Repetitorium B: 1-, 2-dim. Integrale, Satz v. Stokes

Mi 30.03, Do 31.03, Fr 01.04, Mo 04.04, Di 05.04.2016
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Beispielaufgaben: {T}: wird im Tutorien besprochen; {S}: Selbststudium.

Repetitoriumsaufgabe 1: Kurvenintegral entlang Kreisweg [2]

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + z \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

sowie die Raumkurve

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \frac{\pi}{2}] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \mathbf{r}(t) = (R\cos(t), R\sin(t), R^2) \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$.

(b) Konstruieren Sie ein Potential ϕ zu $\mathbf{u}$ (also $\nabla\phi = \mathbf{u}$) und überprüfen Sie damit das Ergebnis aus Teilaufgabe (a).

Hinweis: Sie dürfen das Integral $\int \cos x \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3 x$ verwenden.

Repetitoriumsaufgabe 2: Kurvenintegrale im elektrischen Feld einer Punktladung [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

Gegeben sei das Coulomb-Potential einer Punktladung Q:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{3}$$

Hierbei ist r der Betrag des Ortsvektors $\mathbf{r}$ ($r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

(a) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

(b) Berechnen Sie die Arbeit, die vom elektrischen Feld verrichtet wird, wenn eine Ladung q vom Punkt $(2, 0, 0)$ zum Punkt $(1, 0, 0)$ verschoben wird.

Hinweis: Durch Verwendung geeigneter Koordinaten lässt sich viel Arbeit sparen.

Repetitoriumsaufgabe 3: Kurvenintegrale entlang Geraden und Parabel (Selbststudium) [2]

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} zx \\ x^2 \\ y \end{pmatrix} \tag{4}$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, wobei

(a) C die Verbindungsstrecke von (0,0,1) und (2,4,1) ist.

(b) C von (0,0,1) bis (2,4,1) geht und einem Parabelbogen folgt, der durch den Punkt (1,1,1) geht.

(c) Ist das Vektorfeld $\mathbf{u}$ konservativ?

Hinweis: Überlegen Sie sich jeweils zunächst eine geeignete Parametrisierung der Kurve.

Repetitoriumsaufgabe 4: Kurvenintegral entlang Spiralweg (Selbststudium) [2]

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ z \end{pmatrix} \tag{5}$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, wobei folgender Integrationsweg verwendet werden soll:

$$\mathbf{r}(t) = \ln(1+t) \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1] \tag{6}$$

Repetitoriumsaufgabe 5: Flächenintegrale: Kugel und Kegel [2]

(a) Berechnen Sie die Oberfläche einer Kugel mit Radius r.

(b) Welchen Radius muss ein Kegel haben, damit seine Mantelfläche genauso grosz wie die Kugeloberfläche aus Teilaufgabe (a) ist? Die Höhe des Kegels soll gleich seinem Durchmesser sein.

Repetitoriumsaufgabe 6: Satz von Stokes – Halbkugel (Kugelkoordinaten) [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M)

Betrachten Sie folgendes Vektorfeld in Kugelkoordinaten:

$$\mathbf{A} = A_\phi \mathbf{e}_\phi \,, \qquad \text{mit} \qquad A_\phi = \gamma \frac{\sin\theta}{r^3} \,.$$

(a) Berechnen Sie explizit den Fluss $\Phi = \int_H \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ von $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$ durch die Halbkugel $H = \{\mathbf{r} | x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0\}$. (Die Orientierung der Fläche sei durch die Vorgabe festgelegt, dass der Normalvektor für jedes Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{S}$ "nach oben" zeige, d.h. eine positive z-Komponente habe.)

(b) Verwenden Sie den Satz von Stokes, um den Fluss Φ durch ein Linienintegral auszudrücken, und berechnen Sie dieses ebenfalls explizit.

Repetitoriumsaufgabe 7: Satz von Stokes – Kugelsegment (Kugelkoordinaten) [2]

Betrachten Sie folgendes Vektorfeld in Kugelkoordinaten: $\mathbf{A} = \frac{1}{r} \sin^2(\theta)\, \mathbf{e}_\phi$.

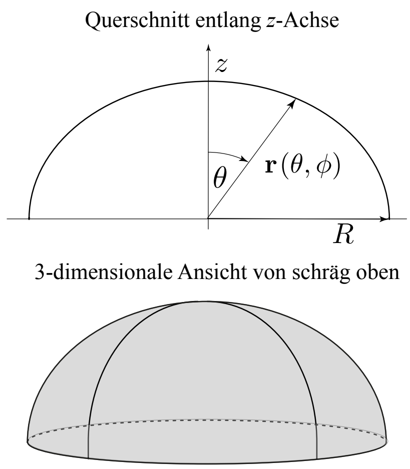
(a) [3] Berechnen Sie explizit den Fluss $\Phi = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ von $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ durch die Fläche $S = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > \frac{R}{2}\}$. (Die Orientierung der Fläche sei durch die Vorgabe festgelegt, dass der Normalvektor für jedes Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{S}$ nach oben zeige, d.h. eine positive z-Komponente habe.)

Hinweis: Für ein Vektorfeld in Kugelkoordinaten, $\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = A_r\, \mathbf{e}_r + A_\theta\, \mathbf{e}_\theta + A_\phi\, \mathbf{e}_\phi$ berechnet sich die Rotation wie folgt:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{[\partial_\theta (A_\phi \sin(\theta)) - \partial_\phi A_\theta]}{r \sin(\theta)} \mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial_\phi A_r}{r \sin(\theta)} - \frac{1}{r}\partial_r (r A_\phi)\right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r\right] \mathbf{e}_\phi$$

(b) [2] Verwenden Sie den Satz von Stokes um den Fluss durch ein Linienintegral auszudrücken, und berechnen Sie dieses ebenfalls explizit.

Repetitoriumsaufgabe 8: Satz von Stokes – umgestülpte Schüssel (Kugelkoordinaten) [2]



Gegeben ist eine Fläche S mit der Form einer umgestülpten Schüssel (siehe Skizze), in Kugelkoordinaten definiert über

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = R\, a(\theta)\, \mathbf{e}_r$$

mit $$a(\theta) = \left(1 - \frac{1}{4}\cos\theta\right), \ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \ \phi \in [0, 2\pi[\,,$$

und ein Vektorfeld $\mathbf{V}(r, \theta, \phi) = \sin\phi\, \mathbf{e}_r$.

(a) *(1 Punkt)* Berechnen Sie $\nabla \times \mathbf{V}(r, \theta, \phi)$.
Hinweis: Die Rotation eines Vektorfeldes $A = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\phi \mathbf{e}_\phi$ ist gegeben über

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \left[\frac{1}{r \sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta A_\phi) - \partial_\phi A_\theta\right] + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi A_r - \partial_r (r A_\phi)\right] + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r}\left[\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r\right].$$

(b) *(2,5 Punkte)* Berechnen Sie das Flächenintegral $\Phi = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\nabla \times V)$ explizit. Hierfür dürfen Sie verwenden, dass das Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{S}$ der Fläche S gegeben ist über

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = R^2 \left(a^2(\theta) \sin\theta \mathbf{e}_r - \frac{1}{4} a(\theta) \sin^2\theta \, \mathbf{e}_\theta \right) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \tag{7}$$

(c) *(1,5 Punkt)* Berechnen Sie das Flächenintegral $\Phi = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\nabla \times V)$, indem Sie es mit Hilfe des Satz von Stokes in ein Wegintegral über den Rand der Fläche umschreiben und dieses explizit berechnen.
Hinweis 1: Der Rand der Fläche ist ein Kreis mit Radius R in der xy-Ebene und kann daher parametrisiert werden über $\mathbf{r}(\phi) = R\mathbf{e}_r \,,\ \theta = \frac{\pi}{2}$ und $\phi \in [0, 2\pi]$.
Hinweis 2: Es gilt: $\partial_\phi \mathbf{e}_r = \sin\theta \, \mathbf{e}_\phi$

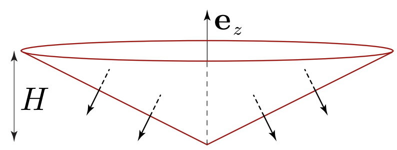
Bonus:

(d) *(1 Bonus-Punkt)* Berechnen Sie das Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{S}$ explizit, beweisen Sie also die Angabe in Gleichung (7).
Hinweis: Sie dürfen folgende Relationen verwenden:
$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi$ und zyklisch permutiert.
$\partial_\theta \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \,,\ \partial_\phi \mathbf{e}_r = \sin\theta \, \mathbf{e}_\phi \,,$

Repetitoriumsaufgabe 9: Satz von Stokes in Zylinderkoordinaten – Kegelstumpf [5]
Punkte: (a)[1]; (b)[2]; (c)[2]

(a) Berechnen Sie die Rotation $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$ des Vektorfelds $\mathbf{v} = \rho^2 z \, \mathbf{e}_\phi + \rho \, \mathbf{e}_z$ in Zylinderkoordinaten.
Hinweis: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_\rho \left[\frac{1}{\rho} \partial_\phi v_z - \partial_z v_\phi \right] + \mathbf{e}_\phi \left[\partial_z v_\rho - \partial_\rho v_z \right] + \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \left[\partial_\rho (\rho v_\phi) - \partial_\phi v_\rho \right].$

$K = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le z \le H, \sqrt{x^2 + y^2} \le 2z\}$ sei ein auf der z-Achse zentrierten Kegel. Berechnen Sie den von innen/oben nach außen/unten (siehe Pfeile in Skizze) gerichteten Fluss $\Phi_M = \int_M \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v})$ durch den Mantel M (die schrägstehende Fläche) des Kegels auf zwei verschiedene Weisen:



(b) Direkt, mittels Zylinderkoordinaten.

(c) Drücken Sie Φ_M mittels dem Satz von Stokes durch ein Linienintegral von $\mathbf{v}$ über den Rand ∂M des Mantels aus, und berechnen Sie letzteres.

Repetitoriumsaufgabe 10: Satz von Stokes – Kegelmantel (Selbstudium) [2]

(a) Berechnen Sie die Rotation $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$ des Vektorfelds $\mathbf{u} = (z, x - z, y - x)^T$.

(b) Berechnen Sie das Flußintegral $\Phi_M = \int_M \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u})$ über den Kegelmantel $M = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4z^2, 0 \le z \le 1\}$ durch explizite Integration über die Fläche.

(c) Berechnen Sie nun das Flussintegral Φ_M, indem Sie es mit dem Satz von Stokes in ein Kurvenintegral überführen und Letzteres berechnen.

Repetitoriumsaufgabe 11: Satz von Stokes – Viertelkugel (Selbstudium) [2]

(a) Berechnen Sie die Rotation $\nabla \times \mathbf{u}$ des Vektorfelds $\mathbf{u} = (xz, yx, zy)^T$.

(b) Berechnen Sie das Flussintegral $\Phi_K = \int_K \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$ über die Fläche der Viertelkugel $K = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0, z \geq 0\}$, durch explizite Integration über die Fläche.

(c) Berechnen Sie nun das FLussintegral Φ_K, indem Sie es mit dem Satz von Stokes in ein Kurvenintegral überführen und Letzteres berechnen.

Repetitoriumsaufgabe 12: Satz von Stokes – elliptischer Kegel (Selbstudium) [2]

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{B} = (xz, yz, -z^2)^T$, sowie die Fläche $K = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + z = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$, welche die Form eines elliptischen Kegels hat.

(a) Berechnen Sie das Flussintegral $\Phi_K = \int\limits_K \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$.

(b) Versuchen Sie zu $\mathbf{B}$ ein Vektorpotential zu finden (also ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ mit $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$) und benutzen Sie den Satz von Stokes, um das Ergebnis aus (a) zu überprüfen.

[Gesamtpunktzahl Repetitoriumsaufgaben: 27]
