L2.1a

## L2. Vektorräume

Physikalische Größen lassen sich einteilen in:

1) Skalare: vollständig bestimmt durch Angabe einer Zahl (+ Einheit)

Beispiele: Masse, Volumen, Energie, Arbeit, Druck, Temperatur

2) Vektoren: vollständig bestimmt durch Angabe einer Zahl (+ Einheit)

und einer Richtung

Beispiele: Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls, Drehmoment, Feldstärke Verschiebung

L2.1b

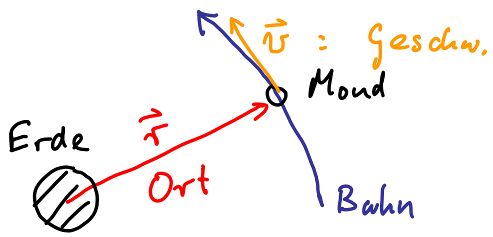
Übliche Notationen: $\vec{r}$, $\vec{r}$, $\underline{r}$, $\mathbf{r}$

JvD

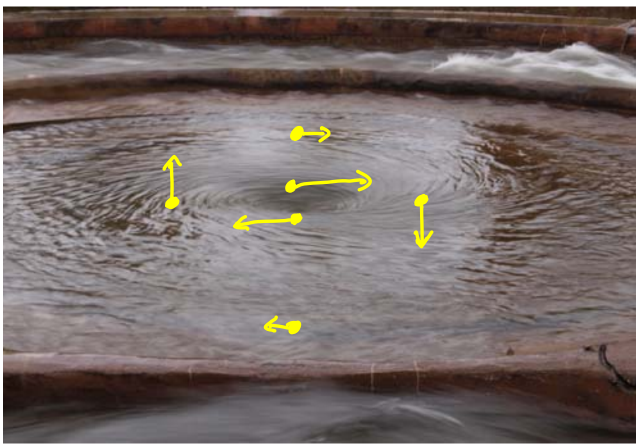
(Text: fett gedruckt)

Beispiele:

i) Mondbahn:




ii) Wasserstrudel:



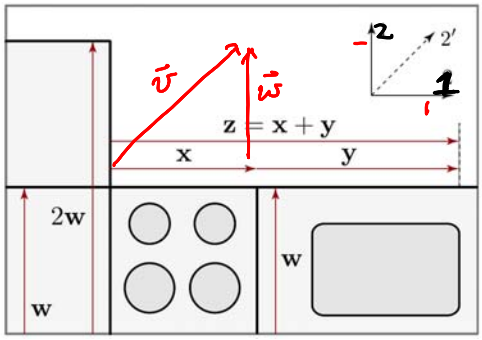
Geschwindigkeits"feld": $\vec{v}(\vec{r})$
(Geschw. ist Funktion vom Ort)

Allgemein: Vektor"feld"

## L2.1 Vektorraum - Motivation

L2.1c

Küchenplan:




Wie lässt sich Küchenplan quantitativ beschreiben, ohne eine Skizze zu machen?

Festlegungen eines 'Koordinatensystems' $\uparrow 2$

- Wahl v. zwei Richtungen: $\xrightarrow{1}$
- Wahl einer Längeneinheit entlang jeder Richtung (zB: 1 cm)

Relative Position zwischen zwei Punkten:

- wird eindeutig spezifiert durch einen Pfeil, oder Angabe v. zwei Zahlen ('Komponenten'):

$$\begin{pmatrix} \text{relativer Abstand entlang Achse } 1 \\ \text{relativer Abstand entlang Achse } 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \equiv \vec{x}$$

'Vektor'

[Altland-Delft Konvention: Index oben; viele anderen Texte: Index unten]

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

- parallele Pfeile stellen <u>denselben</u> Vektor dar, denn die <u>relative</u> Position zwischen End- und Anfangspunkt ist dieselbe
- geometrische Definition von:
  - Vektoraddition (komponentenweise): $\vec{v} = \vec{x} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2)
  - Multiplikation mit Skalar (komponentenweise): $\vec{y} = \frac{3}{2}\vec{x} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3)

## L2.2 Standard-Vektorraum $\mathbb{R}^n$

L2.2a

n-Komponenten-Vektor (Spaltennotation)

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \,\middle|\, x^1, x^2, \dots, x^n \in \mathbb{R} \right\} \qquad (1)$$

i-Komponente: $(\vec{x})^i = x^i$

$$\equiv \left( x^1, x^2, \dots, x^n \right)^T$$

'transponiert'

n-Komponenten-Vektor (Reihennotation)

Vektoraddition:

'komponentenweise Addition'

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\overrightarrow{x+y}) \equiv \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Beispiel in $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3)

Skalare Multiplikation:

'komponentweise Streckung'

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\underbrace{\lambda}_{\text{Skalar}}, \vec{x}) \mapsto (\lambda \vec{x}) \equiv \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \\ \vdots \\ \lambda x^n \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Beispiel in $\mathbb{R}^3$: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ (5)

## L2.3 Allgemeine Definition eines Vektorraums

L2.3a

Obige Vektoren in $\mathbb{R}^n$ haben eine Reihe v. wichtigen Eigenschaften [(siehe (i)-(ix) unten].
Diese werden als Axiome (= 'definierende Eigenschaften') für den Begriff 'Vektorraum' aufgefasst

(z.B. $\mathbb{R}$)

<u>Definition:</u> Ein F-<u>Vektorraum</u> über einem Körper F ist ein Trippel $(V, +, \cdot)$
bestehend aus einer Menge V, ausgestattet mit zwei Verknüfungsregeln,

Vektoraddition: $+ : (V, V) \longrightarrow V \quad , \quad (\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \overrightarrow{u+v} \equiv \vec{u} + \vec{v}$ (1)

Skalare Multiplikation: $\cdot : (F, V) \longrightarrow V \quad , \quad (a, \vec{v}) \longmapsto a \cdot \vec{v} \equiv (a\vec{v})$ (2)

mit folgenden Eigenschaften:

(I) $(V, +)$ ist eine kommutative (Abelsche) Gruppe: $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ :

i) Abgeschlossenheit: $\vec{u} + \vec{v} \in V$ (3)

ii) Assoziativität: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (4)

iii) Neutrales Element: $\vec{0}$ (Nullvektor) (5)

iv) Inverses Element von $\vec{v}$ : $-\vec{v}$ (6)

v) Kommutativiät: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (7)

---

(II) Eigenschaften der skalaren Multiplikation: $\forall\, a, b \in F \;,\; \vec{u}, \vec{v} \in V$ :

L2.3b

vi) Distributivität bzgl. Skalar-Addition: $(a+b) \cdot \vec{v} = (a\vec{v}) + (b\vec{v})$ (1)

vii) Distributivität bzgl. Vektor-Addition: $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (a\vec{u}) + (a\vec{v})$ (2)

viii) Assoziativität bzgl. Skalarmultiplikation: $(ab) \cdot \vec{v} = a\,(b\vec{v})$ (3)

ix) Neutrales Element: für $1 \in F$ gilt: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall\, \vec{v} \in V$ (4)

---

Anmerkungen:

- Die allgemeine Def. eines Vektorraums bezieht sich in keiner Weise of 'Koordinaten'
auch nicht auf die 'Dimension' der Vektorraums

- Für $a, b, c \in F \;,\; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ , gilt: (5)

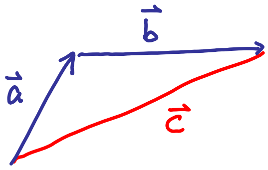
$a\vec{u} + b\vec{v} \in V \qquad a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \in V$ (6)

'Linearkombination v. Vektoren'

## L2.4 Vektorräume: Beispiele

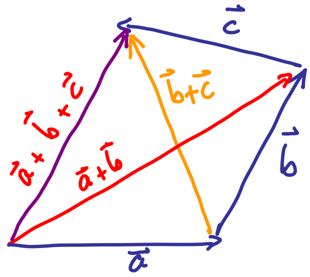
**Beispiel 1: Pfeile in 2 oder 3 Dimensionen** (geometrischer Ausgangspunkt für Vektorraum-Axiome)

(I) Addition von Pfeilen "+" ist "geometrisch" festgelegt:
(Anfang des zweiten Pfeils ans Ende des ersten Pfeils)




(i) Abgeschlossenheit: offensichtlich

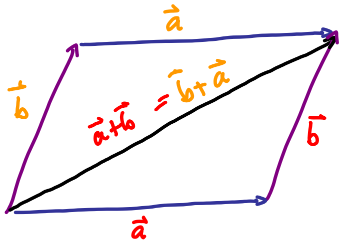
(ii) Assoziativität: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$




(iii) Neutrales Element: 'Nullvektor': $\vec{0} = 0$
(einziger Vektor ohne definierte Richtung)

(iv) Additives Inverse: $-\vec{a}$ ist antiparallel zu $\vec{a}$ :

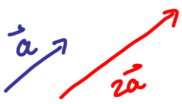

(v) Kommutativität: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$



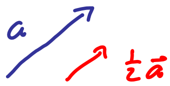



(II) Skalare Multiplikation "." ist "geometrisch" festgelegt: (mit $\lambda \in \mathbb{R}$)

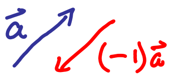
$\lambda > 1$ : Streckung




$1 > \lambda > 0$ : Stauchung

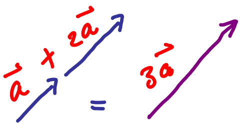



$\lambda < 0$ : Richtungsänderung

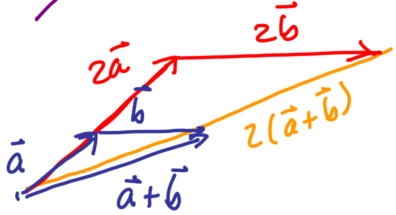



Also: $\lambda \vec{a}$ : Betrag $\equiv |\lambda||\vec{a}|$ Richtung $\begin{cases} \text{parallel zu } \vec{a} & \text{falls } \lambda > 0 \\ \text{antiparallel zu } \vec{a} & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases}$

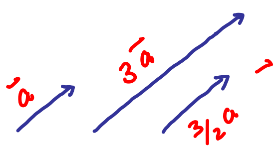
Distributivität bzgl. Skalaraddition: $(\mu + \lambda)\vec{a} = \mu\vec{a} + \lambda\vec{a}$




Distributivität bzgl. Vektoraddition: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$




Assoziativität: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$




$\frac{1}{2}(3\vec{a}) = \frac{3}{2}\vec{a}$

Neutrales Element: $1(\vec{a}) = \vec{a}$

Beispiel 2: Standard-Vektorräume: L2.4c

rationale Zahlen: $F = \mathbb{Q}$ : $(q_1, \dots, q_n)^T \in \mathbb{Q}^n$

reelle Zahlen: $F = \mathbb{R}$ : $(r_1, r_2, \dots, r_n)^T \in \mathbb{R}^n$

komplexe Zahlen: $F = \mathbb{C}$ : $(z^1, z^2, \dots, z^n)^T \in \mathbb{C}^n$

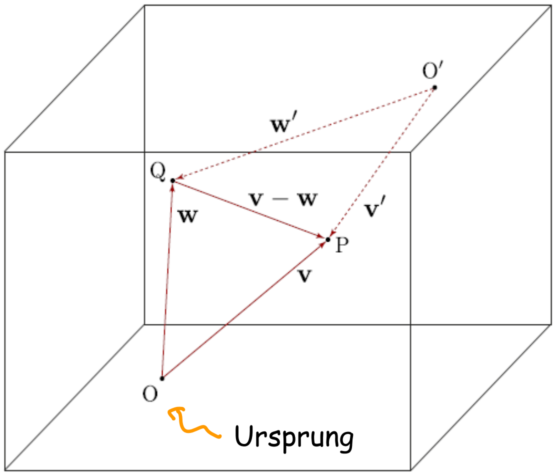
$z = x + iy$

Beispiel 3: d-dimensionaler Euklidischer Raum:

Vektorraum + Wahl eines Ursprungs

$(\mathbb{R}^d, O) = \mathbb{E}^d$

(z.B. Raum von Ortsvektoren)




Ursprung: $O \in \mathbb{E}^d$

Punkt P: $P = O + \vec{v} \in \mathbb{E}^d$

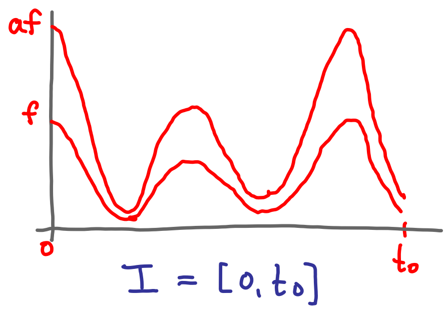
Punkt Q: $Q = O + \vec{w} \in \mathbb{E}^d$

Vektor v. P relativ zu O: $\vec{v} \in \mathbb{R}^d$

Vektor v. P relativ zu Q: $P - Q = (O + \vec{v}) - (O + \vec{w}) = \vec{v} - \vec{w} \in \mathbb{R}^d$

Beispiel 4. Raum v. Funktionen L2.4d

$f : \underbrace{I}_{\equiv [0, t_0]} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)$ $\qquad$ $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto g(t)$



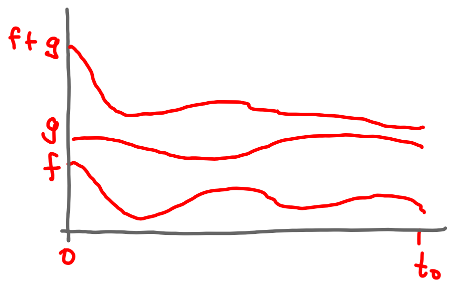

Raum aller solcher Funktionen heißt: $\mathcal{L}^2(I)$

Definiere:

Skalare Multiplikation: $(a \in \mathbb{R})$

$$a \cdot f : I \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto (a \cdot f)(t) \equiv a f(t) \qquad (1)$$

Addition:




$$f + g : I \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto (f+g)(t) \equiv f(t) + g(t) \qquad (2)$$

$(\mathcal{L}^2(I), +, \cdot)$ ist ein Vektorraum! (siehe Übung)

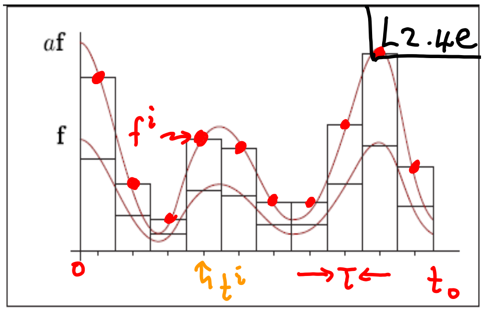
## Beispiel 5: Diskretisierte Funktionen

L2.4e

$$f : [0, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(t)$$

Diskretisiere die Zeit: $t^i = (i - 1/2)\tau \quad , \; i = 1, \dots, N$

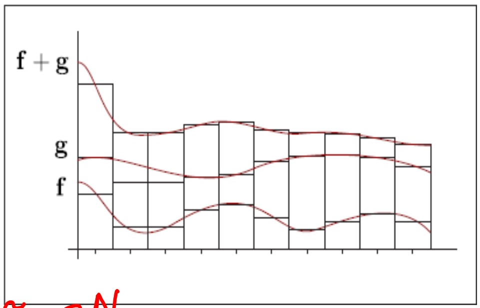
$\tau = t_0/N \; , \qquad f^i = f(t^i)$




Diskretisierte Funktion: $\vec{f} = (f^1, \dots, f^N)^T$

Vektoraddition: $(\vec{f} + \vec{g})^i = (\vec{f})^i + (\vec{g})^i$

Skalarmultiplikation: $(a \cdot \vec{f})^i = a(\vec{f})^i$




Vektorraum: $\left(\{\vec{f} \mid (\vec{f})^i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N\}, +, \cdot\right) \cong \mathbb{R}^N$

Weitere Beispiele von Vektorräumen (Zukunftsmusik):
- (Ort,Impuls) im klassischen Phasenraum (T1: Klassische Mechanik)
- Zustandsvektoren in der Quantenmechanik (T2: Quantenmechanik)
- Matrizen (P1: Experimentalphysik, T2: Quantenmechanik)
- Elektrische und Magnetische Felder (T3: Elektrodynamik)
- Quantenfelder (T6: Quantenfeldtheorie)

## Beispiel 6: Polynome

L2.4f

Polynom v. Grad $\le n$: $\quad p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}$ (1)

$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i \quad , \quad b_i \in \mathbb{R}$ (2)

Menge aller Polynome v. Grad $\le n$: $\quad \mathcal{P}_n \equiv \{ p(x) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$ (4)

koeffizientenweise Addition der Funktionswerte: $\quad (p+q)(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i = p(x) + q(x)$ (5)

liefert wieder ein Polynom

koeffizientenweise Skalarmultiplikation des Funktionswerte: $\quad (\lambda p)(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i x^i = \lambda p(x)$ (6)

Definiere also zwei Veknüpfungen:

Vektoraddition: $\quad + : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n, \quad (p, q) \mapsto p + q$ (7)

Skalarmultiplikation: $\quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n, \quad (\lambda, p) \mapsto \lambda p$

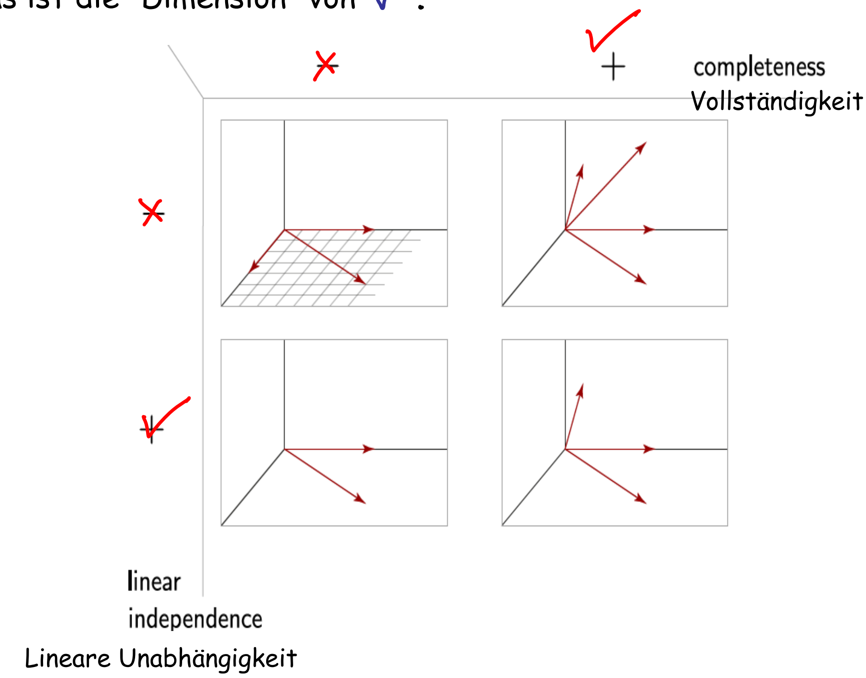
Dann ist $(\mathcal{P}_n, +, \cdot)$ ein Vektorraum!

## L2.5 Basis und Dimension



Ausgangsfrage: gegeben $\mathbb{F}$- Vektorraum $V$, wieviele Komponenten hat $\vec{v} \in V$ ?

Wieviele 'unabhängige' Vektoren sind nötig und ausreichend,
um alle anderen Vektoren durch sie ausdrücken zu können?
Formaler: was ist die 'Dimension' von $V$ ?






Sei S eine Menge von $m$ Vektoren:

$$S \equiv \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}, \qquad \vec{v}_i \in V \qquad (\vec{v}_i \neq \vec{0}) \qquad (1)$$

Wir schreiben Indizes unten, wenn sie Vektoren (nicht Komponenten) unterscheiden !

**Definition: 'Span'**
'lineare Hülle'

$$\text{Span}(S) \equiv \{a^1 \vec{v}_1 + a^2 \vec{v}_2 + \ldots + a^m \vec{v}_m \mid a^1, \ldots, a^m \in \mathbb{F}\}$$

= alle möglichen 'Linearkombination' der Vektoren $\{\vec{v}_i\}$

- span(S) ist selbst ein Vektorraum (warum?!)

- allgemein: ein Vektorraum $W$ mit $W \subseteq V$, heisst 'Unterraum' von $V$

  $\subseteq$: 'ist eine Teilmenge von, oder ist gleich'

  $\subsetneq$: 'ist eine Teilmenge von, und nicht gleich'

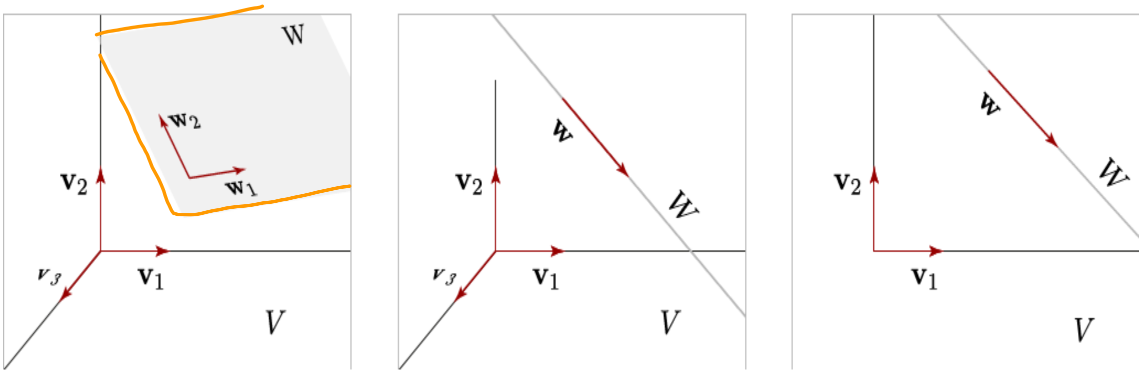
  $W \subsetneq V$ : 'echter Unterraum' von $V$

- $\text{span}(S) \subseteq V$ ist ein Unterraum von V.

Beispiele v. Unterräumen: L2.5c

$W = \mathrm{span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ $\quad$ $W = \mathrm{span}\{\vec{w}\}$ $\quad$ $W = \mathrm{span}\{\vec{w}\}$

$\dim W = 2$ $\quad$ $\dim W = 1$ $\quad$ $\dim W = 1$




$\dim V = 3$ $\quad$ $\dim V = 3$ $\quad$ $\dim V = 2$

Allgemeine Frage: unter welchen Umständen ist $\mathrm{span}(S) = V$ ?

L2.5d

<u>Definition: lineare Unabhängigkeit</u>
(dient der Verallgemeinerung des Begriffs einer 'Basis')

Die Menge der Vektoren $S \equiv \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ , (1)

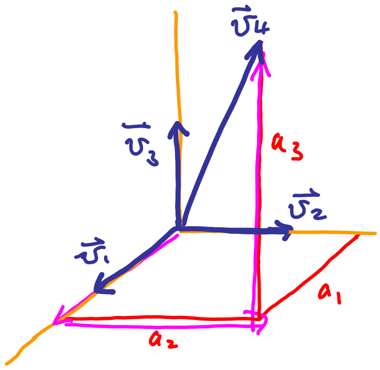
heißt 'linear unabhängig', falls es nicht möglich ist, eine nicht-triviale Linearkombination zu finden die Null liefert. M.a.W:

falls aus $a^1 \vec{v}_1 + a^2 \vec{v}_2 + \ldots + a^m \vec{v}_m = \vec{0}$

folgt dass $a^1 = a^2 = \ldots = a^m = 0$

Umgekehrt: S ist 'linear abhängig', falls sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen schreiben lässt:

z.B. $\vec{v}_m = -\frac{1}{a^m}\left(a^1 \vec{v}_1 + \ldots + a^{m-1} \vec{v}_{m-1}\right)$




geometrische Anschauung

In Skizze: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linear <u>un</u>abhängig

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ linear <u>ab</u>hängig

Beispiel: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$



$$-\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3 = -\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \vec{v}_1$$

$\Longrightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linear abhängig

Aber: $a^1\vec{v}_1 + a^2\vec{v}_2 = a^1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + a^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^1+a^2\\2a^2\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Nur möglich falls $a^1 = 0, \quad a^2 = 0 \quad \Longrightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ linear <u>un</u>abhängig

Analog gilt auch: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ " "

$\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ " "



Falls S linear abhängig ist, enthält S 'redundante' Vektoren.
Span ändert sich nicht, wenn linear abhängige Vektoren weggelassen werden:

Falls $\vec{v}_m = \sum_{i=1}^{m-1} a^i \vec{v}_i$ (Intuitiv: der Vektor $\vec{v}_m$ bringt keine Richtung ein, die nicht schon in $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-1}$ enthalten ist)

gilt: $$\mathrm{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-1}, \vec{v}_m\} = \mathrm{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-1}\} \qquad (1)$$

(z.B. $\vec{v}_4$ auf Seite L2.3d)

Empfehlung: Redundanzen vermeiden, immer mit linear unabhängigen Vektoren arbeiten!

<u>Definition: Vollständigkeit</u>

$S$ heisst 'vollständig', falls $\mathrm{span}(S) = V$ (2)

d.h. jeder Vektor in V lässt sich als Linearkombination v. Vektoren in S schreiben.

Definition: Basis

Falls $S \equiv \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ (i) vollständig und (ii) linear unabhängig ist, (1)

bildet S eine 'Basis' für V. Die Anzahl Elemente der Basis heisst die 'Dimension' v. V

z.B.: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Konsequenzen:

(i): jeder Vektor $\vec{v} \in V$ lässt sich schreiben als Linearkombination der Form:

$$\vec{v} = a^1 \vec{v}_1 + a^2 \vec{v}_2 + \ldots + a^m \vec{v}_m \tag{2}$$

(ii): diese Linearkombination ist eindeutig ('unique');

denn wäre sie nicht eindeutig, d.h., gäbe es auch eine andere Linearkombination für $\vec{v}$

$$\vec{v} = b^1 \vec{v}_1 + b^2 \vec{v}_2 + \ldots + b^m \vec{v}_m \, , \tag{3}$$

würde gelten:

(2) − (3): $\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (a^1 - b^1)\vec{v}_1 + (a^2 - b^2)\vec{v}_2 + (a^m - b^m)\vec{v}_m$ (4)

im Widerspruch zur Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit v. S !



Einsteinsche Summenkonvention (ES)

$$A^1 B_1 + A^2 B_2 + \ldots + A^n B_n = \sum_{i=1}^{n} A^i B_i = \sum_i A^i B_i \overset{ES}{=} A^i B_i \tag{1}$$

Summenzeichen verkürzt Formeln!

Summationsgrenzen sind ohnehin immer dieselben, lasse sie weg!

ES: wenn ein 'Paar von Wiederholten Indizes' auf derselben Seite der Gleichung vorkommt, ist implizit auch eine Summe über diesen Index gemeint!

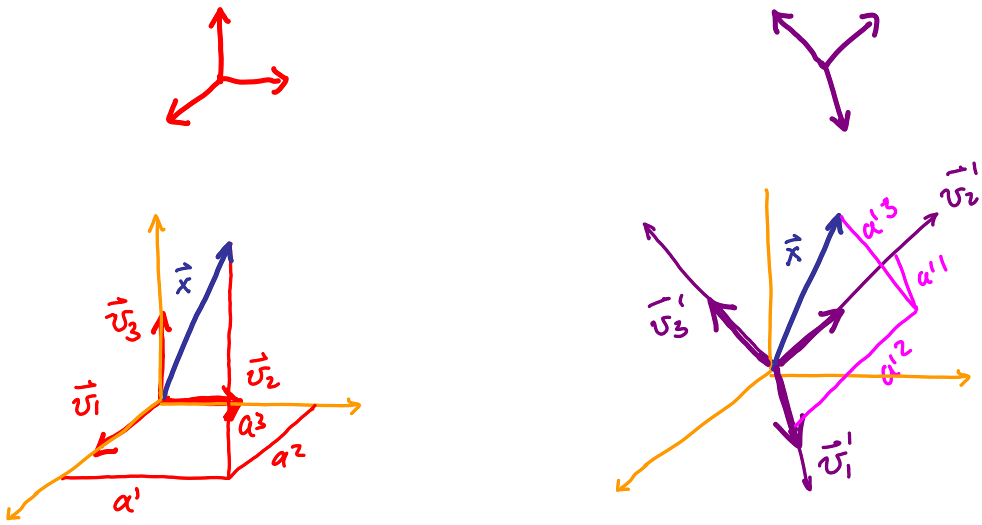
In Altland-Delft-Konvention enthält eine ES-Summe immer einen Index oben, einen unten.

$$A_j{}^1 B_1 + A_j{}^2 B_2 + \ldots + A_j{}^n B_n = \sum_{i=1}^{n} A_j{}^i B_i = \sum_i A_j{}^i B_i \overset{ES}{=} A_j{}^i B_i$$

Über i wird summiert (wiederholtes Indexpaar auf derselben Seite der Gleichung)

Über j wird nicht summiert: j kommt auf jeder Seite der Gleichung nur einmal vor!

Man kann zeigen:
- für jeden Vektorraum existiert eine Basis
- alle Basen bestehen aus gleich vielen Vektoren
- alle Basen lassen sich durch einander ausdrücken ("Basistransformation")






Standardbasis ('kanonische Basis') in $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \;\middle|\; x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R} \right\} \qquad (1)$$

Standardbasis: $\{ \hat{e}_i \mid i = 1, \dots, n \}$ mit Basisvektoren $\hat{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Position i (2)

'Hut' zeigt an, dass ein 'Einheitsvektor gemeint ist]

Kompakte Notation für j-Komponente v. $\hat{e}_i$ : $(\hat{e}_i)^j = \delta_i{}^j$ (3)

'Kronecker-delta' Symbol: $\delta_i{}^j \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ $\begin{pmatrix} \delta_1{}^1 & \delta_1{}^2 & \delta_1{}^3 \\ \delta_2{}^1 & \delta_2{}^2 & \delta_2{}^3 \\ \delta_3{}^1 & \delta_3{}^2 & \delta_3{}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4)

Entwicklung eines allgemeinen Vektors nach Standardbasis: $\vec{x} = x^1 \hat{e}_1 + \dots + x^n \hat{e}_n \overset{\text{ES}}{=} x^i \hat{e}_i$ (5)

## L2.6 Bezug zwischen n-dimensionalem Vektorraum V und $\mathbb{R}^n$

L2.6a

$$\{\vec v_i\} \equiv \{\vec v_1, \dots, \vec v_n\} \quad \text{sei eine Basis für V} \qquad (1)$$

Entwicklung eines allgemeinen Vektors in dieser Basis:

$$\vec x = x^1 \vec v_1 + \dots + x^n \vec v_n \overset{ES}{=} x^i \vec v_i \qquad (2)$$

Die Basis definiert eine bijektive Abbildung, die jeden Vektor $\vec x \in V$ auf seinen Koordinatenvektor in $\mathbb{R}^n$ abbildet:

$$\phi_{\vec v} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec x = x^i \vec v_i \longmapsto \phi_{\vec v}(\vec x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

deutet an, dass die Abbildung sich auf die $\vec v$ -Basis bezieht!

auf gut Deutsch:
schreibe statt dem Vektor $\vec x$ nur seine Komponenten bezüglich den Basisvektoren $\vec v_i$ in Spaltennotation

Basisvektoren in V werden auf Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^n$ abgebildet:

Position i

$$\phi_{\vec v}(\vec v_i) \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(i.2)}{=} \hat e_i \qquad (4)$$

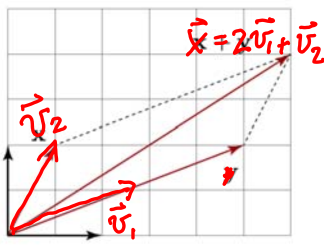
---

L2.6b

Die Abbildung $\phi_{\vec v}$ 'respektiert' die Regeln der Vektoraddition und Skalarmultiplikation:

$$\phi_{\vec v}(\vec x + \vec y) \overset{(6a.3)}{=} \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix} \overset{(2a.2)}{=} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \overset{(6a.3)}{=} \phi_{\vec v}(\vec x) + \phi_{\vec v}(\vec y) \qquad (1)$$

Erst addieren, dann abbilden = erst abbilden, dann addieren!

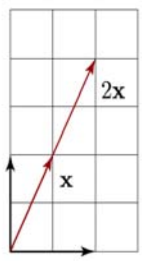



Beispiel für n=2:

$$\vec x = \overset{2}{\overset{\shortparallel}{x^1}} \vec v_1 + \overset{1}{\overset{\shortparallel}{x^2}} \vec v_2 \overset{(6a.4)}{\longmapsto} \phi_{\vec v}(\vec x) = \overset{2}{\overset{\shortparallel}{x^1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{1}{\overset{\shortparallel}{x^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Linearkombination in V $\qquad$ Linearkombination in $\mathbb{R}^2$

$$\phi_{\vec v}(a \vec x) \overset{(6a.3)}{=} \begin{pmatrix} a x^1 \\ \vdots \\ a x^n \end{pmatrix} \overset{(2a.4)}{=} a \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \overset{(6a.3)}{=} a\, \phi_{\vec v}(\vec x) \qquad (3)$$




Erst multiplizieren, dann abbilden = erst abbilden, dann multiplizieren !

## Homomorphismus, Isomorphismus

L2.6c

A und B seien zwei Mengen, die beide mit Verknüpfnungsregeln ausgestattet sind
[hier: $(A, +, \cdot)$ und $(B, +, \cdot)$ ]

Eine Abbildung $F : A \longrightarrow B$, die diese Regeln 'respektiert',

[hier: $F(x+y) = F(x) + F(y)$, $\quad F(ax) = a\,F(x)$ ] (1)

heisst 'Homomorphismus'. Falls sie außerdem bijektiv ist: 'Isomorphismus'
'homo' = 'gleich', 'morph' = 'Form'

(6b.1) & (6b.2) bedeuten: $\phi_{\vec v}$ ist ein Isomorphismus zwischen $V$ und $\mathbb{R}^n$

$V$ und $\mathbb{R}^n$ sind 'isomorph': $\boxed{V \cong \mathbb{R}^n}$ (sehr starke Identifizierung!) (2)
[aber nicht eindeutig, da Basis-abhängig]

Beispiel einer Abbildung, die bijektiv ist, aber <u>kein</u> Isomorphismus:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = x^3 \tag{3}$$

denn $f(x+y) = (x+y)^3 \neq x^3 + y^3$ (4)

## Zusammenfassung: L2 Vektorräume

ZL2a

$\mathbb{F}$-Vektorraum: $(V, +, \cdot)$

Vektoraddition: $+ : (V, V) \longmapsto V$
$(\vec a, \vec b) \longmapsto \vec a + \vec b$

Axiome:
(i)-(v): kommutative Gruppe

Skalare Multiplikation: $\cdot : (\mathbb{F}, V) \longmapsto V$
$(\lambda, \vec a) \longmapsto \lambda \cdot \vec a \equiv (\lambda \vec a)$

(vi,vii) distributiv
(viii) assoziativ
(ix) Identitätselement $1$

Wichtigstes Beispiel: $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R} = \{ \vec a = (a^1, \dots, a^n)^T \mid a, \dots, a \in \mathbb{R} \}$$

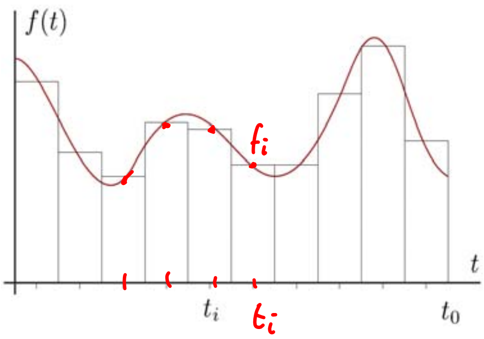
Vektoraddition: $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\vec a, \vec b) \mapsto (\vec a + \vec b) \equiv \begin{bmatrix} a^1 + b^1 \\ \vdots \\ a^n + b^n \end{bmatrix}$

Skalare Multiplikation: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (\lambda, \vec b) \mapsto (\lambda \vec b) \equiv \begin{pmatrix} \lambda b^1 \\ \vdots \\ \lambda b^n \end{pmatrix}$

ZL2b

Weiteres Beispiel: Diskretisierte Funktionen:

Diskretisierte Funktion: $\vec{f} = (f^1, \dots, f^N)^T$




Vektoraddition: $(\vec{f}+\vec{g})^i = (\vec{f})^i + (\vec{g})^i$

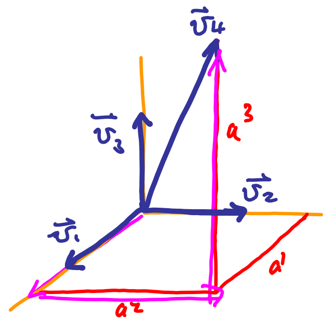
Skalarmultiplikation: $(a \cdot \vec{f})^i = a(\vec{f})^i$

Vektorraum: $\left(\{\vec{f} \mid (\vec{f})^i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N\}, +, \cdot\right)$

ZL2c

Basis und Dimension

$$S \equiv \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} \stackrel{?}{=} V \qquad (1)$$




Span$(S)$ $\equiv$ alle möglichen Linearkombination der Vektoren $\{\vec{v}_i\}$ (2)

'Linear unabhängig', falls $a^i \vec{v}_i = \vec{0} \Longrightarrow a^i = 0 \;\; \forall i$ (3)

S ist 'vollständig', falls $\text{span}(S) = V$ (4)

S bildet 'Basis', falls S vollständig und linear unabhängig ist. (5)

Standardbasis in $\mathbb{R}^n$: $\hat{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, i-Position

j-Komponente v. i-tem Basisvektor: $(\hat{e}_i)^j = \delta_i{}^j$ (6)

'Kronecker-delta' Symbol: $\delta_i{}^j \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^j \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \qquad (7)$$