Repetitorium D: Fourier, delta-Funktion, Green'sche Funktionen

Mi 30.03, Do 31.03, Fr 01.04, Mo 04.04, Di 05.04.2016
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Beispielaufgaben: {T}: wird im Tutorien besprochen; {S}: Selbststudium.

Repetitoriumsaufgabe 1: Fourier-Reihe [2]

Gegeben ist die Funktion $f : I \to \mathbb{R},\ x \to f(x) = |x|$ wobei $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(a) *(1 Punkt)* Skizzieren Sie die Funktion.

(b) *(4 Punkte)* Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion $f(x)$, d. h. finden Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_k$ in der Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tilde{f}_k \,,$$

wobei L die Länge des Intervalls ist, auf dem $f(x)$ definiert ist, und $k = \frac{2\pi n}{L}$, mit $n \in \mathbb{Z}$.

Repetitoriumsaufgabe 2: Fourier-Reihen [2]

Gegeben ist eine periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{falls} \quad -\pi \le x < 0, \\ 5x, & \text{falls} \qquad 0 \le x < \pi, \end{cases} \qquad \text{und } f(x + 2\pi) = f(x).$$

(a) [1] Skizzieren Sie die Funktionen. Zeichnen Sie explizit die Werte von $f(0)$ und $f(2\pi)$ ein.

(b) [4] Bestimmen Sie die Fourier-Reihe für die periodische Funktion, d. h. berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_n$ in der Darstellung $f(x) = \frac{1}{L} \sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x} \tilde{f}_n$. Wie sind k_n und L jeweils zu wählen?

Repetitoriumsaufgabe 3: Fourier-Reihen [5]
Punkte: (a)[1]; (b)[4]

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} (\sin x + |\sin x|)$.
Finden Sie ihre Fourier-Reihe in der Darstellung $f(x) = \frac{1}{L} \sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x} \tilde{f}_n$.

(a) Wie sind k_n und L zu wählen?

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe, d. h. berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_n$.
Hinweis: Falls das Ergebnis für $\tilde{f}_n$ einen Nenner enthält, der für gewisse n-Werte gleich Null werden kann, müssen die entsprechenden Fourier-Koeffizienten separat berechnet werden!

Repetitoriumsaufgabe 4: Fourier-Reihe [2]

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch, $f(t) = f(t + 2\tau)$, mit $f(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}$ für $t \in [0, 2\tau)$.

(a) [1] Skizzieren Sie die Funktion. Zeichnen Sie explizit die Werte von $f(0)$ und $f(2\tau)$ ein.

(b) [3] Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion $f(t)$, d. h. finden Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_\omega$ in der Darstellung $f(t) = \frac{1}{T}\sum_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\tilde{f}_\omega$, wobei T die Periode der Funktion ist. Über welche diskreten ω-Werte wird hier summiert? Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich, unter Verwendung der Beziehung zwischen den ω-Werten und T.

(c) [1] Wie lauten die Fourier-Koeffizienten $\tilde{g}_\omega$ von $g(t) = (f * f)(t) = \int_0^{2\tau} \mathrm{d}\tilde{t}\; f(t-\tilde{t})f(\tilde{t})$, der Faltung von f mit sich selbst?

Repetitoriumsaufgabe 5: δ-Funktion 1 [2]

Die δ-Funktion hat die folgenden definierenden Eigenschaften:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty : & x = x_0 \\ 0 : & x \neq x_0 \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1 \,. \tag{1}$$

Daraus folgt für x_0, x_1 und $x_2 \in \mathbb{R}$, und eine beliebige, bei x_0 stetige reelle Funktion $f(x)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta(x - x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls} \quad x_1 < x_0 < x_2 \,, \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

(a) Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 : & |x| > \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2} : & |x| < \frac{1}{n}, \end{cases}$$

wobei n eine natürliche Zahl ist. Skizzieren Sie $g_n(x)$, und zeigen Sie durch Überprüfung der Eigenschaften (1), dass sie für $n \to \infty$ einer δ-Funktion entspricht.

(b) Betrachten Sie folgende Funktion (a ist eine positive Konstante):

$$f_a(x) = \frac{1}{4a\, \cosh^2[x/(2a)]} \,, \qquad \cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2 \,.$$

Skizzieren Sie $f_a(x)$, und zeigen Sie durch Überprüfung der Eigenschaften (1), dass sie im Limes $a \to 0$ einer δ-Funktion entspricht.
Hinweis: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\cosh^2 x} = 2.$

(c) Berechnen Sie explizit folgendes Integral:

$$\int_0^2 dx \delta(x-1)\sqrt{\sin(\pi x/2)\, e^{-x+1}}$$

(d) In 2 Dimensionen ist die Wirkung der δ-Funktion analog definiert. Insbesondere gilt für zweidimensionale Integrale:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy\, f(x,y)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = \begin{cases} f(x_0,y_0)\,, & \text{falls} \quad x_1 < x_0 < x_2\,, \quad y_1 < y_0 < y_2\,, \\ 0 \quad \text{ansonsten} \end{cases}$$

Berechnen Sie damit folgendes Integral:

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, (y+x)^2 e^{3x-y} \delta(x)\delta(y-3).$$

Repetitoriumsaufgabe 6: Fourier-Transformation [2]

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt \tag{2}$$

der Funktion $f(t) = \sin(\omega_o t) e^{-\Omega|t|}$. Dabei sind ω_0 und Ω positive reelle Konstanten.

Hinweis: Teilen Sie die Integration in die Bereiche $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$ auf.

Repetitoriumsaufgabe 7: Green'sche Funktion von $(\mathrm{d}_t + a)$ [2]

$D(\mathrm{d}_t) = (\mathrm{d}_t + a)$ sei ein Differentialoperator erster Ordnung, und a eine positive, reelle Konstante. Die entsprechende Green'sche Funktion ist definiert durch die Differentialgleichung:

$$D(\mathrm{d}_t) G(t) = \delta(t)\,. \tag{3}$$

Bestimmen Sie $G(t)$ wie folgt:

(a) [2] Finden Sie zunächst die Lösung $x_\mathrm{h}(t)$ der homogenen Version der Differentialgleichung, mit Anfangsbedingung $x_\mathrm{h}(0) = 1$.

(b) [2] Finden Sie nun die partikuläre Lösung von Gl. (3), also $G(t)$, mittels Variation der Konstanten.

(c) [1] Überprüfen Sie durch explizites Einsetzen, dass Ihr Ergebnis für $G(t)$ aus (b) die Differentialgleichung (3) erfüllt.

Repetitoriumsaufgabe 8: Green'sche Funktion [5]

Punkte: (a)[1]; (b)[2]; (c)[1]; (d)[1]; (e)[1](Bonus)

Die Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$, erfülle folgende lineare Differentialgleichung:

$$D(\mathrm{d}_t) x(t) = f(t), \quad \text{mit} \quad D(\mathrm{d}_t) = (\mathrm{d}_t + m)\,, \quad 0 < m \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung $x_h(t)$ der homogenen Differentialgleichung (4) (mit $f = 0$).

(b) Bestimmen Sie die Green'sche Funktion $G(t)$, definiert durch $D(d_t)G(t) = \delta(t)$.
Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz, $G(t) = \theta(t) x_h(t)$, mit einer geeigneten Wahl der Anfangsbedingung für $x_h(t)$.

(c) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{\mathcal{G}}(\omega)$ der Green'schen Funktion.

(d) Finden Sie mittels der Green'schen Funktion eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ der Differentialgleichung mit Antrieb $f(t) = \sin t$. Wie lautet die allgemeine Lösung zu diesem Antrieb?

(e) (Bonus) Sei $x(t)$ die Lösung der Differentialgleichung (4) mit dem Antrieb $f(t) = \sin t$ und der Anfangsbedingung $x(0) = \frac{-1}{m^2+1}$. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{x}(\omega)$ dieser Lösung $x(t)$.

Repetitoriumsaufgabe 9: Green'sche Funktion: überdämpfter harmonischer Oszillator [2]

Betrachten Sie den inhomogenen überdämpften harmonischen Oszillator für $\gamma = 5$ und $\Omega = 4$,

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 16x = f_A(t),$$

mit exponentiell abfallenden Antrieb $f_A(t) = \theta(t)e^{-2t}$.

(a) *(5 Punkte)* Finden Sie eine partikuläre Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung für $t \geq 0$, mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$.

Hinweis: Empfohlener Lösungsweg: Falten Sie die Greenschen Funktion dieser Differentialgleichung, nämlich

$$G(t) = \theta(t)(e^{-2t} - e^{-8t})/6,$$

mit der Inhomogenität!

Bonus:

(b) *(1 Bonus-Punkt)* Finden Sie die Fouriertransformierte $\tilde{G}(\omega)$.

Repetitoriumsaufgabe 10: Green'sche Funktion [2]

(a) *(2 Punkte)* Finden Sie explizit die Lösung der homogenen Differentialgleichung,

$$\ddot{x} + 2\dot{x} = 0,$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.
Hinweis 1: Am schnellsten findet man die Lösung mit einem Exponentialansatz.

(b) *(3 Punkte)* Die Greensche Funktion ist hier definiert durch die Differentialgleichung

$$(\mathrm{d}_t^2 + 2\mathrm{d}_t)G(t) = \delta(t).$$

Zeigen Sie, dass $G(t) = \theta(t)x(t)$ mit $x(t) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2t})$ diese definierende Gleichung erfüllt.

[Gesamtpunktzahl Repetitoriumsaufgaben: 26]
