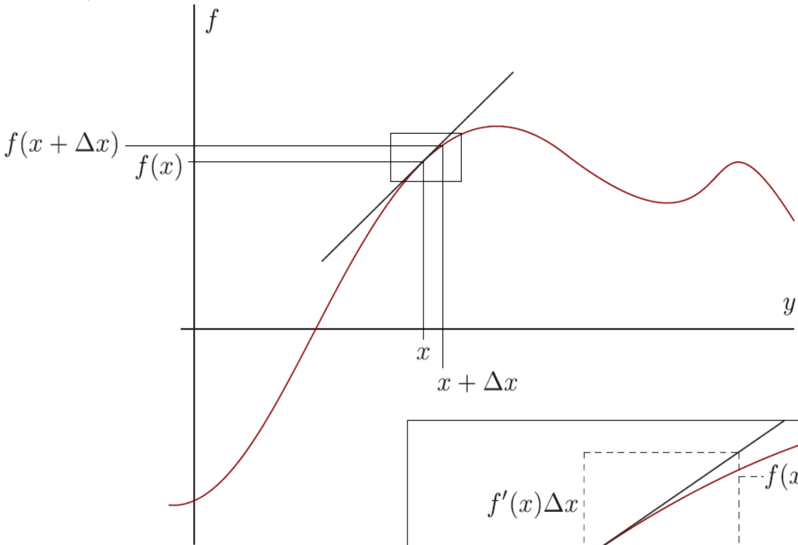
C1a

<u>C: Calculus</u>

<u>C1: Differenzieren (Ableiten) 1-dimensionaler Funktionen</u>

Lernziel: verallgemeinerbare Interpretation des Begriffs 'Ableitung einer Funktion'

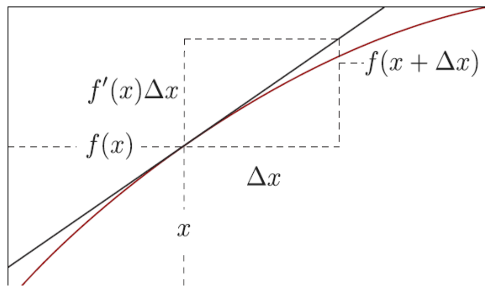


<u>C1.1 Def. der Ableitung</u>

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$y \mapsto f(y)$$

sei glatte Funktion.

'Ableitung von f am Punkt x'



$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Interpretation: Steigung v. $f(y)$ am Punkt x

C1b

Alternative Notationen: $f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=x} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv d_x f(x)$ (1)

Verallgemeinerbare Betrachtung: Sei Δx klein, aber nicht infinitessimal klein.

Dann: $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \overset{(a.1)}{\simeq} f'(x)$ (2)

(a.1) in guter Näherung, wird exakt für $\Delta x \to 0$

<u>Grundlegende Formel:</u> $f(x+\Delta x) \overset{(2)}{\simeq} f(x) + \Delta x\, f'(x)$ "Mutter aller Ableitungen" (3)

Schreibe $x + \Delta x \equiv y$: $f(y) \simeq f(x) + (y-x)\, f'(x)$ (4)

linear in y!

Interpretation: nahe bei x kann $f(y)$ näherungsbeweise beschrieben werden durch eine <u>lineare</u> Funktion v. y !

Allgemeine Faustregel: jede Ableitung stellt eine <u>lokale</u> Näherungen einer Funktion durch eine <u>lineare</u> Funktion dar! (5)

Beispiel: $f(x) = x^3$ (1) C1c

$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3$

ausmultipliziert: $= x^3 + \underbrace{(\Delta x) 3x^2}_{\equiv} + \underbrace{3(\Delta x)^2 x + (\Delta x)^3}_{=\mathcal{O}(\Delta x^2)}$ (2)

Identifiziere: $= f(x) + \Delta x \, \overbrace{f'(x)}$ (3)
[(durch Vergleich mit (b.3)]

Fazit: $f'(x) = 3x^2$ ✓

$\mathcal{O}(\Delta x^2)$ bedeutet: Terme 'höher als lineare Ordnung in Δx (hier: $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$)

sind vernachlässigbar relativ zu Δx wenn $\Delta x \ll 1$: 10^{-2} 10^{-4} 10^{-6}
10^{-5} 10^{-10} 10^{-15}

$$f(x+\Delta x) = x^3 + \Delta x \Big[3x^2 + \overbrace{3\Delta x\, x + \Delta x^2}^{\text{vernachlässigbar relativ zum ersten Term in [ ], falls } \Delta x \ll 1} \Big] \quad (4)$$

C1.2 Ableitungsregeln (aus Schule bekannt? In Übungen trainieren!) C1d

(Siehe auch Skript, Mathe Vorkurs)

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien 'glatte Funktionen', $a \in \mathbb{R}$
Ableitungen existieren

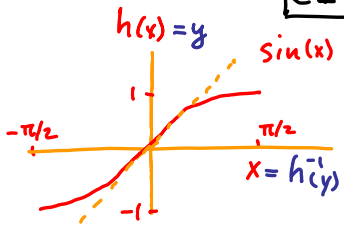
Produktregel: $$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} g(x) + f(x) \frac{d(g(x))}{dx} \quad (1)$$

Kettenregel: $$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{df(y)}{dy}\Big|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx} \quad (2)$$

wichtiger Spezialfall:
$g(x) = ax$
$$\frac{d(f(ax))}{dx} = a \cdot \frac{df(y)}{dy}\Big|_{y=ax} \quad (3)$$

Inverse:
$f(y) = \frac{1}{y}$
$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} \overset{(2)}{=} - \frac{1}{g^2(x)} \frac{dg(x)}{dx} \quad (4)$$

Inverse Funktion: Sei h^{-1} die Inverse Funktion v. h: C1e



dann gilt:

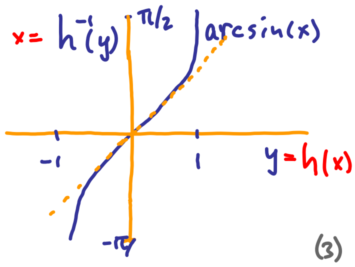
$$h^{-1}(\underbrace{h(x)}_{\equiv y}) = x \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dx} h^{-1}(h(x)) \overset{KR}{=} \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \cdot \frac{d h(x)}{dx} = \frac{d}{dx} x = 1 \qquad (1')$$

(d.2), mit $g \to h$, $f \to h^{-1}$

$h(x) = y$, $x = h^{-1}(y)$:

$$\boxed{\frac{d h^{-1}(y)}{dy} \overset{(1')}{=} \frac{1}{\left.\frac{dh(x)}{dx}\right|_{x = h^{-1}(y)}}} \qquad (2)$$



(3)

Beispiel: $\arcsin(\sin(x)) = x$; $\quad h(x) = \sin x = y \qquad h^{-1}(y) = \arcsin(y) \qquad (4)$

$$\frac{d}{dy}\arcsin(y) \overset{(2)}{=} \frac{1}{\left.\frac{d\sin(x)}{dx}\right|_{x=\arcsin(y)}} = \frac{1}{\left.\cos(x)\right|_{x=\arcsin(y)}} = \frac{1}{\left.\sqrt{1-\sin^2(x)}\right|_{x=\arcsin y}} \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\sin^2(\arcsin(y)) = y^2 \qquad (6)$$

Heuristische Begründung für (e.2): $\quad h(x) = y \;, \quad h^{-1}(y) = x \qquad (1)$ C1f

[siehe Altland-Delft-Text, Abschnitt C1.2]

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x \overset{(1)}{=} h^{-1}(h(x+\Delta x)) - h^{-1}(h(x)) \qquad (2)$$

nutze Mutter aller Ableitungen, mache lineare Näherung für h:

$$\overset{(b.3)}{\simeq} h^{-1}\Big(\underbrace{h(x)}_{(1):\ \equiv y} + \underbrace{\Delta x \left.\frac{dh}{dx}\right|_x}_{\equiv \Delta y}\Big) - h^{-1}(\underbrace{h(x)}_{= y}) \qquad (3)$$

$$\simeq \frac{h^{-1}(y + \Delta y) - h^{-1}(y)}{\Delta y} \cdot \Delta y \qquad (4)$$

nutze Mutter aller Ableitungen, mache lineare Näherung für h^{-1}:

$$\Delta x \overset{(b.2)}{\simeq} \left.\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|_{y=h(x)} \cdot \overbrace{\left.\frac{dh}{dx}\right|_x \cdot \Delta x} \qquad (5)$$

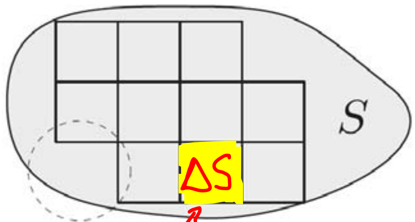
$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\left.\frac{dh}{dx}\right|_{x = h^{-1}(y)}}} = (e.2) \checkmark \qquad \square . \qquad (6)$$

C1.3 Ableitungen v. wichtigen Funktionen: siehe Altland-Delft-Text, Abschnitt C1.3

C2 Integrieren 1-dimensionaler Funktionen

C2.1 Grundidee der Integration

Lernziel: verallgemeinerbare Interpretation des Begriffs 'Integral einer Funktion'

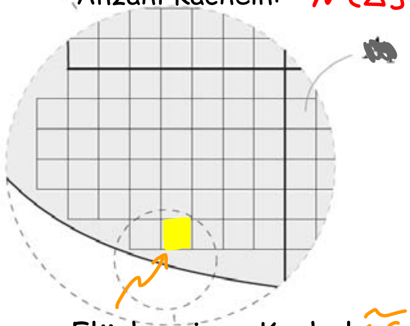


Fläche einer Kachel: ΔS

Anzahl Kacheln: $N(\Delta S)$

Beispiel: Bestimmung einer 2-dimensionalen Fläche:

Schätzung d. Gesamtfläche: $$F \simeq \sum_{i=1}^{N(\Delta S)} \Delta S = \Delta S \cdot N(\Delta S) \qquad (1)$$



Fläche einer Kachel: $\widetilde{\Delta S}$

Anzahl Kacheln: $N(\widetilde{\Delta S})$

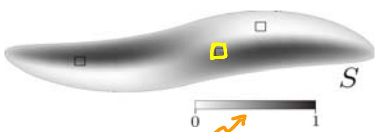
Bessere Schätzung d. Gesamtfläche: $$F \simeq \sum_{i=1}^{N(\widetilde{\Delta S})} \widetilde{\Delta S} = \widetilde{\Delta S} \cdot N(\widetilde{\Delta S}) \qquad (2)$$

Tatsächliche Gesamtfläche: $$F = \lim_{\delta S \to 0} \delta S \cdot N(\delta S) \qquad (3)$$

Solch eine Art von Grenzwert wird 'Integral' genannt.

Kompliziertere Aufgabe:

Fläche sei ungleichmäßig angemalt.
Wieviel Farbe wurde gebraucht?



Farbdichte auf Kachel i: $f_i \in [0,1]$

Schätzung des Farbverbrauchs: $$C \simeq \sum_{i=1}^{N(\Delta S)} \Delta S \cdot f_i \qquad (1)$$

Tatsächlicher Farbverbrauch, akkurat bestimmt im Limes unendlich vieler, infinitessimal kleiner Kacheln:

$$C = \lim_{\delta S \to 0} \delta S \sum_{i=1}^{N(\delta S)} f_i \equiv \int_S dS \; f(x,y) \qquad (2)$$

(2-dimensionale) Integrationsvariable

Integrationsbereich

Funktion einer 2-dimensionalen, kontinuierlichen Variablen, $i \to \; = (x,y)$, $f_i \to f(x,y)$

Allgemeine Faustregel: Integral = Grenzwert einer Summe (3)

'Riemann-Summe' $= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} X_i$

"Mutter aller Integrale"

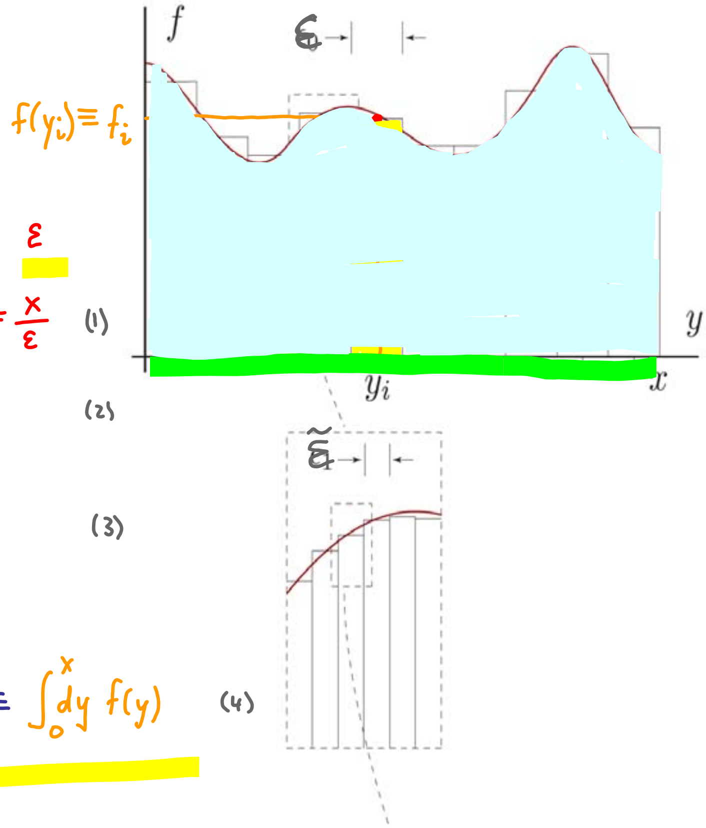
Diskretisierungsparameter: ε

Diskretisierungsindex: $i = 1, \dots, N(\varepsilon) \propto \frac{1}{\varepsilon}$

Größe, über die summiert wird: X_i

Beispiel: Fläche unter einer Kurve

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto f(y)$



Integrationsbereich: $S = [0, x]$

Diskretisierungsparameter = Kachelbreite: ε

Diskretisierungsindex: $i = 1, \dots, N(\varepsilon) = \frac{x}{\varepsilon}$ (1)

Fläche v. Kachel i: $\varepsilon \cdot f_i$ (2)

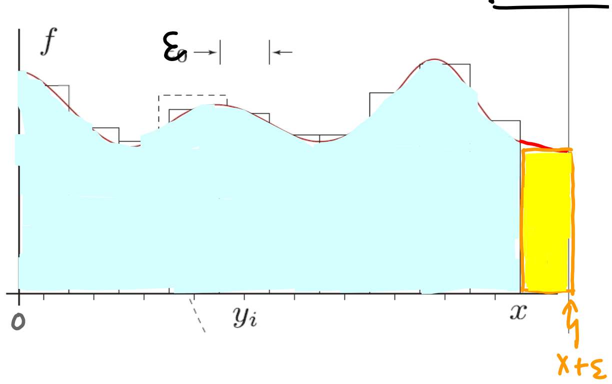
Schätzung d. Gesamtfläche: $F = \varepsilon \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f_i$ (3)

Tatsächliche Fläche: $F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{i=1}^{x/\varepsilon} f_i \equiv \int_0^x dy\, f(y)$ (4)

Definition: 'Integral d. Funktion f'

Integration als 'Umkehroperation' des Differenzierens

Wie ändert sich $F(x)$ als Funktion von x ?
(halte ε fest, füge eine Kachel hinzu)



$F(x+\varepsilon) \overset{(c.3)}{\simeq} \varepsilon \sum_{i=1}^{x/\varepsilon + 1} f_i$ (1)

$= \varepsilon \sum_{i=1}^{x/\varepsilon} f_i + \varepsilon \underbrace{f_{i = x/\varepsilon + 1}}_{\simeq f(x+\varepsilon) \simeq f(x)}$ (2)

$\simeq F(x) + \varepsilon f(x)$ (3)

Aufgelöst nach f: $f(x) \overset{(3)}{=} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \overset{(1a.1)}{\simeq} \frac{dF(x)}{dx}$ (4)

Mutter aller Ableitungen

Im Limes $\varepsilon \to 0$ erhalten wir den 'Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung':

$F(x) = \int_0^x dy\, f(y) \implies \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ (5)

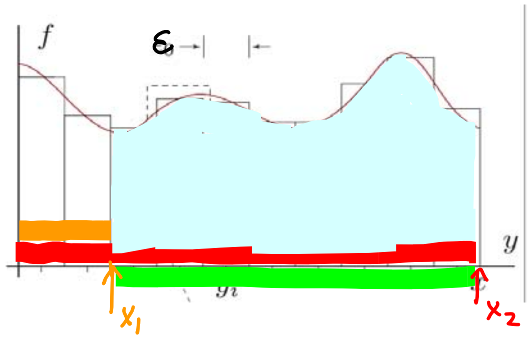
'Bestimmtes Integral': C2e

$$F(x_2) - F(x_1) \qquad (1)$$

$$\overset{(d.2)}{=} \varepsilon \sum_{i=1}^{x_2/\varepsilon} f_i - \varepsilon \sum_{i=1}^{x_1/\varepsilon} f_i \qquad (2)$$

$$= \varepsilon \sum_{i=x_1/\varepsilon+1}^{x_2/\varepsilon} f_i \equiv \int_{x_1}^{x_2} dy\, f(y) \qquad (3)$$

= Fläche unter Kurve zwischen x_2 und x_1



Standardnotation: $$\int_a^b dy\, f(y) = F(b) - F(a) \equiv F(y)\Big|_a^b \qquad (4)$$

Falls $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, ist $F: x \mapsto F(x)$ eine 'Stammfunktion' von $f: x \mapsto f(x)$ (5)

Stammfunktion ist nicht eindeutig: $F + c : x \mapsto F(x) + c$ beliebige Konstante ist auch eine Stammfunktion. (6)

'Unbestimmtes Integral': $$\int dy\, f(y) \equiv F(y) + c \qquad (7)$$

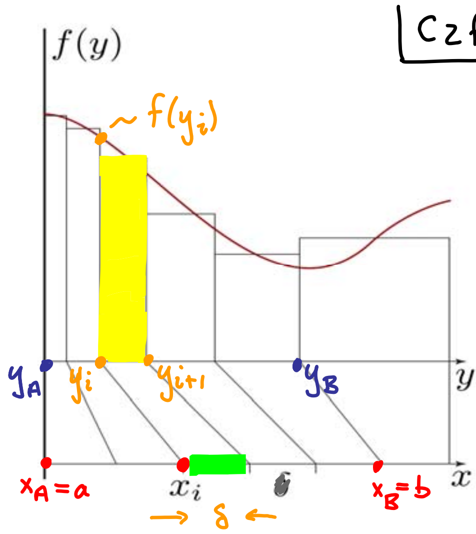
C2.3 Variablen-Substitution

C2f

Kacheln müssen nicht alle gleich groß sein!

$$f: [y_A, y_B] \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto f(y) \qquad (1)$$

$\{y_i\}$ seien Grenzpunkte v. 'ungleichbreiten' Kacheln



Verallgemeinerung der Riemann-Summe:

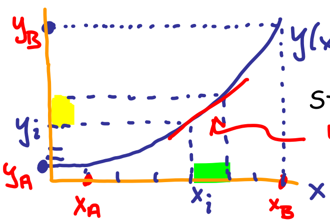
$$\int_{y_A}^{y_B} dy\, f(y) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(y_i)\underbrace{[y_{i+1} - y_i]}_{\text{Breite v. Kachel } i} \qquad (2)$$

Ziel: Umformung in Riemann-Summe mit gleichbreiten Kacheln:

$$x_i = \delta \cdot i \qquad (3)$$
$$\delta \equiv (x_B - x_A)/N \qquad (4)$$

Kachelbreiten seien bestimmt durch eine Funktion, y:

$$x : [x_A, x_B] \to [y_A, y_B] = [y(a), y(b)]$$
$$x \mapsto y(x) \quad \text{mit} \quad y_i = y(x_i) \qquad (5)$$



Steigung: $y'(x_i) =$

C2g

$$\int_{y(a)=y_A}^{y(b)=y_B} dy\, f(y) \overset{(f.2)}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(y_i)\left[y_{i+1} - y_i\right] \qquad (1)$$

$$\overset{(f.5)}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(y(x_i)) \left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\delta}\right]\cdot\delta \qquad (2)$$

$$\simeq \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(y(x_i)) \overset{(C1b.2)}{\frac{dy(x_i)}{dx}} \cdot \delta \qquad (3)$$

Mutter aller Ableitungen

$$= \int_{a=x_A}^{b=x_B} dx\, f(y(x)) \frac{dy(x)}{dx} \qquad (4)$$

entstammt den ungleichen Kachelbreiten in Ausgangsformel (f.2)

'Variablen-Substitution':

$$\int_a^b dx \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) \overset{(4)}{=} \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y) \qquad (5)$$

Merkregeln:

Substitution: $y = y(x)$

'Integrationsmaß'

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = \qquad (6)$$

$$dy = dx \frac{dy(x)}{dx} \qquad (7)$$

Eselsbrücke: "$dx \cdot (6)$"

Interations grenzen:

vor:		nach:
x	$\mapsto$	$y(x)$
a	$\mapsto$	$y(a)$
b	$\mapsto$	$y(b)$

(8)

C2h

Beispiel: $I = \int_4^5 dx \frac{x}{(1+x^2)^2}$ (1)

Substitution:

$$y = y(x) = x^2 \qquad (2)$$

Integrationsmaß:

$$\frac{dy}{dx} \overset{(2)}{=} 2x \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2} dy = dx \cdot x \qquad (4)$$

Integrationsgrenzen:

$$4 \mapsto y(4) \overset{(2)}{=} 4^2 \qquad (5)$$

$$5 \mapsto y(5) = 5^2 \qquad (6)$$

$$I = \overset{(4)}{\frac{1}{2}} \int_{16\,(5)}^{25\,(6)} dy \frac{1}{(1+y)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+y)}\Bigg|_{16}^{25} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{26} - \frac{1}{17}\right] \qquad (3)$$

C2.4 Partielle Integration:

$u'(x) \equiv \frac{d}{dx}u(x)$

C2i

Produktregel: $[u(x)\,v(x)]' \overset{(1d.2)}{=} u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$ (1)

Integrieren:

$$u(x)\,v(x)\Big|_a^b \overset{(2e.4)}{=} \underset{\textcircled{1}}{\int_a^b dx\,[u(x)\,v(x)]'} \overset{(1)}{=} \underset{\textcircled{2}}{\int_a^b dx\,u'(x)\,v(x)} + \underset{\textcircled{3}}{\int_a^b dx\,u(x)\,v'(x)} \qquad (2)$$

Umstellen:

$$\overset{\textcircled{3}}{\int_a^b dx\,u(x)\,v'(x)} = \overset{\textcircled{1}}{u(x)\,v(x)\Big|_a^b} - \overset{\textcircled{2}}{\int_a^b dx\,u'(x)\,v(x)} \qquad (3)$$

"partielle Integration"

Nützlich, falls u' einfacher als u ist.

Beispiel:

$$\int_0^\pi dx\,\overset{u}{x}\cdot\overset{v'}{\sin(x)} = \overset{u\cdot v}{-x\cos x}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi dx\,\overset{u'\cdot v}{1\cdot(-\cos x)} \qquad (4)$$

$u = x$ $\quad v' = \sin(x)$

$$= -\pi\,(-1) - 0 + \underbrace{\sin x\Big|_0^\pi}_{=0} = \pi \qquad (5)$$

$u' = 1$ $\quad u = -\cos(x)$

Selber lesen: C2.5 Integrale elementarer Funktionen

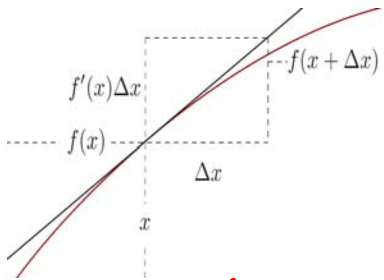
Zusammenfassung: C1-C2

ZC1

C1: Ableitung 1-dimensionaler Funktionen

Definition d. Ableitung:

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$



Jede Ableitung stellt eine lokale Näherungen einer Funktion durch eine lineare Funktion dar!

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \Delta x\,\frac{df(x)}{dx} \qquad (2)$$

Produktregel:

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}\,g(x) + f(x)\,\frac{d(g(x))}{dx} \qquad (3)$$

Kettenregel:

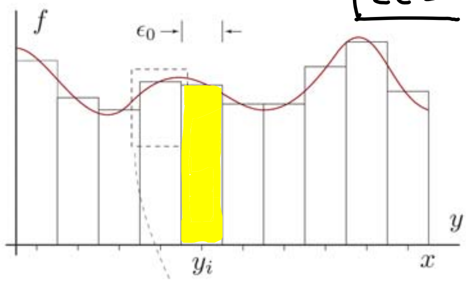
$$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{df(y)}{dy}\Big|_{y=g(x)}\,\frac{dg(x)}{dx} \qquad (4)$$

Ableitung d. Umkehrfunktion:

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=f^{-1}(y)}} \qquad (5)$$

C2 Integrale

ZC2



'Riemann-Summe' $= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} X_i$ (1)

Fläche unter Kurve: $F(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{x/\varepsilon} f_i \equiv \int_0^x dy\, f(y)$ (2)

'Hauptsatz': $F(x) = \int_0^x dy\, f(y) \Longrightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ (3)

Bestimmtes Integral: $\int_a^b dy\, f(y) = F(b) - F(a) \equiv F(y)\Big|_a^b$ (4)

'Variablen-Substitution': $\int_a^b dx\, \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) = \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y)$, $dy = dx\, y'(x)$, $x \mapsto y(x)$, $a \mapsto y(a)$, $b \mapsto y(b)$ (5)

'Partielle Integration' $\int_a^b dx\, u(x)\, v'(x) = u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\, u'(x)\, v(x)$ (6)