LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Physik
R: Rechenmethoden für Physiker, WiSe 2015/16
Dozent: Jan von Delft
Übungen: Benedikt Bruognolo, Dennis Schimmel, Frauke Schwarz, Lukas Weidinger

http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/15r/

Repetitorium E: Differentialgleichungen

Mi 30.03, Do 31.03, Fr 01.04, Mo 04.04, Di 05.04.2016
(b)[2](E/M/A) means: problem (b) counts 2 points and is easy/medium hard/advanced
Example problems: {T}: will be discussed in tutorial; {S}: self study.

Repetitoriumsaufgabe 1: Differentialgleichungen, Trennung der Variablen [5]

Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

$$\dot{x} + \frac{2}{1+t}x = \frac{2t}{1+t} , \quad \text{mit} \quad x(0) = 1 . \tag{1}$$

(a) [2] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

(b) [2] Finden Sie dann durch Variation der Konstanten eine spezielle (partikuläre) Lösung des inhomogenen Problems.

(c) [1] Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung (1)?

Repetitoriumsaufgabe 2: Differentialgleichungen, verschiedene Lösungsstrategien [2]

Lösen sie die folgenden Differentialgleichungen mit der passenden Methode.

(a) $xy'(x) = y(x) + x^2$ mit $y(1) = 0$

(b) $y'(x) = \mathrm{e}^{y(x)} \sin(x)$ mit $y(0) = 0$

(c) $y'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-y(x)^2}}{y(x)\cdot(x+5)}$

(d) $y'(x) = \sin(x)y(x) + \sin(x)$ mit $y(0) = 0$

(e) (***) $y''(x) + y(x) = x^3$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$.

Repetitoriumsaufgabe 3: Klassifikation von Differentialgleichungen und ihre Lösungen [2]

Kreuzen Sie den entsprechenden Differentialgleichungstyp an und die Methode, mit der Sie zunächst eine Lösung suchen würden. Hier ist

	DGL-Typ	Lösungsmethode
A	Lineare DGL	Exponentialansatz
B	Linear mit Inhomogenität	Matrixdiagonalisierung
C	Separable DGL	Separation
D		Variation der Koeffizienten

(a) $y^{(4)}(x) = 2y'''(x) - 5y''(x)$

(b) $y'(x) = e^{y(x)} \sin(x)$

(c) $x(t) - 2y(t) = \dot{x}(t), \quad -2x(t) + z(t) = \dot{y}(t), \quad -2y(t) + z(t) = \dot{z}(t)$

(d) $\dot{x}(t) = 2t(1 + x(t)^2)$

(e) $y''(x) + y(x) = x^3$

(f) $my''(x) = -mg - \alpha y'(x)$

(g) $y''(x) + ky'(x) + \frac{g}{l} y(x) = 0$

(h) $y'(t) = y(t)^4 - y(t)^2$

(i) $y'(x) = ay(x) - by(x)^3$

(j) $y''(x) + y(x) = 0$

(k) $xy'(x) = y(x) + x^2$

(l) $x(y(x)^2 + 1) + y(x)(x^2 + 1)y'(x) = 0$

(m) $\mathrm{e}^x y'(x) = y(x) + x$

(n) $y^{(4)}(x) - y(x) = 0$

Hinweis: Variation der Koeffizienten dient bekanntlicherweise zur Bestimmung einer partikulären Lösung. Es sollte stets kombiniert werden mit einer der drei? ersten Verfahren. (Mehrfachantwort)

Repetitoriumsaufgabe 4: Differentialgleichung mit Substitution und Separation der Variablen [2]

(a) Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = -\sin x - y \tan x, \quad \text{für} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[\quad \text{und} \quad y(0) = 0\ . \tag{2}$$

Gehen Sie wie folgt vor:

(i) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung durch die Substitution

$$y(x) = [\ln u(x)] \cos x$$

in eine separable Differentialgleichung für $u(x)$ übergeht. Sie dürfen dabei annehmen, dass $u(x) > 0$. Wie lautet die Anfangsbedingung für $u(0)$?

(ii) *(2 Punkte)* Lösen Sie die separable Differentialgleichung für $u(x)$, und folgern Sie daraus die gesuchte Lösung $y(x)$ von Gleichung (2). Verwenden Sie hierzu die Stammfunktion

$$\int \tan x = -\ln(\cos x) + \text{const.} \quad \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}[. \tag{3}$$

Bonus:

(a) *(1 Bonus-Punkt)* Zeigen Sie nun explizit durch Integration mittels Substitution, dass Gleichung (3) gilt.

Repetitoriumsaufgabe 5: Differentialgleichung: Substitution und Separation der Variablen [2]

Oft lassen sich Differentialgleichungen durch geschickte Substitutionen lösen. Hier untersuchen wir Differentialgleichungen vom Typ

$$y'(x) = f(ax + by(x) + c) \tag{4}$$

(a) Substituieren Sie $u(x) = ax + by(x) + c$ und finden Sie eine Differentialgleichung für $u(x)$.

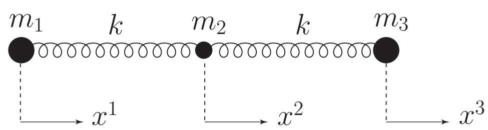
(b) Finden Sie einen impliziten Ausdruck für die Lösung $u(x)$ der neuen Differentialgleichung, mittels einem Integral, das die Funktion f enthält. *Hinweis:* Separation der Variablen!

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(x) = \mathrm{e}^{x+3y(x)+5}$, mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$, mittels der in (a) angegebenen Substitution.

Repetitoriumsaufgabe 6: Gekoppelte Schwingungen von drei Massenpunkten [5]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[2](E); (d)[2](M).

Betrachten Sie ein System aus drei Massenpunkten, mit Massen m_1, m_2 und m_3, gekoppelt durch zwei identische Federn, mit Federkonstante k (siehe Skizze). Die Bewegungsgleichungen für die drei Massen lauten

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}^1 &= -k(x^1 - x^2), \\ m_2\ddot{x}^2 &= -k\left([x^2 - x^1] - [x^3 - x^2]\right), \\ m_3\ddot{x}^3 &= -k(x^3 - x^2), \end{aligned}$$



(a) Bringen Sie das Gleichungssystem in die Form $\ddot{\mathbf{x}}(t) = -A \cdot \mathbf{x}(t)$, mit $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)^T$. Wie lautet die Matrix A?

(b) Mittels dem Ansatz $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}\cos(\omega t)$ kann dieses Differentialgleichungsystem in ein algebraisches Eigenwertproblem überführt werden. Wie lautet dieses?

(c) Setzen Sie fortan $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = \frac{2}{3}m$, und $k = m\Omega^2$. (Ω hat die Dimension einer Frequenz.) Finden Sie die normierten Eigenwerte λ_j und die Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$ der Matrix $\frac{1}{\Omega^2}A$, und somit die entsprechenden 'Eigenfrequenzen' ω_j und 'Eigenmoden' $\mathbf{x}_j(t)$ der gekoppelten Massen (mit $\mathbf{x}_j(0) = \mathbf{v}_j$).

(d) Skizzieren Sie die drei Eigenmoden $\mathbf{x}_j(t)$ als Funktion der Zeit: machen Sie für $j = 1$, 2 und 3 jeweils eine Skizze, die auf demselben Achsensystem die drei Komponenten $x_j^1(t)$, $x_j^2(t)$ und $x_j^3(t)$ zeigt. Kommentieren Sie das gezeigte Verhalten!

Repetitoriumsaufgabe 7: Stabilitätsanalyse in zwei Dimensionen [2]

Betrachten Sie die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - xy \\ 2 - 2x \end{pmatrix}.$$

(a) [1] Finden Sie den Fixpunkt (x^*, y^*) der Differentialgleichung.

(b) [1] Zeigen Sie, dass die linearisierte Differentialgleichung für kleine Auslenkungen $(\eta_x, \eta_y)^T = (x - x^*, y - y^*)^T$ um den Fixpunkt folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_x \\ \dot{\eta}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix}.$$

(c) [3] Diskutieren Sie die Stabilitätseigenschaften des Fixpunkts: Für welche Auslenkungsrichtungen relativ zum Fixpunkt wächst bzw. zerfällt eine Auslenkung am schnellsten?

Repetitoriumsaufgabe 8: Stabilitätsanalyse in zwei Dimensionen [2]

Betrachten Sie die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 1 \\ y \sin(x) \end{pmatrix}; \quad x, y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

(a) [0.5] Finden Sie den Fixpunkt $(x^*, y^*)^T$ der Differentialgleichung.

(b) [1.5] Zeigen Sie, dass die linearisierte Differentialgleichung für kleine Auslenkungen $(\eta_x, \eta_y)^T = (x - x^*, y - y^*)^T$ um den Fixpunkt folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_x \\ \dot{\eta}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix}.$$

(c) [3] Diskutieren Sie die Stabilitätseigenschaften des Fixpunkts: Für welche Auslenkungsrichtungen relativ zum Fixpunkt wächst bzw. zerfällt eine Auslenkung am schnellsten?

Repetitoriumsaufgabe 9: Stabilitätsanalyse in drei Dimensionen [5]
Punkte: (a)[2]; (b)[3]

Die Funktion $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, erfülle folgende Differentialgleichung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x+1) + 2(x+1)^2 + 3z^2 + 2z \\ 2(1 - y + (1-y)^2) \\ -2(x+1) - 2z \end{pmatrix} =: \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

(a) Finden Sie die Fixpunkte dieser Differentialgleichung.

(b) Betrachten Sie nun den Fixpunkt $\mathbf{x}^* = (-1, 1, 0)^T$. Bestimmen Sie die *Anzahl* seiner stabilen und instabilen Richtungen (die Richtungen selbst brauchen nicht bestimmt zu werden), sowie die Zeitskalen, auf denen entsprechende Auslenkungen zerfallen bzw. wachsen.

Repetitoriumsaufgabe 10: Laguerre-Differentialgleichung [2]

Eine in der Physik oft auftauchende Differentialgleichung ist die Laguerre'sche Differentialgleichung

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0 \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

(a) Um welchen Differentialgleichungstyp handelt es sich?

(b) Zeigen Sie, dass für $n = 2$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $y = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right)$ lautet.

(c) (***) Zeigen Sie, dass für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ das Polynom $y_n = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)$ eine Lösung der Laguerre'schen Differentialgleichung ist.

Hinweis: Teilaufgabe (c) lässt sich zum Beispiel mittels vollständiger Induktion zeigen.

Repetitoriumsaufgabe 11: Lineare Differentialgleichungen (Selbststudium) [2]

Geben Sie für die folgenden Differentialgleichungen die allgemeine Lösung an:

(a) $x + 3y = \dot{x},\ 3x + 1y = \dot{y}$ gesucht $x(t), y(t)$.

(b) $2x + \frac{1}{2}y = \dot{x},\ -2x + 4y = \dot{y}$ gesucht $x(t), y(t)$.

(c) $x - 2y = \dot{x},\ -2x + z = \dot{y},\ -2y + z = \dot{z}$ gesucht $x(t), y(t), z(t)$.

(d) $-2x - 3y = \dot{x} + \mathrm{e}^{2t},\ x + 2y + e^t = \dot{y}$ gesucht $x(t), y(t)$ mit $x(1) = 0,\ y(1) = 0$

(e) $t\dot{y} + 2y = t^2 - t + 1$ gesucht $y(t)$, mit $y(1) = 1$.

Repetitoriumsaufgabe 12: Differentialgleichungen mit Separation (Selbststudium) [2]

Geben Sie für die folgenden Differentialgleichungen die allgemeine Lösung an und setzen Sie anschliessend die Anfangsbedingungen ein:

(a) $y^2 = \dot{y}$ mit $y(0) = 1$

(b) $\dot{y}(t^2 + 2)y = 2ty^3$ mit $y(0) = 1$

(c) $y\ln(t)^{-1}\dot{y} = \mathrm{e}^y$ mit $y(1) = 0$

(d) $\dot{y} = \frac{1}{ty^2+2yt+t} + \frac{t}{(y+1)^2}$

Hinweis: In c) und d) reicht eine implizite Form. Für $\int 1 \cdot \ln(x)\mathrm{d}x$ hilft partielle Integration.

Repetitoriumsaufgabe 13: Differentialgleichungen mit höheren Ableitungen (Selbststudium) [2]

Geben Sie für die folgenden Differentialgleichungen die allgemeine Lösung an:

(a) $y'' + 2ky' + \Omega^2 y = 0$, Beachten Sie hier drei Fälle!

(b) $m\ddot{y}(t) - mg = 0$ mit $y(0) = y_0$ und $\dot{y}(0) = v_0$

(c) $y''' + y = \mathrm{e}^x \cdot x$,

[Total Points for Repetitoriumsaufgabes: 35]
