R: Rechenmethoden WiSe 2015-2016 Jan von Delft 12.10.2015 (i)

↳ TO

http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/15r/

Userid:
Passwort:

Das Buch der Natur ist mit mathematischen Symbolen geschrieben. Galileo Galilei

Das Wunder der Anwendbarkeit der Sprache der Mathematik für die Formulierung physikalischer Gesetze ist ein Geschenk, das wir weder verstehen noch verdienen.
Eugene Wigner

Mathe ist wie Liebe: Eine einfache Idee, aber sie kann kompliziert werden. R. Drabek

Seit die Mathematiker über die Relativitätstheorie hergefallen sind, verstehe ich sie selbst nicht mehr. A. Einstein

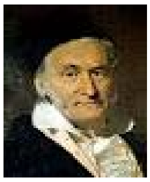

Euklid


Decartes


Newton


Leibniz


Taylor


Gauss


Fourier


Cauchy

Vorlesung: Mo & Do 14-16 Zusatzvorlesungen: Mi 14.10, in Großer Aula, Raum E120 (ii)
Zentralübung: Mi 08-10 (ab 28.10.14) Mi 21.10, im Großen Physikhörsaal
(dafür: Mo 01.02.16 & Do 04.02.16, nur Wiederholung!)

Wozu "Rechenmethoden"?

Mathematik-Vorlesungen: Systematische Entwicklung der Grundlagen, saubere Beweise, ...
(gründlich aber langsam)

Rechenmethoden-Vorlesung: zügiges, anwendungsbezogenes Erlernen des "Handwerks": Sicherheit, Geläufigkeit und Schnelligkeit im Umgang mit Standard- rechenmethoden
(intuitive Argumente statt saubere Beweise)

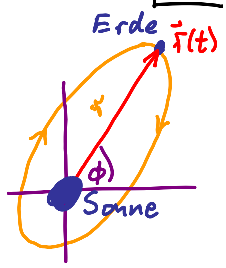
- Regelmäßige Nachbearbeitung der Vorlesung
- Besuch und aktive Mitarbeit in den Tutorien (Anmeldung via Website: bis Di, 13.10.2015, 24:00)
- Hausaufgaben: sehr wichtig! Abschreiben = Selbstbetrug!
- Hinweise zur Bearbeitung der Hausaufgaben (nach Prof. Wagner, Lehn) beachten!
- Diskutieren mit Kommilitonen, Lerngruppe, Hausaufgabenzirkel
- Geduld, Ausdauer, Frustrationstoleranz

Termine: http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/15r/termine.html
Übungsbetrieb: http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/15r/15R-Uebungsbetrieb.pdf
Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter:
nach Prof. Wagner: http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/15r/ArbeitstilWagner.pdf
nach Prof. Lehn: http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/uebungsblatt

Fahrplan für die ersten Wochen

Beispiel einer wichtigen Gleichung:
Newton's 1. Gesetz für
Planetenbewegung (E1: 03.11.2015)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\vec{\nabla}\overbrace{V(\vec{r})}^{\left(\frac{GMm}{r}\right)}$$



- Vektorgleichung: Lineare Algebra (L): Vektorräume (L1-L4)
- $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ Ortsvektor: Vektoranalysis (V): Raumkurven, Linienintegrale (V1)
- $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$ Zeitableitung: Calculus (C): Ableitungen (C1)
- $V(\vec{r})$ skalares Potential: Skalarfeld (V2, V3)
- $\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \partial V/\partial x \\ \partial V/\partial y \\ \partial V/\partial z \end{pmatrix}$ Nabla-Operator: partielle Ableitungen (C3), Gradient, Vektorfeld (V3)
- $r = |\vec{r}|, \ \phi$ Polarkoordinaten: Krummlinige Koordinaten (V4)
- $m = \int d^3r \ \rho(\vec{r})$ Volumenintegration: Mehrdimensionale Integration (C4)
- Differentialgleichung: Differentialgleichungen (C...)

Mathematische Grundbegriffe

L1.1 Mengen und Abbildungen

Zwei Mengen: $A = \{ \times \ + \ \Delta \}$ $B = \{ \circ \ \square \}$

Cartesisches Produkt: $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, \ b \in B \} = \{ (\times,\circ)\ (\times,\square)\ (+,\circ)\ (+,\square)\ (\Delta,\circ)\ (\Delta,\square) \}$ (1)

"ist Element von"

Kardinalität: Anzahl Elemente einer Menge (3 für A, 2 für B, 6 für A x B)

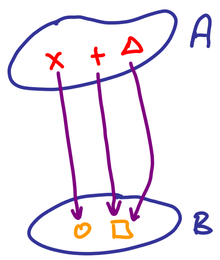
Abbildung:

Definitionsmenge, Zielmenge

Name der Abbildung $F : A \longrightarrow B$

$a \longmapsto F(a)$

Argument, Zielelement

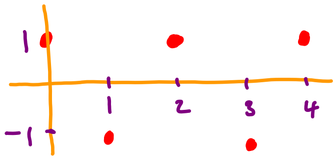


(2)

$F(A) = B$

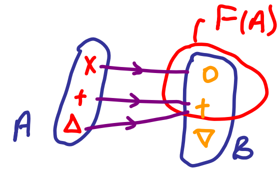
Beispiel: $F: \mathbb{N} \to \{1,-1\}$

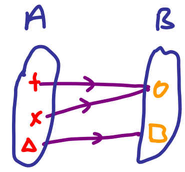
$n \mapsto F(n) = (-1)^n$



<u>Bild</u> v. A: $F(A) = \{ F(a) \mid a \in A \} \subseteq B$

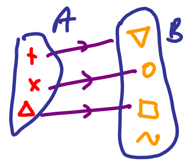
"ist eine Untermenge von"





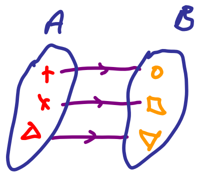
<u>Surjektiv:</u> jedes $b \in B = F(a)$ für mindestens ein $a \in A$

'ALLE Elemente v. B werden erreicht'



<u>Injektiv:</u> jedes $b \in B = F(a)$ für höchstens ein $a \in A$

'kein Element v. B wird mehr als einmal erreicht'

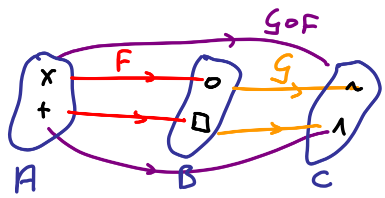


<u>Bijektiv:</u> jedes $b \in B = F(a)$ für genau ein $a \in A$

'1-zu-1-Abbildung'

<u>Verkettung / Komposition</u>

$F: A \to B$, $a \mapsto F(a)$, $g: B \to C$, $b \mapsto g(b)$ $g \circ F: A \to C$, $a \mapsto g(F(a))$

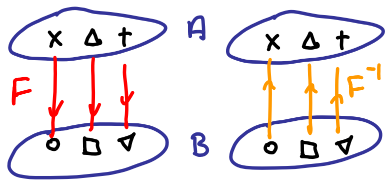


Beispiel: $A, B, C = \mathbb{Z}$

$F(a) = a+1$ $g(b) = 2b$, $(g \circ F)(a) = 2(a+1)$

<u>Inverse</u> einer bijektiven Abbildung:

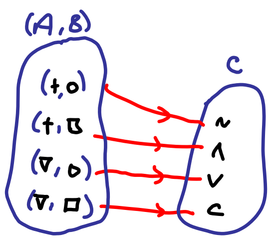
$F: A \to B$, $a \mapsto F(a)$ $F^{-1}: B \to A$, $F(a) \mapsto F^{-1}(F(a)) = a$



<u>Binäre Verknüpfung:</u>
Definitionsmenge ist ein Cartesisches Produkt:

$F: A \times B \to C$

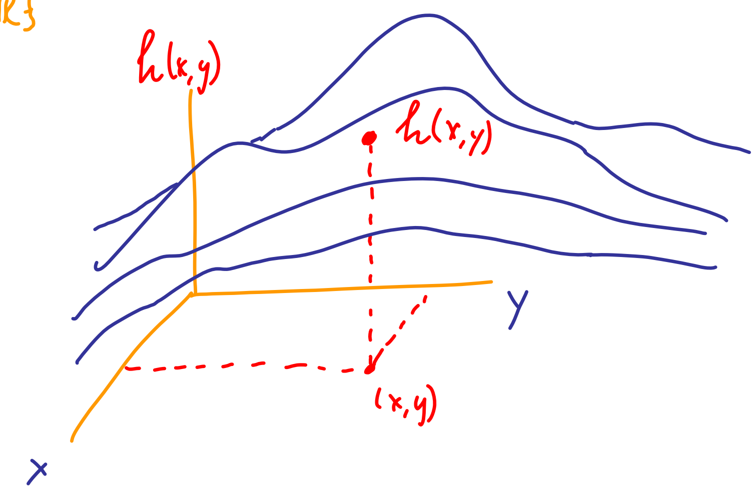
$(a, b) \mapsto c = F(a,b)$



Beispiel einer binären Verknüpfung: Höhe eines Gebirges

$$h : \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto h(x,y)$$



L1.2 Gruppe: (einfachste Struktur die 'Operationen' mit Elementen erlaubt)

Definition: Eine "Gruppe" $\mathcal{G} = (A, \bullet)$ ist eine Menge A ausgestattet mit einer binären Verknüpfung,

$$\bullet : \underset{\text{Cartesisches Produkt}}{A \times A} \longrightarrow A \quad (1)$$

$$(a, b) \longmapsto a \bullet b \quad (2)$$

und folgenden Eigenschaften ("Gruppenaxiome"):

i) Abgeschlossenheit: $\underset{\text{"für alle"}}{\forall} a, b \in A, \quad a \bullet b \in A$ (3)

ii) Assoziativität: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ (4)

iii) neutrales Element: $\underset{\text{"es existiert"}}{\exists} e \in A$, so dass $a \bullet e = e \bullet a = a, \quad \forall a \in A$ (5)

iv) inverses Element: $\forall a \in A \;\; \exists b \in A$ mit $a \bullet b = e = b \bullet a$ (6)

$b \equiv a^{-1}$

Falls $a \bullet b = b \bullet a$ 'kommutative Gruppe', 'Abelsche Gruppe' (7)

Falls $a \bullet b \neq b \bullet a$ 'nicht-kommutative Gruppe', 'nicht-Abelsche Gruppe' (8)

Beispiel 1: Ganze Zahlen, mitAddition (kommutativ)

L1d

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\quad G = (\mathbb{Z}, +)$ (1)

Verknüpfung: $\quad + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto m + n$ (2)

Neutrales Element: $e = 0$, (inverses Element v. n) $= -n$ (3)

Beispiel 2:

Sei $A = \{e, a\}$ (4)

mit Verknüpfungsregel: $\bullet : A \times A \to A$, $(b, b') \mapsto b \bullet b'$ (5)

Verknüpfungstabelle: (6)

$(b,b') \mapsto b \bullet b'$

$(e,e) \mapsto e$

$(e,a) \mapsto a$

$(a,e) \mapsto a$

$(a,a) \mapsto e$

$(A, \bullet)$ ist eine kommutative Gruppe.

Neutrales element: e, Inverse von $b = b$ (7)

Beispiel 3:

$B = \{0, 1\}$ $\quad \# : B \times B \to B$, $(b, b') \mapsto (b + b') \bmod 2$ (8)

n mod 2 = 'n-modulo-2' $\begin{cases} 0 & \text{falls n = gerade} \\ 1 & \text{falls n = ungerade} \end{cases}$ = Rest nach Teilen-durch-2 (9)

Verknüpfungstabelle: (10)

$(b,b') \mapsto (b+b') \bmod 2$

$(0,0) \mapsto 0$

$(0,1) \mapsto 1$

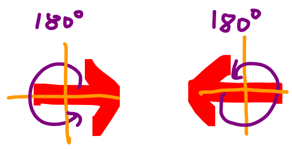
$(1,0) \mapsto 1$

$(1,1) \mapsto 0$

$\mathbb{Z}_2 \equiv (B, \#)$ hat dieselbe Struktur wie $(A, \bullet)$!!

Beispiel 4: Rotationen um eine feste Achse um 0 oder 180 Grad

L1e



$C = \{(\text{Rotation um Winkel } \phi) \equiv R_\phi, \ \phi \in \{0, \pi\}\}$ (1)

$= \{R_0, R_\pi\}$ (2)

Betrachte die Verknüpfung $\quad + : C \times C \to C$, $\quad (R_\phi, R_{\phi'}) \mapsto R_{\phi+\phi'}$

$$\left\{\begin{array}{l} (R_0, R_0) \mapsto R_0 \\ (R_0, R_\pi) \mapsto R_\pi \\ (R_\pi, R_0) \mapsto R_\pi \\ (R_\pi, R_\pi) \mapsto R_0 \end{array}\right. \quad (3)$$

Dann ist $(C, +)$ eine kommutative Gruppe.

Neutrales element: R_0, Inverse von $R_\phi = R_\phi$

Offenbar haben A, B und C dieselbe Struktur (gleiche Anzahl Elemente und Verknüpfungsregel) !

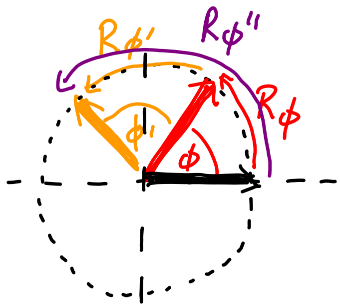
[vergleiche (L1d6), (L1d10), (L1e.3)]

$(A, \bullet) \simeq \mathbb{Z}_2 = (B, \#) \simeq (C, +)$

'ist isomorph zu'

Beispiel 5: kontinuierliche Rotationen um eine Achse (kommutativ) Lie'

$\mathcal{R} = \{ (\text{Rotation um Winkel } \phi) \equiv R_\phi ,\ \phi \in \mathbb{R} \}$



$\mathcal{G} = (\{\mathcal{R}\}, +)$ mit $+ : \quad \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$

$\qquad (R_\phi, R_{\phi'}) \longmapsto R_{\phi+\phi'}$

Neutrales Element: $e = R_0$ (keine Rotation)

(inverses Element v. R_ϕ) $= R_{-\phi}$ (Rückrotation)

Beispiel 6: Rotationen in drei Dimensionen (nicht-kommutativ)

$R_{x,45°} \bullet R_{z,180°} \neq R_{z,180°} \bullet R_{x,45°}$

Homomorphismus Lie''

$(\mathcal{G}, \cdot)$ und $(H, \bullet)$ seien zwei Gruppen mit a priori unabhängigen Verknüpfungsregeln. (1)

'bewahrt die Form'

Def: Eine Abbildung $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow H$, $\quad a \longrightarrow \psi(a)$ heisst ein 'Homomorphismus' zwischen den Gruppen G und H, (2)

falls $\psi(a \cdot b) = \psi(a) \bullet \psi(b) \quad \forall\, a, b \in \mathcal{G}$ (3)

Beispiel 6: $(\mathcal{G}, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$, $(H, \bullet) = (\mathbb{Z}, +)$ (4)

$\psi : \mathcal{G} \to H$, $\quad n \mapsto \psi(n) = 2n$ (5) ist ein Homomorphismus,

denn $\psi(n+m) = 2(n+m)$ (6) und $\psi(n) + \psi(m) = 2n + 2m$ (7) $\overset{\checkmark}{=}$ (6)

Aber $\phi : \mathcal{G} \to H$, $\quad n \mapsto \phi(n) = n^2$ (8) ist kein Homomorphismus,

denn $\phi(n+m) = (n+m)^2$ (9) $\phi(n) + \phi(m) = n^2 + m^2$ (10) $\neq$ (9)

L1f

Isomorphismus

Def: Eine Abbildung $\psi: G \longrightarrow H$, $a \longrightarrow \psi(a)$ heisst ein 'Isomorphismus' zwischen den Gruppen G und H ist, (1)

'identische Form'

falls sie ein <u>bijektiver</u> Homomorphismus ist. Wir schreiben dann: $G \cong H$ (2)

Isomorphe Gruppen sind für praktischen Zwecke 'identisch'.
Konkret: es existiert eine 1-zu-1 Zuordnung ihrer Elemente, die die beiden Verknüpfungstabellen aufeinander abbildet (d.h. sie haben "dieselbe Verknüpfungstabelle)

<u>Beispiele 2,3,4:</u>

(1d.6)

$$(\{e,a\}, \bullet) \simeq (\{0,1\}, \text{addition mod } 2) \simeq (\{R_0, R_\pi\}, +) \qquad (3)$$

$$(A, \bullet) \simeq \mathbb{Z}_2 = (B, \#) \simeq (C, +)$$

Gruppentheorie: sehr wichtig in der Physik !

- Diskrete Translationen, Reflektionen (Kristallstrukturen)
- Translationen in Raum oder Zeit
- Rotationen (Quantenmechanische Theorie des Drehimpulses, Spin)
- Lorentz-Gruppe, Poincare-Gruppe (spezielle Relativitätstheorie)

L1g

L1.3 Körper

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Körper: $F = (A, +, \bullet)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation)

- Addition (kommutativ): neutrales Element = 0, additives Inverse v. $a = -a$

  Subtraktion: $a - b \equiv a + (-b)$

- Multiplikation (kommutativ): neutrales Element = 1, multiplik. Inverse v. $a = a^{-1}$

  Division: $a/b \equiv a \bullet b^{-1}$

Das neutrale Element d. Addition, 0, hat kein multiplikatives Inverse $\cancel{\left(\frac{1}{0}\right)}$

- Distributivitätsaxiom: $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$

$\mathbb{Z}$ ist <u>kein</u> Körper, denn Multiplikation hat kein Inverses in $\mathbb{Z}$

Beispiele von Körpern: L1h

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{ q/p \mid q, p \in \mathbb{Z},\ p \neq 0 \}$

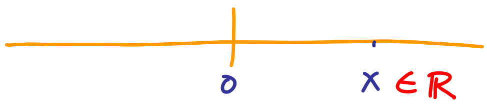
Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \{$ alle Zahlen, die als Limes von 'Folgen von rationalen Zahlen' dargestellt werden können $\}$

z.B.: $\mathbb{Q} \not\ni \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

kann approximiert werden durch die Folge

$$\left\{ \begin{aligned} 1{,}4 &= \tfrac{14}{10} \in \mathbb{Q} \\ 1{,}41 &= \tfrac{141}{100} \in \mathbb{Q} \\ 1{,}414 &= \tfrac{1414}{1000} \in \mathbb{Q} \\ 1{,}4142 &= \tfrac{14142}{10000} \in \mathbb{Q} \\ &\vdots \end{aligned} \right.$$

$\mathbb{R} = \{$ alle Zahlen, die gebraucht werden, um eine Linie zu Parametrisieren $\}$



Komplexe Zahlen: $\mathbb{C}$ L1i

Ausgangsfrage: $\sqrt{-1} = \ ? \quad (\notin \mathbb{R})$ (1)

Lösungsansatz: <u>erweitere</u> unser Zahlensystem um eine neue Zahl:

'imaginäre Einheit': $\sqrt{-1} \equiv i \quad (\notin \mathbb{R})$ (2)

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 \tag{3}$$

Wurzel von negativen Zahlen: Sei $r > 0$: $\sqrt{-r} = \sqrt{-1}\,\sqrt{r} = i\sqrt{r}$ (4)

Menge aller komplexen Zahlen: $\mathbb{C} \equiv \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ (5)

jede kompl. Zahl wird dargestellt durch zwei reelle Zahlen:

$x \equiv \mathrm{Re}(z) =$ 'Realteil v. z' (6)

$y \equiv \mathrm{Im}(z) =$ 'Imaginärteil v. z' (7)

Def. v. Addition: (analog den üblichen Regeln für einen Körper) L1j

$$\underline{z + z'} = (x+iy) + (x'+iy') \overset{4}{=} \underline{(x+x') + i(y+y')} \quad (1)$$

Bsp: $(1+2i) + (2-3i) = 3 - i$

Def. v. Multiplikation: (analog den üblichen Regeln für einen Körper)

$$\underline{zz'} = (x+iy)(x'+iy') = (xx' + ixy' + iyx' + \underbrace{i^2}_{\overset{(i.3)}{=}-1} yy') \quad (2)$$

$$= \underline{(xx' - yy') + i(xy' + x'y)} \quad (3)$$

Bsp: $(1+2i)(2-3i) = (2-(-6)) + i(-3+4) = 8 + i$

Neutrales Element der Addition: 0 Addititives Inverse: $-z = -x - iy$ (4)

Neutrales Element der Multiplikation: 1

Multiplikatives Inverse: $z^{-1} = ?$ (5)

Was sind Re(z^{-1}), Im(z^{-1})?

Definiere zunächst: 'komplex Konjugierte' von $z = x+iy$: $z^* \equiv \bar{z} \equiv x - iy$ L1k (1)

dann:

$$z\bar{z} \overset{(1)}{=} (x+iy)(x-iy) \overset{(j.3)}{=} (x\cdot x - y\cdot(-y)) + i(\cancel{x\cdot(-y)} + \cancel{y\cdot x}) = \overbrace{x^2 + y^2}^{\geq 0} \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$(2)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}: \quad z \cdot \underbrace{\bar{z}\,\frac{1}{x^2+y^2}}_{\equiv z^{-1}} \overset{(2)}{=} 1 \quad (3)$$

$$\text{Inverse:} \quad z^{-1} \overset{(3)}{\equiv} \frac{\bar{z}}{x^2+y^2} = \frac{x - iy}{x^2+y^2} \quad (4)$$

$$\text{Check:} \quad zz^{-1} \overset{(4)}{=} (x+iy)\frac{x-iy}{x^2+y^2} \overset{(2)}{=} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \ \checkmark \quad (5)$$

Merkregel für Inverse:
'mache den Nenner reell' !

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{x^2+y^2} \overset{\checkmark}{=} (4) \quad (6)$$

Bsp: $z = 2 - 3i$, $\quad z^{-1} = \frac{1}{2-3i}\,\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{1}{13}(2+3i) \quad (7)$

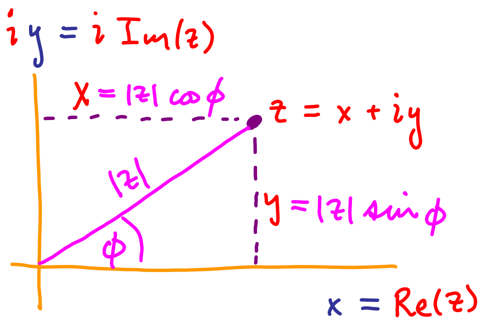
Komplexe Ebene:

Identifikation einer komplexen Zahl mit 'geordnetem Paar' von zwei reellen Zahlen:

$$I : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \} \qquad (1)$$

$$z \mapsto (x,y) \; = \qquad (2)$$

Punkt in zwei-dimensionaler Ebene ('komplexe Ebene')



Reelle Achse: $z = x$ 'rein reell'

Imaginäre Achse: $z = iy$ 'rein imaginär'

Polardarstellung:

Betrag v. z (Abstand zum Ursprung):

$$|z| \equiv \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \qquad (3)$$

$$z = x + iy \qquad (4)$$

$$= |z|(\cos\phi + i\sin\phi) \qquad (5)$$

Zusammenfassung: L1

Gruppe: $\mathcal{G} = (A, \bullet)$ Verknüpfung: $\bullet : A \times A \rightarrow A, \; (a,b) \mapsto a \bullet b$

(i) Abgeschlossenheit, (ii) Assoziativität, (iii) neutrales Element, (iv) inverses Element

Körper: $F = (A, +, \bullet)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation, beide liefern jeweils eine kommutative Gruppe)

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Beispiele: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x,y \in \mathbb{R} \} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \}$

$i = \sqrt{-1}$

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

$$z^* = \bar{z} \equiv x - iy, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$