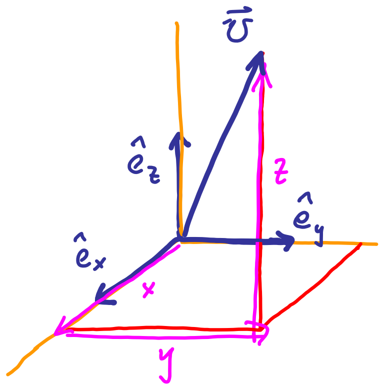
L3 Euklidische Geometrie: Längen, Winkel, senkrechte Vektoren...

(benötigt neue Struktur über Vektorraumaxiome hinaus)

Sei $\vec{v} = \hat{e}_x\, x + \hat{e}_y\, y + \hat{e}_z\, z$



Länge von $\vec{v}$ nach Pythagoras:

$$\text{Länge}^2 \equiv |\vec{v}|^2 = \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{\text{quadratisch in Komponenten!}}$$

- Für $\mathbb{R}^n$: Skalarprodukt
- Mathematische Abstraktion: inneres Produkt
- Länge
- Winkel zwischen zwei Vektoren
- Orthonormalbasis (alle Basisvektoren sind normiert, und zueinander orthogonal)
- Falls Basisvektoren nicht orthonormal sind: Metrik

L3.1 Sklararprodukt in $\mathbb{R}^n$:

Def: Skalarprodukt ist eine Verknüpfung v. zwei Vektoren in $\mathbb{R}^n$ zu einer reellen Zahl:

Sei $\vec{v} = (v^1, \dots, v^n)^T = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ $\quad \vec{w} = (w^1, \dots, w^n)^T = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$ (1)

Skalarprodukt:

$\langle\, ,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (Skalar)

in Physik bevorzugte Notation

$$(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}_{} \equiv \vec{v} \cdot \vec{w} \equiv v^1 w^1 + v^2 w^2 + \dots + v^n w^n \quad (2)$$

Notation verdeutlicht, dass diese Zahl v. zwei Vektoren abhängt

$$= v^i w^i = v^i \delta_{ij} w^j \quad (3) \qquad \text{mit } v_j \equiv v^i \delta_{ij} = v^j \quad (4)$$

$$= v_i w^i \quad (5)$$

Index-Konvention: Indizes
vom 'linken Vektor' unten,
vom 'rechten Vektor' oben

Unten/Oben Notation ist nützlich für Verallgemeinerungen; zB.
- zu Vektorräumen mit 'nicht-orthogonalen Basisvektoren' (siehe 'Metrik');
- oder zu kompl. Vektorraum, $\mathbb{C}^n$

Für $\mathbb{R}^n$ wäre die Notation

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v^i w^i = v_i w_i \quad (8)$$

genauso sinnvoll/nützlich!

Beispiel: $\langle (1, 2, 0, -1)^T, (3, -1, 4, 2)^T \rangle$ (6)

$= 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 4 + (-1)\cdot 2 = -1$ (7)

Eigenschaften des Skalarprodukts: L3.1c

(i) Symmetrie: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ (1)

(ii) Linearität bzgl. Vektoraddition: $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (2)

(iii) Linearität bzgl. Skalarmultiplikation: $\langle a\vec{v}, \vec{w} \rangle = a \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (3)

(iv) Positiv definit: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0 \quad \forall\, \vec{v} \in V, \vec{v} \neq 0$ (4)

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$ (5)

'wenn, und nur wenn'

Eigenschaften (i) bis (iv) gelten offensichtlich:
(i) Symmetrie: per Konstruktion
(ii) & (iii) Linearität: denn Skalarprodukt is linear in Komponenten v. $\vec{v}$ und $\vec{w}$
(iv) Positiv definit: denn

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \overset{(b.3)}{=} v_1 v^1 + \ldots + v_n v^n \overset{(b.5)}{=} v_i v^i \overset{(b.4)}{=} \sum_{i=1}^{n} (v^i)^2 \geq 0 \qquad (6)$$

$\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit Skalarprodukt heißt 'Euklidischer Raum': $(\mathbb{R}^n, \bullet) = E^n$ (7)

[derselbe Name wie für Vektorraum plus Ursprung ! Grund: sie sind isomorph!, siehe AD-L3.3]

Definition: Norm [Länge] (Skalarprodukt zweier gleichen Vektoren) L3.1d

$$\| \ \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{v} \longmapsto \|\vec{v}\| \equiv \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \qquad (1)$$

$$= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \qquad (2)$$

Länge nach Pythagoras

$$\overset{(c.4)}{=} \sqrt{v_1 v^1 + \ldots + v_n v^n} \equiv |\vec{v}| \qquad (3)$$

alternative Notation für Norm in $\mathbb{R}^n$

Es gilt: $\|a\vec{v}\| \overset{(b.5)}{=} |a| \, \|\vec{v}\|$ (4)

Norm beantwortet die Frage: 'wie lang ist ein Vektor'

Skalarprodukt beantwortet die Frage: 'wie parallel sind zwei Vektoren?'

Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU)

L3.1e

$$|x| \overset{\text{def}}{=} x\cdot \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x>0 \\ -x & \text{''} \quad x<0\end{cases} \longrightarrow |\langle \vec v,\vec w\rangle| \le \|\vec v\|\,\|\vec w\| \qquad (1)$$

Beweis:
Betrachte

$$0 \overset{(C4),(C5)}{\le} \langle \vec v - a\vec w,\ \vec v - a\vec w\rangle \qquad (a \in \mathbb{R} \text{ zunächst beliebig}) \qquad (2)$$

$$\overset{(C2,\,C3)}{=} \langle \vec v,\vec v\rangle \underbrace{- a\langle \vec v,\vec w\rangle - a\langle \vec w,\vec v\rangle}_{(C1):\ 2a\langle\vec v,\vec w\rangle} + a^2\langle \vec w,\vec w\rangle \qquad (3)$$

wähle nun: $a = \dfrac{\langle\vec v,\vec w\rangle}{\|\vec w\|^2}$ (5)
Skalare

$$= \|\vec v\|^2 - 2\underbrace{a\langle\vec v,\vec w\rangle}_{(5):\ \frac{\langle\vec v,\vec w\rangle^2}{\|\vec w\|^2}} + \underbrace{a^2\|\vec w\|^2}_{\frac{\langle \vec v,\vec w\rangle^2}{\|\vec w\|^{\cancel{4}\,2}}\cancel{\|\vec w\|^2}} \qquad (4)$$

$$0 \le \|\vec v\|^2 - \frac{\langle\vec v,\vec w\rangle^2}{\|\vec w\|^2} \qquad (6)$$

Umstellen: $\langle \vec v,\vec w\rangle^2 \le \|\vec v\|^2\,\|\vec w\|^2$ (7) $\qquad \sqrt{(7)} \Rightarrow$ CSU ✓

Geometrische Interpretation der CSU:

L3.1f

Für 'kolineare', d.h. 'parallele' Vektoren, $\vec w = \lambda\vec v$ gilt Gleichheitszeichen in CSU: (1)

Check: $|\langle\vec v,\vec w\rangle| = |\lambda\langle\vec v,\vec v\rangle| = \lambda\|\vec v\|^2 = \|\vec v\|\,\|\lambda\vec v\| = \|\vec v\|\,\|\vec w\|$ (2)

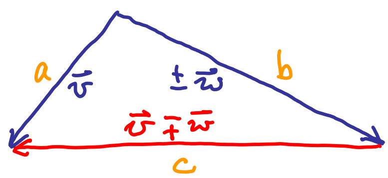
Umkehrschluss: je kleiner $|\langle\vec v,\vec w\rangle|$ im Vergleich zu $\|\vec v\|\,\|\vec w\|$, (3)
je weniger sind $\vec v$ und $\vec w$ 'parallel'.

CSU impliziert die Dreiecksungleichung:

$$\underset{a}{\|\vec v\|} + \underset{b}{\|\vec w\|} \ \underset{\ge}{\ge}\ \underset{c}{\|\vec v \mp \vec w\|} \qquad (4)$$

'gilt für beide Vorzeichen'

Geometrische Anschauung in $\mathbb{R}^2$



$\|\vec v\| = a$
$\|\vec w\| = b$
$\|\vec v\pm\vec w\| = c$

Beweis:

$$(\|\vec v\|+\|\vec w\|)^2 = \overbrace{\|\vec v\|^2}^{\langle\vec v,\vec v\rangle} + \underbrace{2\|\vec v\|\,\|\vec w\|}_{\text{CSU: } \ge 2|\langle\vec v,\vec w\rangle| \ \ge\ \mp 2\langle\vec v\cdot\vec w\rangle\ (6)} + \overbrace{\|\vec w\|^2}^{\langle\vec w,\vec w\rangle} \qquad (5)$$

$$\ge \langle\vec v\mp\vec w,\ \vec v\mp\vec w\rangle = \|\vec v\mp\vec w\|^2 \Rightarrow (4)\ \checkmark \qquad (7)$$

'Winkel' zwischen zwei Vektoren

L3.1g

Definition eines 'Relativwinkels':

$$\cos(\measuredangle(\vec v,\vec w)) = \frac{\langle \vec v,\vec w\rangle}{\|\vec v\|\,\|\vec w\|} \in [-1,1] \qquad (1)$$

falls $\vec v = -\vec w$

falls $\vec v = \vec w$

$\measuredangle(\vec v,\vec w) = \theta$

bereits bekannt aus CSU

In $\mathbb{R}^2$ entspricht $\measuredangle(\vec v,\vec w)$ dem geometrischem Winkel zwischen $\vec v$ und $\vec w$.

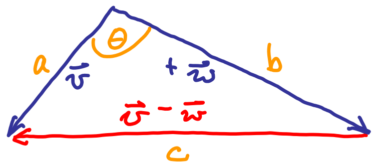
Begründung: einerseits gilt

$$\underbrace{\langle \vec v,\vec v\rangle}_{a^2} + \underbrace{\langle \vec w,\vec w\rangle}_{b^2} - \underbrace{\overbrace{\langle \vec v-\vec w,\ \vec v-\vec w\rangle}^{[\cancel{\langle \vec v,\vec v\rangle} + \cancel{\langle \vec w,\vec w\rangle} - 2\langle \vec v,\vec w\rangle]}}_{c^2} \overset{(C.2)}{=} \underbrace{2\langle \vec v,\vec w\rangle}_{(3):\ ab\cos\theta} \qquad (2)$$

andrerseits gilt, aus geometrischer Anschauung:

$$\Longrightarrow \quad a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\theta \qquad (3)$$

'Cosinus-Satz'



Vergleich v. (2) und (3) liefert:

$$\langle \vec v,\vec w\rangle = ab\cos\theta = \|\vec v\|\,\|\vec w\|\cos\theta \qquad (4) \quad \Longleftrightarrow \quad (1)$$

$\|\vec v\| = a$

$\|\vec w\| = b$

$\|\vec v - \vec w\| = c$

Def. Einheitsvektor

(wir nutzen 'Hut' für Einheitsvektoren)

L3.2a

Für $\vec w \in \mathbb{R}^n$, $\vec w \neq 0$ ist $\hat w \equiv \frac{\vec w}{\|\vec w\|}$

ein 'Einheitsvektor' / 'normierter Vektor', kolinear zu $\vec w$ (1)

'normiere einen Vektor' = 'bilde kolinearen Einheitsvektor'

Falls $\langle \vec v,\vec w\rangle = 0$ werden sie 'orthogonale Vektoren' genannt: $\vec v \perp \vec w$ (2)

$[\theta = \pi/2 \text{ in } (1g.1)]$

'Projektion' v. $\vec v$ auf $\vec w$: $\vec v_\parallel = \|\vec v_\parallel\|\,\hat w = \boxed{\langle \vec v,\hat w\rangle\,\hat w}$

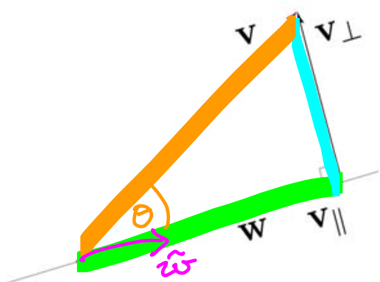
$(\vec v_\parallel \parallel \vec w)$

denn $\|\vec v_\parallel\| = \|\vec v\|\cos\theta \overset{(1g.1)}{=} \cancel{\|\vec v\|}\,\frac{\langle \vec v,\vec w\rangle}{\cancel{\|\vec v\|}\,\|\vec w\|} = \langle \vec v,\hat w\rangle$

'Orthogonales Komplement' zu $\vec w$: $\vec v_\perp \equiv \vec v - \vec v_\parallel$

$\overset{(3)}{=} \boxed{\vec v - \langle \hat w,\vec v\rangle\,\hat w}$ (4)

$(\vec v_\perp \perp \vec w)$



$\|\vec v_\parallel\| = \|\vec v\|\cos\theta$

[Check: $\langle \hat w,\vec v_\perp\rangle \overset{(4)}{=} \langle \hat w,\vec v\rangle - \underbrace{\langle \hat w,\hat w\rangle}_{(1):\ =1}\langle \hat w,\vec v\rangle = 0$] (5)

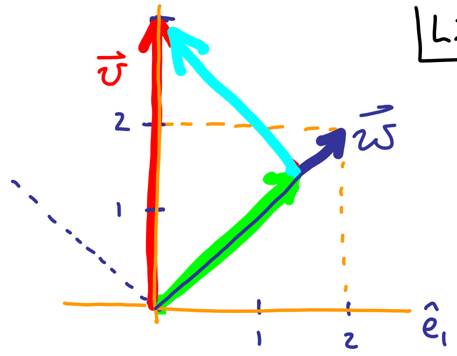
'Zerlegung von $\vec v$ bezüglich $\vec w$: $\vec v \overset{(4)}{=} \vec v_\parallel + \vec v_\perp$ (6)

L3.2b

Beispiel:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Zerlege $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ (2)



$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \qquad \hat{w} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$\hat{w}\cdot\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad (4)$$

$$\vec{v}_{\parallel} = (\hat{w}\cdot\vec{v})\,\hat{w} = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ✓ \quad \|\vec{v}_{\parallel}\| = \frac{3}{2}\sqrt{1+1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad (5)$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ✓ \quad \|\vec{v}_{\perp}\| = \frac{3}{2}\sqrt{1+1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad (6)$$

entspricht der Erwartung aus der Skizze !

Check: $\|\vec{v}_{\parallel}\|^2 + \|\vec{v}_{\perp}\|^2 = \sqrt{9/2 + 9/2} = 3 = \|\vec{v}\|^2$ (7)

L3.2c

<u>Def:</u> der Satz v. Vektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$

- ist 'orthogonal' falls $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ (1)

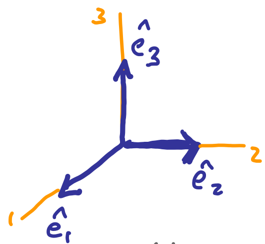
- ist 'ortho<u>norm</u>alen' falls $\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ (2)
  (d.h. orthogonal <u>und</u> normiert) (L2.5h.4)

- bildet eine '<u>Orthonormalbasis</u>' falls er orthonormal und vollständig ist.

Unsere Notationskonvention für Orthonormalbasis: $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \dots, \hat{e}'_n\}$, $\langle \hat{e}'_i, \hat{e}'_j \rangle = \delta_{ij}$ (3)
[manchmal auch ohne ']

Kanonisches Beispiel: (L2.5h.2)

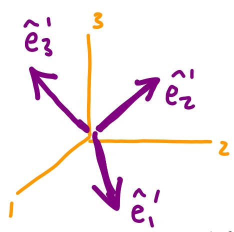
$$\hat{e}_1 = (1,0,0)^T$$
$$\hat{e}_2 = (0,1,0)^T$$
$$\hat{e}_3 = (0,0,1)^T$$



(4)

Rotierte Version von (4):

$$\hat{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$$
$$\hat{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T$$
$$\hat{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^T$$



(5)

L3.2d

Jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ hat eindeutige Entwicklung bzgl. Orthonormalbasis:

$$\vec{v} = \hat{e}'_1 v^1 + \dots + \hat{e}'_i v^i + \dots + \hat{e}'_n v^n \overset{ES}{=} \hat{e}'_i v^i \qquad (1)$$

Entwicklungskoeffizient v^j entspricht der 'Projektion' von (1) auf Basisvektor $\hat{e}'_j$:

$$\langle \hat{e}'_j, (1)\rangle: \quad \langle \hat{e}'_j, \vec{v}\rangle \overset{(1)}{=} \langle \hat{e}'_j, \hat{e}'_1\rangle v^1 + \dots + \underbrace{\langle \hat{e}'_j, \hat{e}'_i\rangle}_{\overset{(c.3)}{=} \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}} v^i + \langle \hat{e}'_j, \hat{e}'_n\rangle v^n = v^j \qquad (2)$$

Kompaktversion mit ES-Notation:

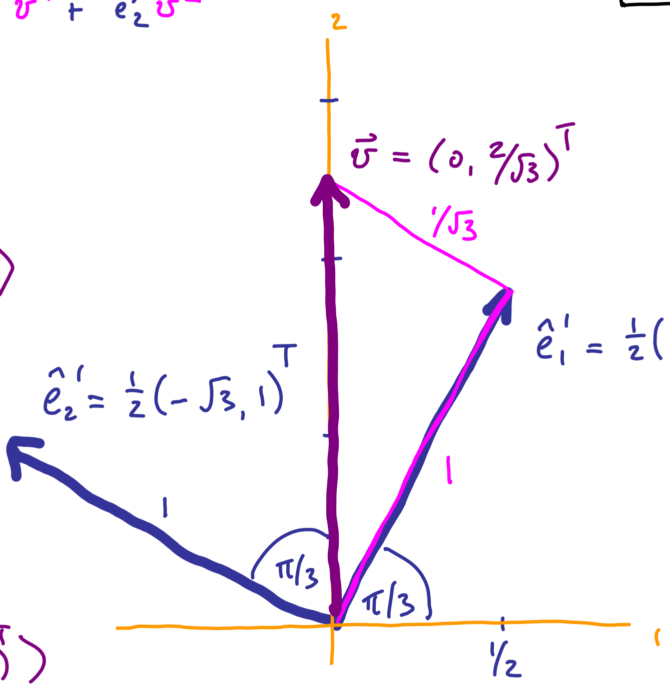
$$\langle \hat{e}'_j, \vec{v}\rangle \overset{ES}{\underset{(1)}{=}} \underbrace{\langle \hat{e}'_j, \hat{e}'_i\rangle}_{(c.3)\ \delta_{ji}} v^i = \delta_{ji} v^i = v_j \qquad (3)$$

L3.2e

Beispiel: $\vec{v} = (0, \frac{2}{\sqrt{3}})^T = \hat{e}'_1 v^1 + \hat{e}'_2 v^2$

$$v^1 \overset{(d.3)}{=} \langle \hat{e}'_1, \vec{v}\rangle$$
$$= \langle \tfrac{1}{2}(1, \sqrt{3})^T, (0, \tfrac{2}{\sqrt{3}})^T \rangle$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{2}{\sqrt{3}} = 1$$

$$v^2 \overset{(d.3)}{=} \langle \hat{e}'_2, \vec{v}\rangle$$
$$= \langle \tfrac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1)^T, (0, \tfrac{2}{\sqrt{3}})^T \rangle$$
$$= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}$$

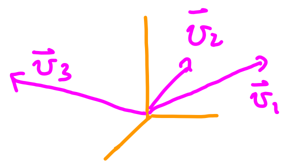


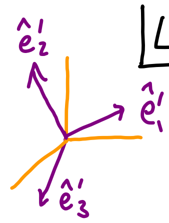
Gram-Schmidt-Verfahren

L3.2f

Gegeben eine Basis von V: $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$

vollständig, linear unabhängig,
aber nicht orthogonal, nicht normiert



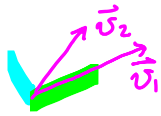


Konstruiere daraus eine Orthonormalbasis! $\{\hat{e}'_1, \dots, \hat{e}'_n\}$, $\langle \hat{e}'_i, \hat{e}'_j \rangle \overset{(C.2)}{=} \delta_{ij}$ (1)

Strategie: orthogonalisiere, normalisiere, und wiederhole das iterativ:

$$\vec{v}_{1,\perp} \equiv \vec{v}_1 \,, \qquad \hat{e}'_1 = \frac{\vec{v}_{1,\perp}}{\|\vec{v}_{1,\perp}\|} \tag{2}$$

$$\vec{v}_{2,\perp} \equiv \vec{v}_2 - \langle \hat{e}'_1, \vec{v}_2 \rangle \hat{e}'_1 \,, \qquad \hat{e}'_2 = \frac{\vec{v}_{2,\perp}}{\|\vec{v}_{2,\perp}\|} \quad (\perp \hat{e}'_1) \tag{3}$$



$$\vec{v}_{3,\perp} \equiv \vec{v}_3 - \langle \hat{e}'_1, \vec{v}_3 \rangle \hat{e}'_1 - \langle \hat{e}'_2, \vec{v}_3 \rangle \hat{e}'_2 \,, \qquad \hat{e}'_3 = \frac{\vec{v}_{3,\perp}}{\|\vec{v}_{3,\perp}\|} \quad (\perp \hat{e}'_1, \perp \hat{e}'_2) \tag{4}$$

$\vdots$

$$\vec{v}_{n,\perp} \equiv \vec{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \hat{e}'_i, \vec{v}_n \rangle \hat{e}'_i \qquad \hat{e}'_n = \frac{\vec{v}_{n,\perp}}{\|\vec{v}_{n,\perp}\|} \quad (\perp \hat{e}'_1, \dots, \hat{e}'_{n-1}) \tag{5}$$

L3.3 Innere Produkträume

L3.3a

Verallgemeinerung des Skalarprodukts auf allgemeinen $\mathbb{R}$- ('reeller Vektorraum'): Vektorraum

'Inneres Produkt' ist eine bilineare Abbildung von zwei Vektoren auf eine Zahl, (1)

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{(Skalar)} \tag{2}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

mit folgenden Eigenschaften [identisch zu Seite(3.1)]:

(i) Symmetrie: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (3)

(ii) Linearität bzgl. Vektoraddition: $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (4)

(iii) Linearität bzgl. Skalarmultiplikation: $\langle a\vec{u}, \vec{w} \rangle = a \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ (5)

(iv) Positiv definit: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0 \quad \forall\, \vec{v} \in V, \vec{v} \neq 0$ (6)

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$ (7)

'wenn, und nur wenn'

Vektorraum ausgestattet mit innerem Produkt heißt 'Euklidischer Vektorraum'

[schon wieder derselbe Name wie vorhin! Grund: sie sind isomorph!, siehe AD-L3.3]

Orthonormalbasis definiert einen Isomorphismus zwischen n-dim V und $\mathbb{R}^n$

L3.3b

Gegeben $\{\hat{e}'_1, \ldots, \hat{e}'_n\}$, $\quad \vec{v} \overset{ES}{=} \hat{e}'_i v^i \quad , \quad \vec{w} \overset{ES}{=} \hat{e}'_j w^j$ (1)

Isomorphismus: (L2.6a.3)

$$\phi_{\hat{e}'} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\vec{v} \longmapsto (v^1, \ldots, v^n)^T \equiv \tilde{v} \qquad (2)$$

$$\vec{w} \longmapsto (w^1 \ldots, w^n)^T \equiv \tilde{w} \qquad (3)$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_V \overset{ES}{=} \langle \hat{e}'_i v^i, \hat{e}'_j w^j \rangle_V \overset{ES}{=} v^i \langle \underbrace{\hat{e}'_i, \hat{e}'_j}_{} \rangle_V w^j \overset{ES}{=} v^i \delta_{ij} w^j = v_i w^i = \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad (4)$$

(L3.2c): δ_{ij}

Inneres Produkt in V — liefern dasselbe Ergenis! — Inneres Produkt in $\mathbb{R}^n$

Das innere Produkt von zwei Vektoren in V entspricht dem standard-Skalarprodukt ihrer Komponenten bezüglich einer Orthonormalbasis von V.

In diesem Sinne: $\quad (V, \langle\ ,\ \rangle_V) \cong (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^n})$

Nicht-orthonormale Basis in V: Metrik

[nur zur Kenntnisnahme]

L3.3c

Was passiert, wenn Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ v. V nicht orthonormal ist?

Sei $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle_V \equiv g_{ij}$ (1)

(g wird 'Metrik' genannt;
bisher: $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, nun $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \ldots \\ g_{21} & g_{22} & \ldots \\ \vdots & & g_{33} \end{pmatrix}$

Entwicklung v. zwei beliebigen Vektoren $\in V$: $\quad \vec{x} \overset{ES}{=} \vec{v}_i x^i \quad , \quad \vec{y} \overset{ES}{=} \vec{v}_j y^j$ (2)

Inneres Produkt in V: $\quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_V \underset{(2)}{\overset{ES}{=}} \langle \vec{v}_i x^i, \vec{v}_j y^j \rangle \overset{ES}{=} x^i y^j \underbrace{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle}_{(1)\ g_{ij}}$ (3)

$$\overset{ES}{=} \underbrace{x^i g_{ij}}_{\equiv x_j} y^j \qquad (4)$$

Verallgemeinerung des Standard- $\mathbb{R}^n$ Skalarprodukts für nicht-trivale Metrik

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \overset{ES}{=} x_j y^j$ (5) $\quad$ mit $\quad x_j \overset{ES}{\equiv} x^i g_{ij} \quad (\neq x^j)$ (6)

Falls Metrik 'nicht-trivial' ist, bringt oben-unten-Konvention für Indizes wirklich einen Mehrwert!

Zusammenfassung L3 ZL3a

Euklidische Vektorräume (V: reeller Vektorraum)

Inneres Produkt: $\langle \, , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (1)

Zahl

(i) Symmetrie, (ii-iii) Linearität bzgl. + und $\cdot$ (iv) Positiv definit

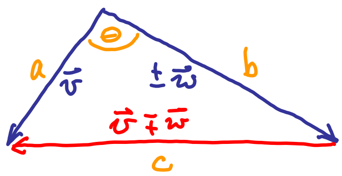
---

Wichtigstes Beispiel: Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

$$\cdot \; : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} \equiv u_1 v^1 + \ldots + u_n v^n \overset{ES}{=} u_i v^i \qquad (2)$$

Norm: $\| \; \| : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{v} \longmapsto \|\vec{v}\| \equiv \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ (3)

Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU): $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|$ (4)

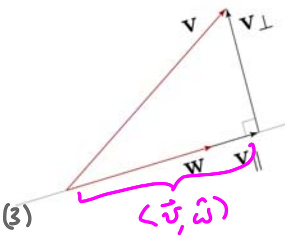


Dreiecksungleichung: $\underbrace{\|\vec{v}\|}_{a} + \underbrace{\|\vec{w}\|}_{b} \geq \underbrace{\|\vec{v} \mp \vec{w}\|}_{c}$ (5)

ZL3b

Winkel: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \equiv \cos(\measuredangle(\vec{v}, \vec{w})) \, \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|$ (1)

Einheitsvektor: $\hat{w} \equiv \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ (2)



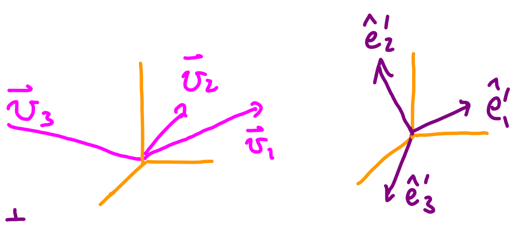
'Projektion' v. $\vec{v}$ auf $\vec{w}$: $\vec{v}_\parallel \equiv \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle \, \hat{w} \quad (\parallel \vec{w})$ (3)

'Orthogonales Komplement' zu $\vec{w}$: $\vec{v}_\perp \equiv \vec{v} - \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle \hat{w} \quad (\perp \vec{w})$ (4)

Orthonormalbasis: vollständig, normiert, orthogonal:

$$\{\hat{e}'_1, \ldots, \hat{e}'_n\}, \quad \langle \hat{e}'_i, \hat{e}'_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (5)$$

Gram-Schmidt-Verfahren liefert Orthonormalbasis:



$$\vec{v}_{j,\perp} \equiv \vec{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle \hat{e}'_i, \vec{v}_j \rangle \, \hat{e}'_i, \qquad \hat{e}'_j \equiv \frac{\vec{v}_{j\perp}}{\|\vec{v}_{j\perp}\|} \qquad (6)$$