie den Ansatz $\arcsin(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f(x))^n$.
Bestimmen Sie schließlich a_0 bis a_3 !

[Gesamtpunktzahl Repetitoriumsaufgaben: 31]
