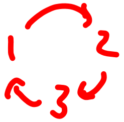
L4 Vektorprodukt (Kreuzprodukt): (nur in 3 Dimensionen definiert)

- Zusammenfassung v. Schulwissen
- Geometrische Anschauung
- Komponentendarstellung, Levi-Civita-Symbol

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Aus Schule bekannt: (?)

zyklisch:



(1)

Verknüpfung:

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \equiv \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

(i) Antisymmetrisch: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (2)

(ii) Nur senkrechte Anteile tragen bei: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}_\perp \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_\perp$ (3)

(iii) Distributiv: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (4)

(iv) Nicht assoziativ: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ (5)

(Beweise: aus geometrischer Anschauung, siehe unten.)

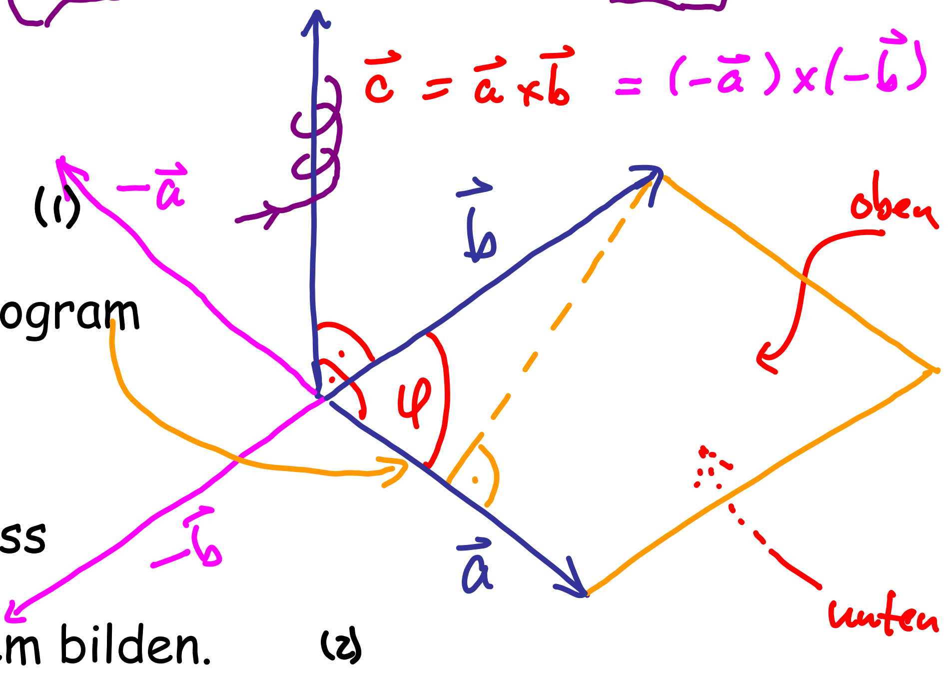
Geometrische Definition:

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ist ein 'Vektor' mit folgenden Eigenschaften:

(i) Betrag: $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \sin\varphi$

Fläche von Parallelogram

(ii) Richtung: $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene, sodass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in dieser Folge ein Rechtssystem bilden.

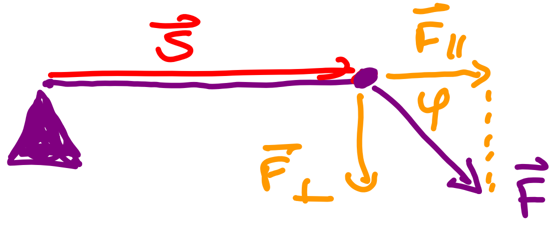


$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (-\vec{a}) \times (-\vec{b})$$

Anmerkungen:

- $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
- "Vektorprodukt beschreibt Drehsinn."
- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist eine "orientierte Fläche"
- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein "Pseudo-Vektor" $= (-\vec{a}) \times (-\vec{b})$

Beispiel v. physikalischen Anwendung:



$$\overrightarrow{\text{Drehmoment}} = \overrightarrow{\text{Hebelarm}} \times \overrightarrow{\text{Kraft}}$$

$$\vec{N} = \vec{s} \times \vec{F} = s\,F \sin\varphi$$

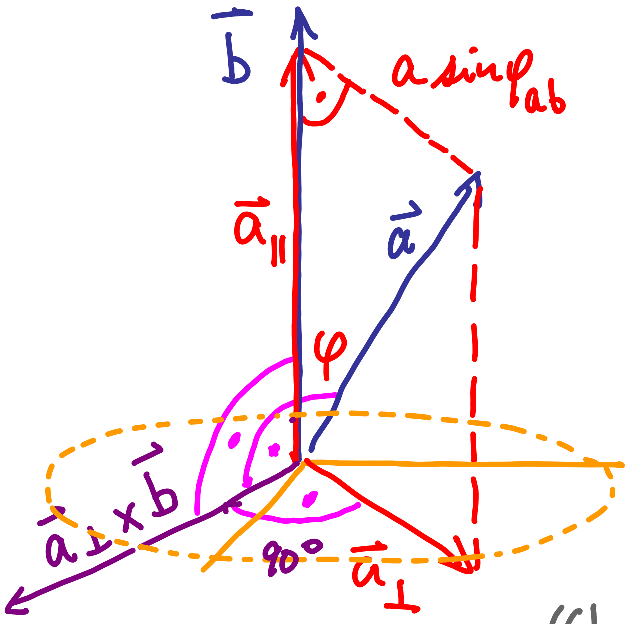
Eigenschaften: diskutiert durch geometrische Anschauung

(i) Antisymmetrisch: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (folgt aus rechtshändischer Regel) (1)

(ii) Nur senkrechter Anteil trägt bei: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ $\begin{cases} \text{falls } \|\vec{a}\| = 0 \quad \text{und/oder} \quad \|\vec{b}\| = 0 & (2) \\ \text{oder } \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} & (3) \end{cases}$

(Zwei kollineare Vektoren spannen keine Ebene auf.)

Sei $\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$ Zerlegung v. $\vec{a}$ bezgl. $\vec{b}$



(6)

Dann gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = (\overset{(3)\to 0}{\cancel{\vec{a}_\parallel}} + \vec{a}_\perp) \times \vec{b}$ (3)

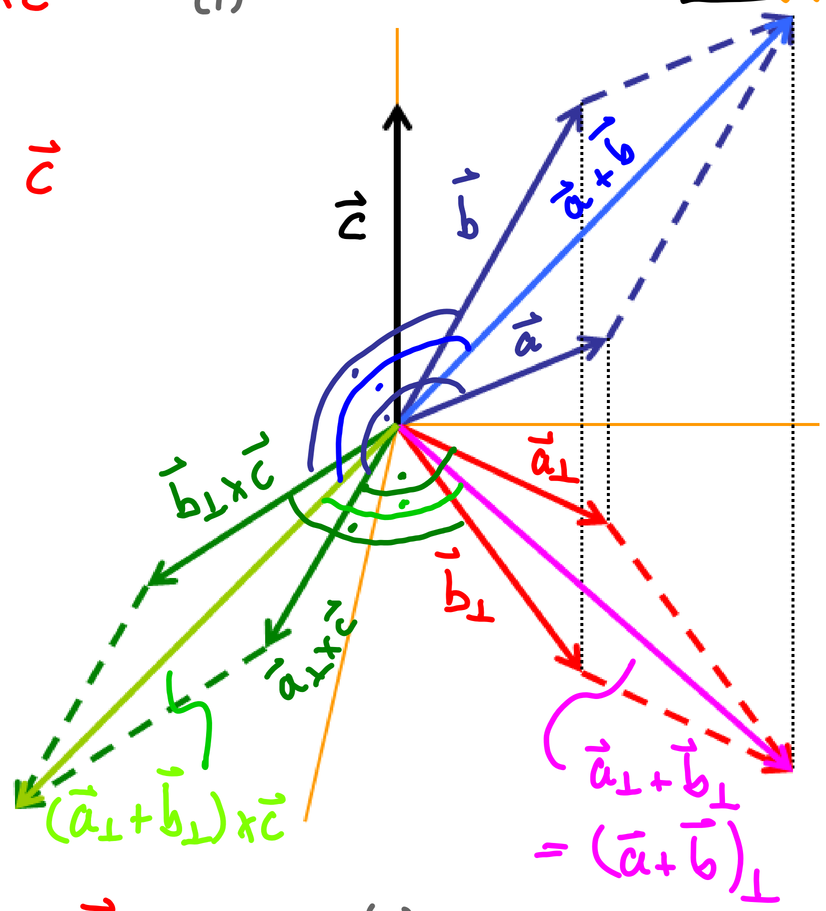
$= \vec{a}_\perp \times \vec{b}$ (4)

Merkregel: $\vec{a} \times \vec{b}$ liegt in Ebene $\perp$ zu $\vec{b}$, um 90 Grad gedreht zu $\vec{a}_\perp$ (7)

~~L4d~~

(iii) Distributivität: $(\vec a+\vec b)\times\vec c = \vec a\times\vec c + \vec b\times\vec c$ (1)

[aus geometrischer Anschauung]



$\vec c$ ist ausgezeichnet, zerlege anderen Vektoren bzgl. $\vec c$

$\vec a = \vec a_\parallel + \vec a_\perp$ (2)

$\vec b = \vec b_\parallel + \vec b_\perp$ (3)

$\vec a+\vec b = (\vec a+\vec b)_\parallel + (\vec a+\vec b)_\perp$ (4)

liegen in Ebene senkrecht zu $\vec c$

In dieser Ebene $\perp\ \vec c$ liegt:

$\vec a\times\vec c \overset{(C.4)}{=} \vec a_\perp\times\vec c$ (C.7) um 90 Grad gedreht relativ zu $\vec a_\perp$ (5)

$\vec b\times\vec c = \vec b_\perp\times\vec c$ " " $\vec b_\perp$ (6)

$(\vec a+\vec b)\times\vec c = (\vec a+\vec b)_\perp\times\vec c$ " " $(\vec a+\vec b)_\perp$ (7)

Offensichtlich gilt: $(\vec a+\vec b)_\perp\times\vec c = \vec a_\perp\times\vec c + \vec b_\perp\times\vec c$ (8)

Also auch: $(\vec a+\vec b)\times\vec c = \vec a\times\vec c + \vec b\times\vec c$ □ (9)

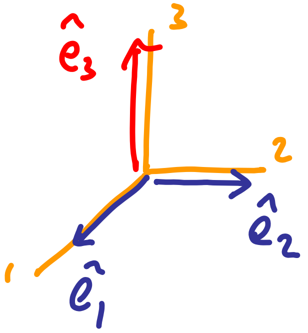
L4e

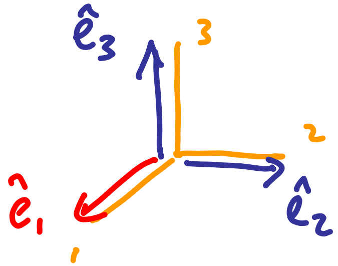
(iv) Nicht-Assoziativität: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ (1)

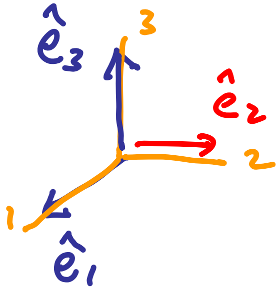
Ein Gegenbeispiel genügt:

$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$, $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1$, $\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$

$\hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_3$, $\hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_1$, $\hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_2$ (2)







Nehme:

$\vec{a} = \hat{e}_1$

$\vec{b} = \hat{e}_2$

$\vec{c} = \hat{e}_1 + \hat{e}_2$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ (3)

$= (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) \times (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$ (4)

$= \hat{e}_3 \times (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$ (5)

$= \hat{e}_2 - \hat{e}_1$ (6)

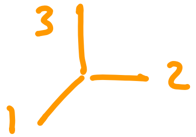
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ (7)

$= \hat{e}_1 \times \left[\hat{e}_2 \times (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)\right]$ (8)

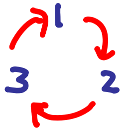
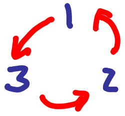
$= \hat{e}_1 \times \left[-\hat{e}_3 + 0\right]$ (9)

← nicht gleich → $= \hat{e}_2$ ✓ $\Longrightarrow$ (1) (10)

Vektorprodukt in kartesischen Komponenten:



Vektorprodukte der orthonormale Einheitsvektoren:

Zyklische Reihenfolge:		$+$	$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$	$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1$	$\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$	(2)
Antizyklische Reihenfolge:		$-$	$\hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_3$	$\hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_1$	$\hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_2$	(3)
Gleiche Indizes:		$\vec{0}$	$\hat{e}_1 \times \hat{e}_1 = \vec{0}$	$\hat{e}_2 \times \hat{e}_2 = \vec{0}$	$\hat{e}_3 \times \hat{e}_3 = \vec{0}$	(1)

Kurznotation:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j \overset{ES}{=} \varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_k \qquad \left[\overset{ES}{=} \varepsilon_{ij1}\,\hat{e}_1 + \varepsilon_{ij2}\,\hat{e}_2 + \varepsilon_{ij3}\,\hat{e}_3\right] \qquad (4)$$

Definition:
"Levi-Civita-Tensor"
(total antisymmetrisch)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \ i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i \qquad \text{zyklisch} \\ -1 & \qquad \text{"} \qquad\qquad \text{"} \qquad\quad , \qquad \text{antizyklisch} \\ 0 & \text{falls zwei oder drei Indizes gleich sind} \end{cases} \qquad (5)$$

Explizit:

$$1 = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{321} = -\varepsilon_{213} \qquad (6)$$

$$0 = \varepsilon_{iik} = \varepsilon_{iji} = \varepsilon_{ikk} = \varepsilon_{iii} \qquad (7)$$

L4g

Beispiel für (f.4):

$$\hat e_1 \times \hat e_3 \overset{(f.4)}{=} \varepsilon_{13k}\hat e_k \overset{(Es)}{=} \underbrace{\varepsilon_{131}}_{0}\hat e_1 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1}\hat e_2 + \underbrace{\varepsilon_{133}}_{0}\hat e_3 \overset{(f.3)}{=} -\hat e_2 \quad \checkmark \qquad (1)$$

Vektorprodukte v. zwei allgemeinen Vektoren: $\vec a \overset{Es}{=} a_i \hat e_i \qquad \vec b \overset{Es}{=} b_j \hat e_j \qquad (3)$

[Notationskonvention in dieser Vorlesung: wenn Kreuzprodukt dran kommt, schreiben wir alle Indizes unten!]

$$\vec c = \vec a \times \vec b \overset{\overset{Es}{(3)}}{=} (a_i \hat e_i) \times (b_j \hat e_j) \overset{Es}{=} a_i b_j \underbrace{(\hat e_i \times \hat e_j)}_{(f.4)\ \varepsilon_{ijk}\hat e_k} \overset{Es}{=} \underbrace{a_i b_j \,\varepsilon_{ijk}}_{\equiv c_k \ \checkmark} \hat e_k \overset{Es}{=} c_k \hat e_k \qquad (4)$$

Distributivität, komponentenweise

Definition der Koeff. von c

Folglich: $c_k = a_i b_j \varepsilon_{ijk}$, $(\vec a \times \vec b)_k = a_i b_j \varepsilon_{ijk}$ (5)

Explizit:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

(g.4) ganz explizit: ☹

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3) \times (b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{(\hat{e}_1 \times \hat{e}_1)}_{=0} + a_1 b_2 \underbrace{(\hat{e}_1 \times \hat{e}_2)}_{=\hat{e}_3} + a_1 b_3 \underbrace{(\hat{e}_1 \times \hat{e}_3)}_{=-\hat{e}_2}$$

$$+ a_2 b_1 \underbrace{(\hat{e}_2 \times \hat{e}_1)}_{=-\hat{e}_3} + a_2 b_2 \underbrace{(\hat{e}_2 \times \hat{e}_2)}_{=0} + a_2 b_3 \underbrace{(\hat{e}_2 \times \hat{e}_3)}_{=\hat{e}_1}$$

$$+ a_3 b_1 \underbrace{(\hat{e}_3 \times \hat{e}_1)}_{=\hat{e}_2} + a_3 b_2 \underbrace{(\hat{e}_3 \times \hat{e}_2)}_{=-\hat{e}_1} + a_3 b_3 \underbrace{(\hat{e}_3 \times \hat{e}_3)}_{=0}$$

$$= \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{:=c_1} \hat{e}_1 + \underbrace{(a_3 b_1 - a_1 b_3)}_{:=c_2} \hat{e}_2 + \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{:=c_3} \hat{e}_3 = (g.6) \checkmark$$

Herleitung mittels Levi-Civita & Einstein-Summation ist offenbar viel effizienter und schmerzfreier... ☺

(g.5) ganz explizit:

$$c_1 = a_i b_j \varepsilon_{ij1} = \left(\begin{array}{l} a_1 b_1 \overset{0}{\varepsilon_{111}} + a_1 b_2 \overset{0}{\varepsilon_{121}} + a_1 b_3 \overset{0}{\varepsilon_{131}} \\ + a_2 b_1 \overset{0}{\varepsilon_{211}} + a_2 b_2 \overset{0}{\varepsilon_{221}} + a_2 b_3 \overset{+1}{\varepsilon_{231}} \\ + a_3 b_1 \overset{0}{\varepsilon_{311}} + a_3 b_2 \overset{-1}{\varepsilon_{321}} + a_3 b_3 \overset{0}{\varepsilon_{331}} \end{array} \right) = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

Identität:

$$\hat{e}_k \cdot (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \overset{(f.4)}{=} \underbrace{\hat{e}_k \cdot (\varepsilon_{ijn}\, \hat{e}_n)}_{\delta_{kn}} = \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} \tag{1}$$

denn Basisvektoren sind orthonormal: $\hat{e}_k \cdot \hat{e}_n = \delta_{kn}$ (2)

Identität:

$$\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{mnk} \overset{(ES)}{=} \delta_{im}\, \delta_{jn} - \delta_{in}\, \delta_{jm} \tag{3}$$

(ES: implizite Summe über 'Dummy-Index' k, mit i,j,m,n 'frei')

$$= \begin{cases} +1 & \text{falls} \quad i = m ,\; j = n \\ -1 & \text{falls} \quad i = n ,\; j = m \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \tag{4}$$

Explizites Beispiel: sei $i=1$, $j=2$, mit m, n zunächst 'frei' (1) L4j

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnk} \overset{ES}{=} \varepsilon_{ij1}\,\varepsilon_{mn1} + \varepsilon_{ij2}\,\varepsilon_{mn2} + \varepsilon_{ij3}\,\varepsilon_{mn3} \qquad (2)$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle (1)}$$

$$\varepsilon_{12k}\,\varepsilon_{mnk} \overset{(f.5)}{=} \underbrace{\varepsilon_{121}}_{=0}\varepsilon_{mn1} + \underbrace{\varepsilon_{122}}_{=0}\varepsilon_{mn2} + \underbrace{\varepsilon_{123}}_{=1}\varepsilon_{mn3} \qquad (3)$$

Nur ein Term überlebt in k-Summe: Summationsindex 'gepinnt' bei $k \notin \{i,j\}$ (4)

hier: $k=3$

$$\overset{(3)}{=} \varepsilon_{mn3} \overset{(f.5)}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls } m=1,\ n=2 \\ -1 & \text{falls } m=2,\ n=1 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} = \delta_{1m}\delta_{2n} - \delta_{2m}\delta_{1n} \qquad (5)$$

konsistent mit (i.4) ✓ ☺

Fazit: $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnk}$ ist nur dann verschieden von Null, falls freien Indizes vom erstem und zweiten Faktor paarweise gleich sind. Vorzeichen bestimmt durch Zyklitizät.

Eigenschaften des Vektorprodukts: alle folgen aus (f.4): $\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_k$

L4k

(1)

Anti-symmetrisch:
(nicht kommutativ!)

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v} \qquad (2)$$

Distributiv:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \qquad (3)$$

Nicht assoziativ:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{w} \times \vec{v}) \qquad (4)$$

Jacobi-Identität:
[zyklisch]

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{0} \qquad (5)$$

'Grassmann-Identität'
'BAC-CAB-Identität'
[sprich: 'Bakzap'-Identität]

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \qquad (6)$$

Lagrange-Identität:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \qquad (7)$$

$\vec{c} = \vec{a}$, $\vec{d} = \vec{b}$:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \qquad (8)$$

Beispiel:
'BAC-CAB-Identität'

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c) = \vec b\,(\vec a \cdot \vec c) - \vec c\,(\vec a \cdot \vec b) \qquad (1)$$

L4 ℓ

Beweis: k-Komponente v. (1):

$$(\vec v \times \vec w)_k \overset{(4g)}{=} v_i w_j \varepsilon_{ijk} \qquad (2a)$$

$$(\vec v' \times \vec w')_j \overset{(4g)}{=} v'_m w'_n \varepsilon_{mnj} \qquad (2b)$$

$$[\vec a \times (\vec b \times \vec c)]_k \overset{(2a)}{=} a_i (\vec b \times \vec c)_j\, \varepsilon_{ijk} \xrightarrow{(f.5)}$$

$$\overset{(2b)}{=} a_i \,(b_m c_n \underbrace{\varepsilon_{mnj})\, \varepsilon_{kij}}_{(i.4)}$$

$$= a_i b_m c_n \, [\delta_{mk} \delta_{ni} - \delta_{mi} \delta_{nk}]$$

$$= a_i b_k c_i - a_i b_i c_k = b_k (\vec a \cdot \vec c) - c_k (\vec a \cdot \vec b)$$

= k-Komponente von (1)

JvD Kurzversion:

$$[\vec a \times (\vec b \times \vec c)]_k = a_i \,(b_m c_n \underbrace{\varepsilon_{mnj})\, \overset{kij}{\varepsilon_{ijk}}}_{\delta_{mk} \delta_{ni} - \delta_{mi} \delta_{nk}} = b_k (\vec a \cdot \vec c) - c_k (\vec a \cdot \vec b)$$

L4m

Definition: Spatprodukt:

$$(\vec a,\vec b,\vec c) \longmapsto (\vec a\times\vec b)\cdot\vec c \overset{(i.1)}{=} a_i b_j c_k \overset{\varepsilon_{kij}}{\varepsilon_{ijk}} = \vec c\cdot(\vec a\times\vec b) \qquad (1)$$

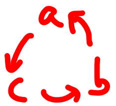
denn: $= (a_i\hat e_i \times b_j\hat e_j)\cdot c_k\hat e_k$ $\quad \left[(\hat e_i\times\hat e_j)\cdot\hat e_k \overset{(i.1)}{=} \varepsilon_{ijk}\right] \qquad (2)$

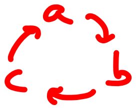
Spatprodukt ist zyklisch invariant:

$$\underbrace{(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c \overset{(1)}{=} (\vec c\times\vec a)\cdot\vec b \overset{(1)}{=} (\vec b\times\vec c)\cdot\vec a}_{\text{zyklisch vertauscht}} \qquad (3)$$

$\Big[$ aber $\overset{(1)}{=} -(\vec c\times\vec b)\cdot\vec a$

antizyklisch: $\Big]$





$$\overset{(1)}{=} a_i b_j c_k \varepsilon_{kij} \overset{\substack{k\to i\\ i\to j\\ j\to k}}{=} a_j b_k c_i \varepsilon_{ijk} = c_i a_j b_k \varepsilon_{ijk} = (\vec c\times\vec a)\cdot\vec b$$

Geometrische Interpretation:

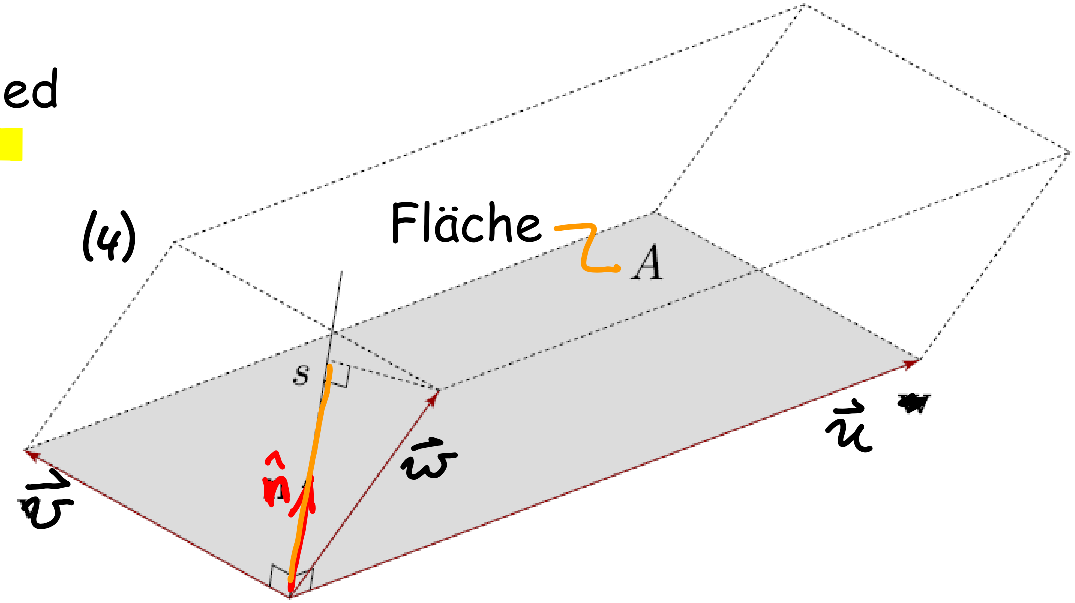
$$\Big|\underbrace{(\vec u\times\vec v)}\cdot\vec w\Big| = \text{Volumen v. Parallelepiped}$$

(b.1) Fläche v. Parallelogram: A

$$= (\overbrace{A\,\hat n}^{}) \underbrace{{}\cdot\vec w}_{} = As \qquad (5)$$

S = Projektion von $\vec w$ auf Normalvektor $\hat n$ zur Fläche A

(4)



Zusammenfassung: L4 Vektorprodukt

ZL4

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \equiv \begin{pmatrix} a_2 b_3 & - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 & - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 & - a_2 b_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Geometrische Def: $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$$\| \vec{a} \times \vec{b} \| = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \sin \varphi$$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

Levi-Civita: ε_{ijk} komplett antisymmetrisch

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = a_i b_j \varepsilon_{ijk}$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

Eigenschaften: antisymmetrisch, distributiv, nicht assoziativ, Identitäten...

Spatprodukt: $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ = Volumen v. Paralleliped