V: Vektor-Kalkulus

VIa

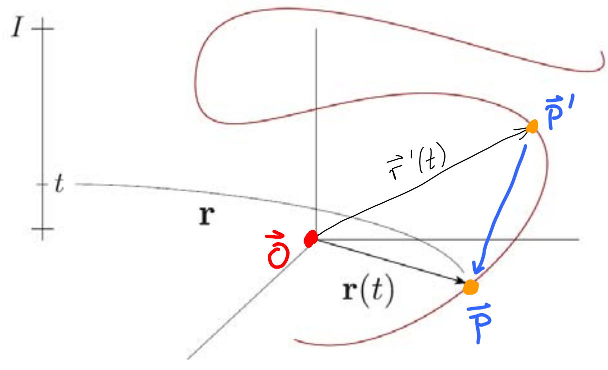
Euklidischer Raum (ER) = Ursprung + Euklidischer Vektorraum $/\!/\!/ \; \mathbb{E}^3$

(Raum unserer Wahrnehmung)

Punkt im ER: $\vec{p} = \vec{0} + \vec{r}\,, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^n$

Differenzen v. Punkten sind Vektoren:

$$\vec{p} - \vec{p}\,' = \vec{r} - \vec{r}\,' \in \mathbb{E}^3$$



V1 Kurven

V1.1 Definition einer Kurve in $\mathbb{R}^n$

$$\vec{r}: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \vec{r}(t) \qquad (1)$$

Intervall: $I \subset \mathbb{R}$, wir wählen i.d.Regel $I = [0,\tau]$ (2)

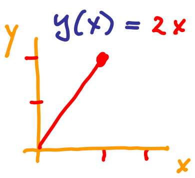
'Kurve': $\gamma = \{\, \vec{r}(t) \mid t \in I \,\}$ = (Bild der Funktion $\vec{r}$) $= \vec{r}(I)$

[im Sinne v. Seite L1b]

Die Funktion $\vec{r}$ liefert eine 'Parametrisierung d. Kurve'

Beispiele von Parametrisierungen

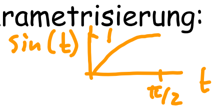
VIb

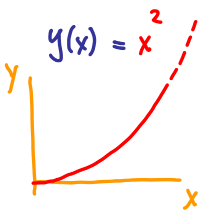


eine mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (t, 2t)^T, \quad t \in [0,1]$ (1)

andere mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (t^2, 2t^2)^T, \quad t \in [0,1]$ (2)

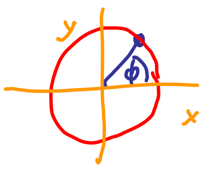
weitere mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (\sin t, 2\sin t)^T, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (3)



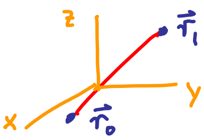


eine mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (t, t^2)^T, \quad t \in [0,\infty)$ (4)

andere mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (e^t, e^{2t})^T, \quad t \in (-\infty,\infty)$ (5)



naheliegende Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)^T, \quad t \in [0,2\pi]$ (6)



naheliegende Parametrisierung: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t\,, \quad t \in [0,1]$ (7)

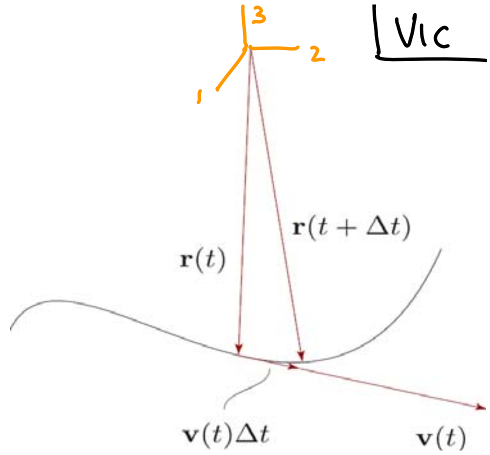
Parametrisierung einer Kurve enthält mehr Information als die Kurve selbst:
Kurve sagt aus, wie die "Reiseroute" aussieht.
Parametrisierung sagt zusätzlich auch aus, wie schnell sie durchlaufen wird.

V1.2 Kurvengeschwindigkeit

V1c

'Kurvengeschwindigkeit' $\vec{v}(t)$ z.Zeit $t \in I$
ist definiert durch die lineare Näherung:

$$\vec{r}(t+\Delta t) \simeq \vec{r}(t) + \Delta t\, \vec{v}(t) \qquad (\Delta t \to 0) \qquad (1)$$



$\vec{v}(t)$ liegt 'tangential' zur Kurve, denn

D.h.: eine kleine Änderung in Δt bewirkt, dass sich $\vec{r}$ in $\vec{v}$ -Richtung ändert.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}\right] = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv d_t\, \vec{r}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) \qquad (2)$$

[Vergleiche Mutter aller Ableitungen, C1b.3 !]

Kompontenschreibweise: $\vec{r}(t) = \hat{e}_i\, r^i(t)$ (3)

Cartesische Basisvektoren sind zeitunabhängig!

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\hat{e}_i\, r^i(t)\right) = \hat{e}_i\left(\frac{dr^i(t)}{dt}\right) \equiv \hat{e}_i\, v^i(t) \quad (4) \qquad v^i(t) \equiv \frac{dr^i(t)}{dt} \equiv \dot{r}^i(t) \quad (5)$$

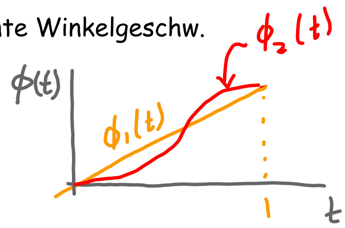
Beschleunigung: $\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t)$ (6)

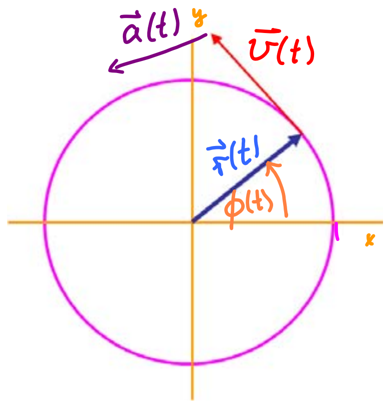
V1d

Beispiel: Kreis $\gamma = \{\vec{r}(t) \mid t \in [0,\ ]\}$

Parametrisierung 1: konstante Winkelgeschw.

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos[\overbrace{2\pi t}^{\equiv \phi_1(t)}] \\ \sin[2\pi t] \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$





Parametrisierung 2: $\equiv \phi_2(t)$ zeitlich periodisch variierende Winkelgeschw.

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos[\pi(1-\cos(\pi t))] \\ \sin[\pi(1-\cos(\pi t))] \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Beide Parametrisierungen (i = 1,2) beschreiben denselben Kreis, denn:

$$\|\vec{r}_i\|^2 = x_i^2 + y_i^2$$

Quadrat
Vektor: i = 1 oder 2

$$= \cos^2[\ ] + \sin^2[\ ] = 1$$

VId'

Beispiel: Parametrisierung 1

$$\vec{r}_1(t) \overset{(b.1)}{=} \begin{pmatrix} \cos[2\pi t] \\ \sin[2\pi t] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1(t) = 2\pi \begin{pmatrix} -\sin[2\pi t] \\ \cos[2\pi t] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_1(t) = -(2\pi)^2 \begin{pmatrix} \cos[2\pi t] \\ \sin[2\pi t] \\ 0 \end{pmatrix} = -(2\pi)^2\, \vec{r}_1(t) \qquad (2)$$

Hier gilt: $\|\vec{r}_1(t)\| = 1 \qquad \|\vec{v}_1(t)\| = 2\pi \qquad \|\vec{a}_1(t)\| = (2\pi)^2 \qquad (3)$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

Kreisbewegung, mit konstanter Kreisgeschw., und konstanter Zentripetalbeschleunigung

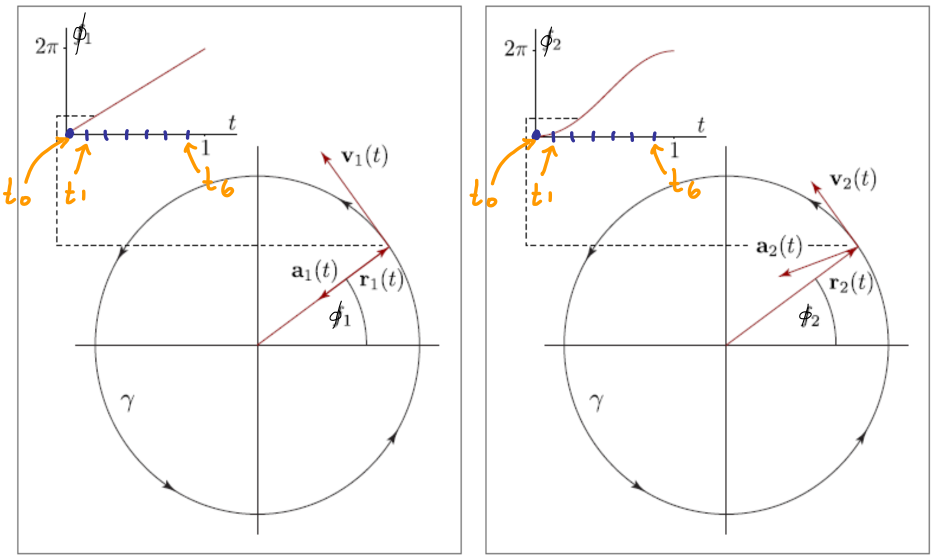
$\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0 \qquad \vec{v}_1 \cdot \vec{a}_1 = 0 \qquad \leftarrow$ [Grund: siehe (e.5)] (4)

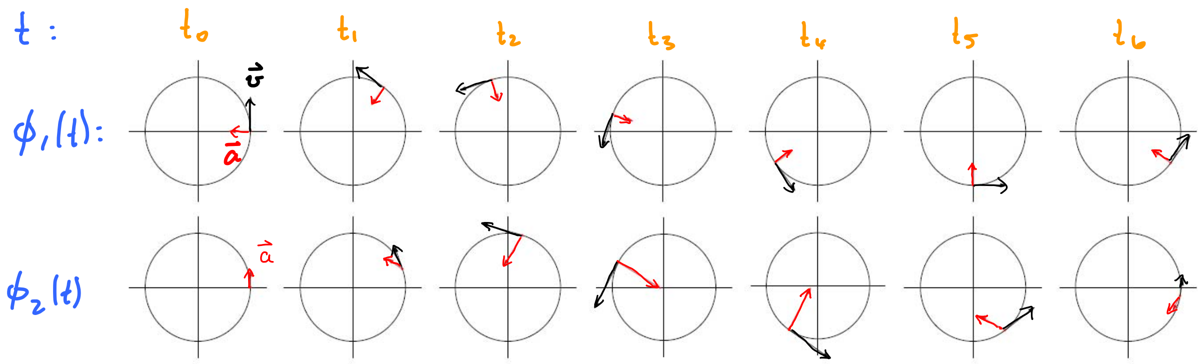
Analoge Rechnung für Parametrisierung 2 [siehe (b.2)] ergibt: (selber nachrechnen!)

$\|\vec{r}_2(t)\| = 1, \qquad \|\vec{v}_2(t)\| = \pi^2 \sin\pi t \qquad \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_2 = 0 \qquad (5)$

$$\vec{a}_2(t) = \underbrace{-(\pi^2 \sin(\pi t))^2\, \vec{r}_2(t)}_{\text{Zentripetalbeschl.}} + \underbrace{\pi \cot(\pi t)\, \vec{v}_2(t)}_{\text{Änderung v. } \|\text{Kreisgeschw.}\|} \qquad \vec{v}_2 \cdot \vec{a}_2 \neq 0 \qquad (6)$$

VIb'





V1e

Ableitungsregeln: $d_t \equiv \frac{d}{dt}$ $\qquad d_t \vec{r} \equiv d_t(\vec{r}(t))$

$$d_t(\vec{r} + \vec{s}) = d_t \vec{r} + d_t \vec{s} \qquad (1)$$

Produktregel (PR)

$$d_t(a\vec{r}) = (d_t a)\,\vec{r} + a\,(d_t \vec{r}) \qquad (2)$$

$$d_t(\vec{r}\cdot\vec{s}) \overset{PR}{=} (d_t \vec{r})\cdot\vec{s} + \vec{r}\cdot d_t\vec{s} \qquad (3)$$

$$d_t(\vec{r}\times\vec{s}) \overset{PR}{=} (d_t \vec{r})\times\vec{s} + \vec{r}\times(d_t\vec{s}) \qquad (4)$$

Herleitung: nach Komponenten zerlegen, z.B.: $\vec{r}(t) = \hat{e}_i\, r^i(t)$, $\quad \vec{s}(t) = \hat{e}_j\, s^j(t)$ (5)

$$d_t(\vec{r}\times\vec{s}) = d_t\left(\hat{e}_i\, r^i(t)\right)\cdot\left(\hat{e}_j\, s^j(t)\right) \qquad (6)$$

$$\overset{PR}{=} \left(\hat{e}_i\, d_t(r^i(t))\right)\cdot\left(\hat{e}_j\, s^j(t)\right) + \left(\hat{e}_i\, r^i(t)\right)\cdot\left(\hat{e}_j\, d_t s^j(t)\right) \qquad (7)$$

$$= (d_t\vec{r})\cdot\vec{s} + \vec{r}\cdot(d_t\vec{s}) \qquad \Rightarrow (4) \qquad (8)$$

V1f

Beispiel: Zeitableitung eines Einheitsvektors

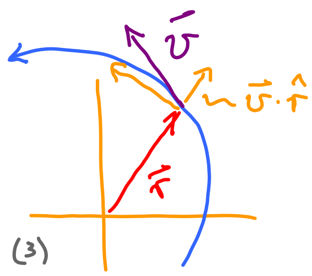
Sei $\hat{r}(t) \equiv \dfrac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|}$ (1) $\qquad d_t\,\hat{r}(t) \equiv \dot{\hat{r}} = ?$

Vorüberlegung:

$$0 = d_t 1 = d_t\|\hat{r}\|^2 = d_t\,\hat{r}\cdot\hat{r} = \dot{\hat{r}}\cdot\hat{r} + \hat{r}\cdot\dot{\hat{r}} = 2\,\hat{r}\cdot\dot{\hat{r}} \Rightarrow \dot{\hat{r}} \perp \hat{r} \qquad (2)$$

Änderung des Einheitsvektors steht immer senkrecht zu ihm!
Intuitiver Grund: da Betrag von $\hat{r}(t)$ fest ist (=1),
kann sich nur die Richtung ändern!

[Beispiele: (d'.3)]



Explizite Rechnung:

$$d_t\|\vec{r}\| \overset{(L3.1d.2)}{=} d_t\sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} \overset{\text{Kettenregel (KR)}}{=} d_x\sqrt{x}\,\Big|_{x=\vec{r}\cdot\vec{r}}\; d_t(\vec{r}\cdot\vec{r}) \qquad (3)$$

$\vec{r}\cdot\vec{r} = x$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{=\frac{1}{\|\vec{r}\|}}\left[2\,\vec{r}\cdot\underbrace{(d_t\vec{r})}_{(c.2):\ \vec{v}}\right] = \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \overset{(1)}{=} \vec{v}\cdot\hat{r} \qquad (4)$$

Änderung des Betrags v. $\vec{r}$ = Projektion der Geschwindigkeit auf $\hat{r}$ -Richtung!

V1g

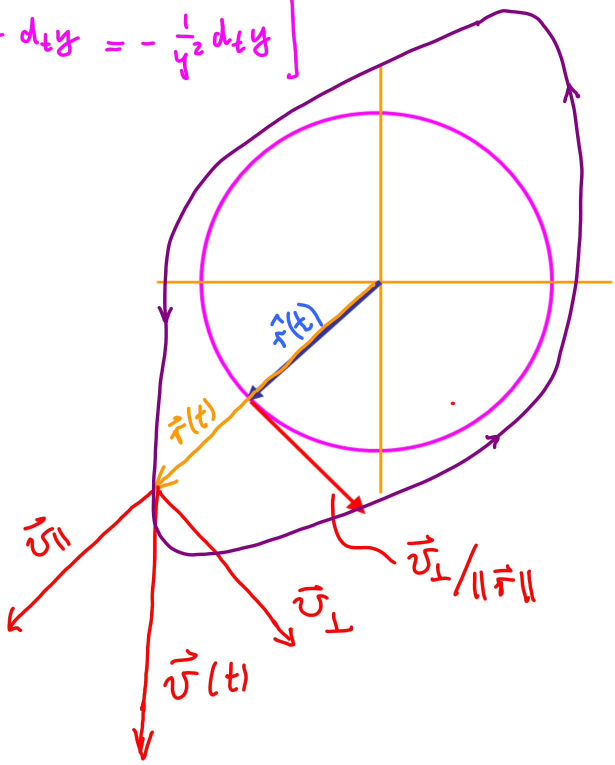
$$\dot{\hat{r}} \equiv d_t \frac{\vec r}{\|\vec r\|} \overset{PR}{=} (d_t \vec r)\frac{1}{\|\vec r\|} + \vec r \left(d_t \frac{1}{\|\vec r\|}\right) \qquad (1)$$

$$\left[\, y = \|\vec r\| \,, \quad d_t \frac{1}{y} = d_y \frac{1}{y}\, d_t y = -\frac{1}{y^2}\, d_t y \,\right]$$

$$= \frac{\vec v}{\|\vec r\|} - \underbrace{\boxed{\frac{\vec r}{\|\vec r\|^2}}}_{=\hat r/\|\vec r\|} \overbrace{d_t\|\vec r\|}^{\overset{(f.u)}{=}\ \vec v\cdot\hat r} \qquad (2)$$

$$= \frac{1}{\|\vec r\|}\Big[\underbrace{\vec v - \hat r\,(\vec v\cdot\hat r)}_{(L3.2c.4):\ \vec v_\perp}\Big] \qquad (3)$$

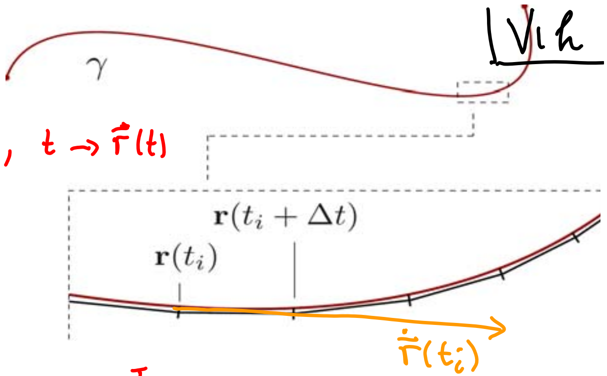
$$= \frac{\vec v_\perp}{\|\vec r\|} \qquad (4)$$



Geschwindigkeitsvektor eines Einheitsvektors
steht immer senkrecht zu ihm!

V1.3 Länge einer Kurve

V1h



Diskretisierungsparameter: Δt

Schätzung der Kurvenlänge: $\vec r : [0,T] \to \mathbb{R}^n, \quad t \to \vec r(t)$

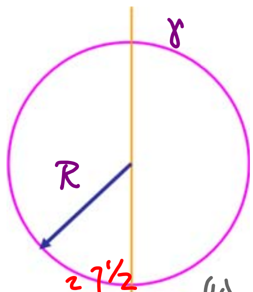
$$L_{\Delta t} = \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{\|\vec r(t_i+\Delta t) - \vec r(t_i)\|}_{\overset{(C.1)}{\simeq}\ \|\Delta t\, \dot{\vec r}(t_i)\|\ =\ \Delta t\, \|\dot{\vec r}(t_i)\|} \qquad (1)$$

Tatsächliche Kurvenlänge:

$$L[\gamma] = \lim_{\Delta t\to 0} L_{\Delta t} \overset{(1)}{=} \lim_{\Delta t\to 0} \Delta t \sum_{i=1}^{N-1} \|\dot{\vec r}(t_i)\| = \int_0^T dt\, \|\dot{\vec r}(t)\| \qquad (2)$$

$$\dot{\vec r}(t) \overset{(C.2)}{\equiv} d_t \vec r(t)$$

Beispiel: Umfang eines Kreises:



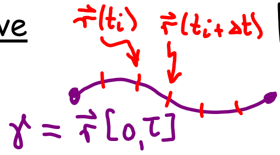
$$\vec r(t) = R\,(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t)\,, \qquad t \in [0,1] \qquad (3)$$

$$\dot{\vec r}(t) = 2\pi R\,(-\sin 2\pi t,\ \cos 2\pi t)\,, \qquad \|\dot{\vec r}\| = 2\pi R\,\big[\underbrace{\sin^2 + \cos^2}_{=1}\big]^{1/2} \qquad (4)$$

$$L[\gamma] \overset{(2)}{=} \int_0^1 dt\ 2\pi R = 2\pi R \quad ✓ \qquad (5)$$

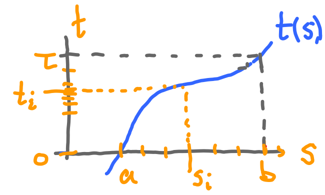
Länge ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung der Kurve

V1 i



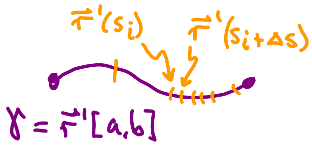
t-Parametrisierung: $\vec{r}: [0,\tau] \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \vec{r}(t)$ (1)

Argument v. $\vec{r}(t)$ sei Zielelement einer <u>bijektiven</u> Abbildung: $t: [a,b] \to [0,\tau], \quad s \mapsto t(s)$ (2)



wegen Bijektivität: $\frac{d}{ds} t(s) > 0$ (3)

Konstruiere nun alternative Parametrisierung derselben Kurve:



s-Parametrisierung: $\vec{r}': [a,b] \to \mathbb{R}^n, \quad s \mapsto \vec{r}'(s) \equiv \vec{r}(t(s))$ (4)

s-Geschwindigkeit:

$$\| d_s \vec{r}'(s) \| \overset{(4)}{=} \left\| \frac{d}{ds} \vec{r}(t(s)) \right\| \overset{(1d.2):KR}{=} \left\| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \Big|_{t=t(s)} \frac{dt(s)}{ds} \right\| = \frac{dt(s)}{ds} \| d_t \vec{r}(t(s)) \| \quad (5)$$

$\|\vec{u}a\| = a\|\vec{u}\|$ falls $a \overset{(3)}{>} 0$

Kurvenlänge:

$$L[\gamma] \overset{(h.2)}{=} \int_a^b ds \, \| d_s \vec{r}'(s) \| \overset{(5)}{=} \int_a^b ds \, \frac{dt(s)}{ds} \| d_t \vec{r}(t(s)) \| \overset{(C2g.4)}{=} \int_0^\tau dt \, \| d_t \vec{r}(t) \| \overset{\checkmark}{=} (h.2) \quad (6)$$

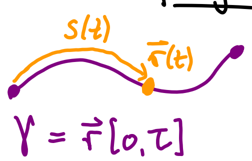
Integralsubstitution: $t = t(s)$

Konsistenzcheck erfolgreich: s-Parametrisierung liefert dieselbe Länge wie t-Parametrisierung!

Natürliche Parametrisierung einer Kurve: durch Bogenlänge

V1 j

Kurve sei durch eine Variable u parametrisiert. $\vec{r}: [0,\tau] \to \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto \vec{r}(u)$ (1)



Bogenlänge nach Zeit t: (auch unabhängig v. Form der Parametrisierung) $s(t) \overset{(h.2)}{\equiv} \int_0^t du \, \| d_u \vec{r}(u) \|$ (2)

s wächst monoton mit t: $s: [0,\tau] \to [0, L(\gamma)], \quad t \mapsto s(t), \quad d_t s(t) > 0$ (3)

Umkehrfunktion: Zeit t(s), nach der Länge s erreicht ist: $t: [0, L(\gamma)] \to [0,\tau], \quad s \mapsto t(s)$ (4)

Parametrisiere nun Kurve durch Bogenlänge s: $\vec{r}_L: [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n, \quad s \mapsto \vec{r}_L(s) \equiv \vec{r}(t(s))$ (5)

'Natürliche Parametrisierung'

Geschw. in nat. Param.:

$$\| d_s \vec{r}_L(s) \| \overset{(i.5)}{=} \left\| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \Big|_{t=t(s)} \right\| \frac{dt(s)}{ds} \text{ “}=\text{” } \left\| \frac{\cancel{d\vec{r}}}{\cancel{dt}} \right\| \frac{\cancel{dt}}{\cancel{ds}} \text{ ”} = 1 \quad (6)$$

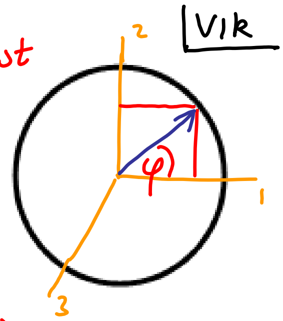
Ist t-Geschw. groß, wächst auch Bogenlänge schnell mit t, 'das hebt sich weg'

sauber formuliert:

$$\frac{dt(s)}{ds} \overset{(C1.e.2)}{=} \frac{1}{\frac{ds(t)}{dt}\Big|_{t=t(s)}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{\| d_t \vec{r}(t) \|}\Bigg|_{t=t(s)} \quad (7)$$

Beispiel: Kreisbewegung

V1k



$\varphi = \omega t$

Bahnkurve: $\vec r : [0,\tau] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto \vec r(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0)^T \qquad (1)$$

Periode: wenn $\cos(\omega\tau) = 1 \Longrightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega}$ (2)

Geschwindigkeit: $\frac{d\vec r}{dt} \overset{(1)}{=} \omega R(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0)^T$, $\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\| \overset{(3)}{=} R\omega$ (3)

Bogenlänge: $s(t) \overset{(j.2)}{=} \int_0^t du \, \|\dot{\vec r}(u)\| \overset{(4)}{=} \int_0^t du \, R\omega = R\omega t$ (4)

Kreisumfang: $s(\tau) \overset{(5),(2)}{=} R\omega \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi R$ ✓ (5)

Umkehrfunktion: $t: [0, 2\pi R] \longrightarrow [0,\tau]$, $s \longmapsto t(s) \overset{(4)}{=} \frac{s}{R\omega}$ (6)

$\tau = t(2\pi R) = \frac{2\pi}{\omega} = \tau$

Natürliche Parametrisierung: $\vec r_L(s) = \vec r(t(s)) \overset{(1,7)}{=} (R\cos(s/R), R\sin(s/R), 0)^T$ (7)

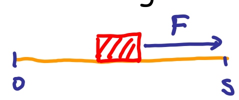
s-Geschwindigkeit: $\|d_s \vec r_L\| \overset{(7)}{=} \left\|R\left(-\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}, \frac{1}{R}\cos s/R, 0\right)^T\right\| = 1$ ✓ (8)

V1.4 Linienintegral

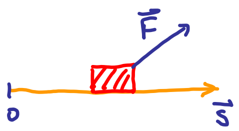
V1e

Physikalische Motivation: Arbeit (W) verrichtet durch Kraft entlang eines Weges.

Falls Richtung der Kraft entlang geradliniger Verschiebung ist: $W = sF$



Falls Richtung der Kraft nicht entlang geradliniger Verschiebung: $W = \vec s \cdot \vec F$



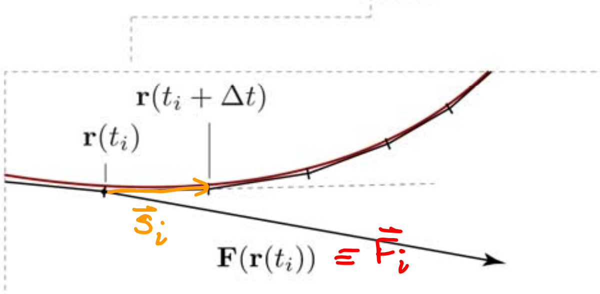
Nicht-geradliniger Weg, γ

mit ortsabhängige Kraft: $\vec F(\vec r(t))$

Parametrisierung:

$$\vec r : [0,\tau] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto \vec r(t) \qquad (1)$$

Diskretisierungsparameter: Δt



Arbeit im Intervall i: $W_i \equiv \vec s_i \cdot \vec F_i$ (2)

Verschiebung im Intervall i: $\vec s_i = \vec r(t_i + \Delta t) - \vec r(t_i) \overset{(c.1)}{=} \Delta t \, \dot{\vec r}(t_i)$ (3)

Gesamtarbeit entlang der Kurve γ:

$$W[\gamma] \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{W_i}_{\vec{s}_i \cdot \vec{F}_i} \qquad (1)$$

mit dieser symbolische Notation ist dies gemeint!

$$\overset{(l.2),(l.3)}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \dot{\vec{r}}(t_i) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \equiv \int_0^{\tau} dt \; \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \equiv \int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{F} \qquad (2)$$

'Linienintegral der Kraft $\vec{F}$ entlant dem Weg γ '

<u>Definition eines allgemeinen Linienintegrals:</u> (3 Konstruktionsschritte)

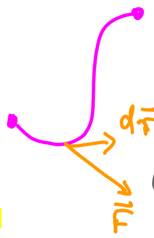
$$\vec{F} : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n , \quad \vec{r} \longmapsto \vec{F}(\vec{r})$$ sei eine vektorwertige Funktion, definiert auf einer Kurve γ (3)

(i) Definiere Parametrisierung v. γ: $\vec{r} : [0,\tau] \longrightarrow \mathbb{R}^n , \quad t \longmapsto \vec{r}(t)$ (4)

(ii) Bilde die reell-wertige Funktion $\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \equiv \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}$ (5)

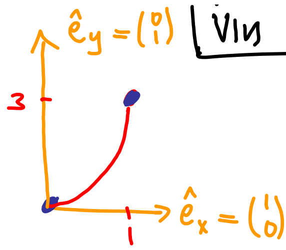
(iii) Integriere über Definitionsbereich des Parameters: $\int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{F} \equiv \int_0^{\tau} dt \; \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}$ (6)

wird auf Wegelement projiziert



Der Wert des Linienintegrals ist <u>unabhängig</u> von der Parametrisierung (analog zu Seite i)

<u>Beispiel:</u> Berechne das Linienintegral $\int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$



für den Weg $\vec{r}(t) = \underbrace{t}_{x(t)} \hat{e}_x + \underbrace{3t^2}_{y(t)} \hat{e}_y \qquad t \in [0,1]$ (1)

und das Feld $\vec{F}(\vec{r}) = \underbrace{(2x + 4y)}_{F_x(\vec{r})} \hat{e}_x + \underbrace{(-x)}_{F_y(\vec{r})} \hat{e}_y$ (2)

Was heißt das explizit?

Wegparametrisierung: $\vec{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^2 , \quad t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ (3)

Vektorfeld: $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad \vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_x(\vec{r}) \\ F_y(\vec{r}) \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ -x \end{pmatrix}$ (4)

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 6t \end{pmatrix} , \qquad \vec{F}(\vec{r}(t)) \overset{(4)}{=} \begin{pmatrix} 2x(t) + 4y(t) \\ -x(t) \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} 2 \cdot t + 4 \cdot 3t^2 \\ -t \end{pmatrix} \qquad (5)$$

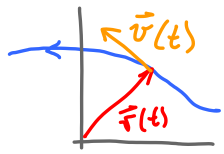
$$\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \overset{(3,5)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 6t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t + 12t^2 \\ -t \end{pmatrix} = 2t + 12t^2 - 6t^2 = 2t + 6t^2 \qquad (6)$$

$$\int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \overset{(m.6)}{=} \int_0^1 dt \; \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} = \int_0^1 dt \left(2t + 6t^2\right) = \left(t^2 + 2t^3\right)\Big|_0^1 = 1 + 2 = 3 \qquad (7)$$

Zusammenfassung V1: Kurven

ZV1

'Kurve': $\gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$ wobei $\vec{r} : I = [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$, $\quad t \mapsto \vec{r}(t)$

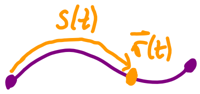


Ort entlang Kurve: $\vec{r}(t) = \hat{e}_j \, x^j(t)$

Kurvengeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{e}_j \, \dot{x}^j(t) = \vec{v}(t)$ liegt 'tangential' zur Kurve

Kurvenlänge: $L[\gamma] = \int_0^\tau dt \, \|\dot{\vec{r}}(t)\|$ unabhängig von Parametrisierung des Weges

Bogenlänge nach Zeit t: $s(t) \equiv \int_0^t du \, \|d_u \vec{r}(u)\|$



$\gamma = \vec{r}[0, \tau]$

Natürliche Parametrisierung durch Bogenlänge: $\vec{r}_L : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$, $\quad s \mapsto \vec{r}_L(s) \equiv \vec{r}(t(s))$, $\quad \|d_s \vec{r}_L(s)\| = 1$

Für Vektorfeld: $\vec{v} : \gamma \to \mathbb{R}^n$, $\quad \vec{r} \mapsto \vec{v}(\vec{r})$

Linienintegral: $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v}$ unabhängig von Parametrisierung des Weges