V2 Felder (Funktionen mehrerer unabhängigen Variablen)

Orts- und zeitabhängige physikalische Größen werden durch "Felder" beschrieben.

Beispiel: Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik:

MAXWELL'S EQUATIONS

In general:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

In matter:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

AUXILLARY FIELDS

Definitions:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$$

In linear media:

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \end{cases}$$

POTENTIALS: $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

Vektor-Analysis: nützlichen Identitäten

PRODUCT RULES

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$

SECOND DERIVATIVES

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

Ziel der folgenden Abschnitte ist, elementare Rechenoperationen für Felder einzuführen.

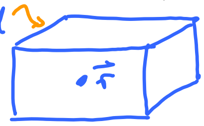
Beispiel 1: Temperatur im Zimmer

Menge aller Punkte im Zimmer

$$T: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{r} \longmapsto T(\vec{r}) \quad = \text{Temperatur am Punkt } \vec{r}$$

$\mathcal{U}$



Beispiel 2: Zeitabhängige Temperatur im Zimmer

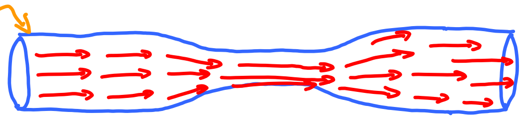
Zeitintervall

$$T: I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, \vec{r}) \longmapsto T(t, \vec{r}) \quad = \text{Temperatur am Punkt } \vec{r} \text{ zur Zeit } t$$

Beispiel 3: Luftfluss durch Tunnel

$\mathcal{U}$



$$\vec{v}: I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

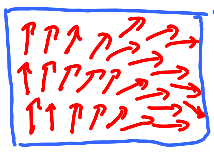
$$(t, \vec{r}) \longmapsto \vec{v}(t, \vec{r}) \quad = \text{Luftgeschwindigkeit am Punkt } \vec{r} \text{ zur Zeit } t$$

Beispiel 4: Ferromagnet

Menge aller Vektoren mit Betrag = 1

$$\hat{n}: I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow S^2 = \{\hat{n} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\hat{n}\| = 1\}$$

$$(t, \vec{r}) \longmapsto \hat{n}(t, \vec{r}) \quad = \text{'Magnetisierung' am Punkt } \vec{r} \text{ zur Zeit } t$$



$\mathcal{U}$

Allgemeine mathematische Struktur eines 'Feldes':

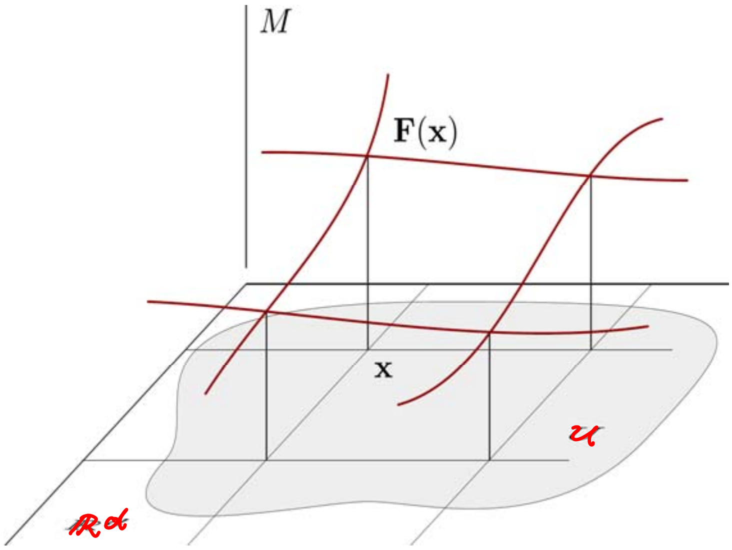
V2c

$$\vec{F}: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{x} = (x^1, \dots, x^d)^T \longmapsto \vec{F}(\vec{x}) = \left(F^1(\vec{x}), \dots, F^n(\vec{x})\right)^T$$

$\mathcal{U}$: 'Basismannigfaltigkeit'

M: 'Zielmannigfaltigkeit'



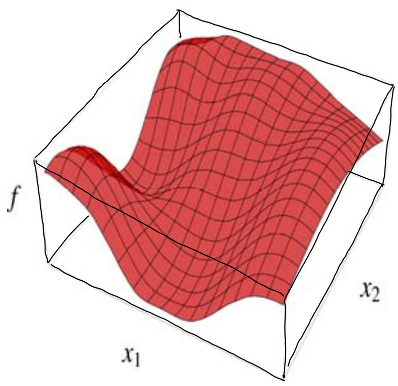
$n = 1$: 'Skalarfeld'

Beispiele: Temperatur, Druck, Dichte

$n > 1$: 'Vektorfeld'

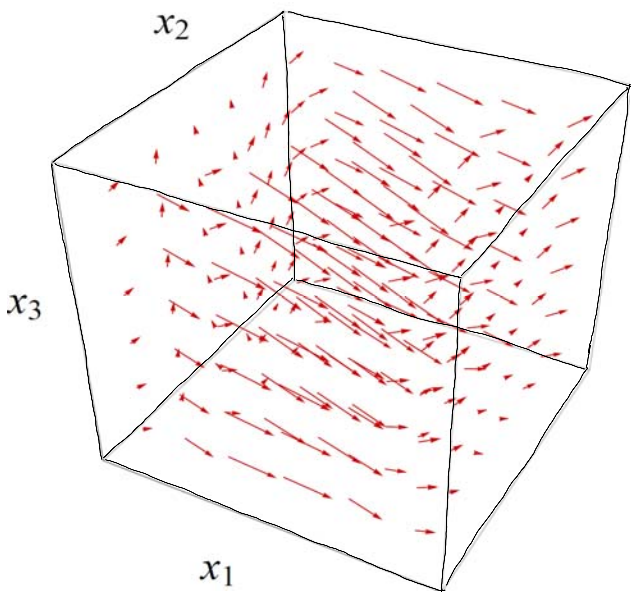
Beispiele: Luftfluss, Magnetfeld,
Elektrisches Feld, Gravitationskraftfeld

V2d

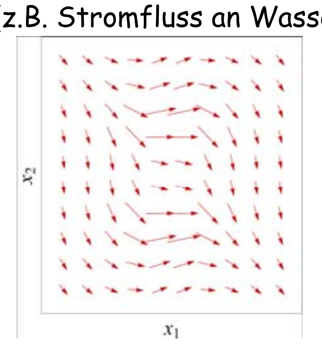


Skalarfeld: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
(z.B. Höhe eines Gebirges)

Vektorfeld: $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
(z.B. Stromfluss im Wassertank)



Vektorfeld: $\vec{v}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
(z.B. Stromfluss an Wasseroberfläche)



Wie ändern sich Felder als Funktion v. $\vec{x}$?
Wie bildet man Ableitungen von Feldern? $\Longrightarrow$ C3: Partielle Ableitungen

C3a

C3 Partielle Ableitungen

Betrachte $f: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ (Skalarfeld)

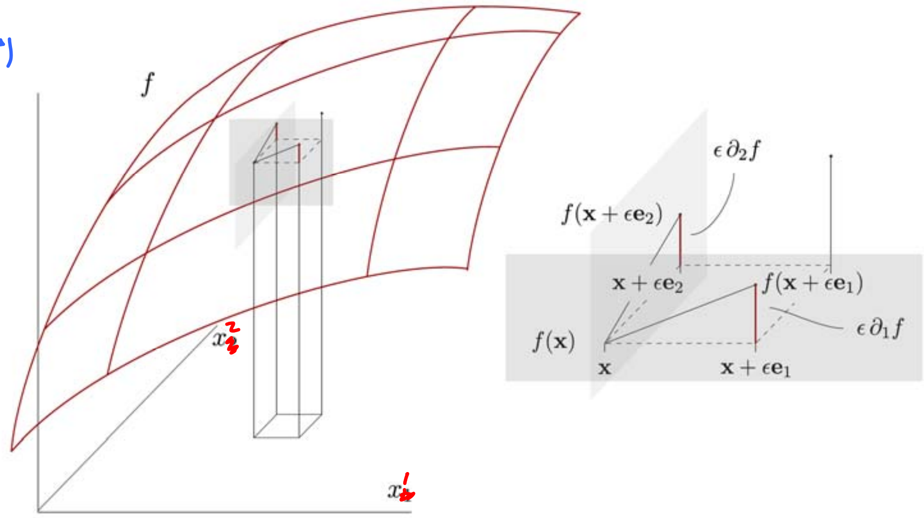
$$\vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = f(x^1, x^2, \ldots, x^d) \qquad (1)$$

Beispiel für d=3, mit $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

C3.1 Partielle Ableitung:

wie ändert sich $f(\vec{x})$ als Funktion v. nur einer der Variablen, x^i, wenn die anderen Variablen festgehalten werden?



C3b

Wie ändert sich $f(\vec{x})$ als Funktion v. nur einer der Variablen, x^i ?

<u>Definition: 'Partielle Ableitung</u> von f am Punkt $\vec{x}$, nach x^i':

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(x^1, \ldots, x^i + \varepsilon, \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n) \right] \qquad (1)$$

nur x^i ändert sich, um ε

In Vektornotation:
$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(\vec{x} + \varepsilon \hat{e}_i) - f(\vec{x}) \right] \equiv \partial_i f(\vec{x}) \qquad (2)$$

Lineare Näherung: $f(\vec{x} + \varepsilon \hat{e}_i) = f(\vec{x}) + \varepsilon\, \partial_i f(\vec{x})$ (2')

Alternative Notationen:
$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x}) \equiv f_i(\vec{x}) \qquad (3)$$

Lieblingsnotation von JvD

eher unüblich

Merkregel: Index oben 'im Nenner der Ableitung' = Index unten in Kurznotation!

<u>Beispiele:</u>

$$\partial_y \big(\underbrace{x \cos(y)}_{f(\vec{x})}\big) = -x \sin y \qquad (4)$$

$$\partial_{x^1} \left(e^{3x^1} \sin(x^2) \right) = 3\, e^{3x^1} \sin(x^2) \qquad (5)$$

[Index, nicht Potenz!]

$$\partial_2 \left(e^{3x^1} \sin(x^2) \right) = e^{3x^1} \cos(x^2) \qquad (6)$$

C3.2 Mehrfache partielle Ableitungen (rekursive Definition)

C3c

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x})\right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} f(\vec{x}) \equiv \partial^2_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i^2 f(\vec{x}) \qquad (1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial x^i}}_{n \text{ mal}} f(\vec{x})\Big)\ldots\Big) \equiv \frac{\partial^n}{\partial (x^i)^n} f(\vec{x}) \equiv \partial^n_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i^n f(\vec{x}) \qquad (2)$$

Gemischte partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x})\right) \equiv \partial_{x^j}\partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_j \partial_i f(\vec{x}) \equiv \partial^2_{j,i} f(\vec{x}) \equiv f_{j,i}(\vec{x}) \qquad (3)$$

Beispiel v. Seite C3a:

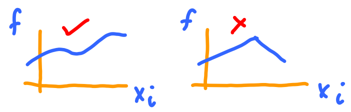
$$\partial_2\, \partial_1 \left(e^{3x^1} \sin(x^2)\right) = \partial_2\, 3e^{3x^1} \sin(x^2) = 3e^{3x^1}\cos(x^2) \qquad (4)$$

gleich!

$$\partial_1\, \partial_2 \left(e^{3x^1} \sin(x^2)\right) = \partial_1\, e^{3x^1} \cos(x^2) = 3e^{3x^1}\cos(x^2) \qquad (5)$$

(falls f stetige Ableitungen bis mindestens zur 2.ten Ordnung besitzt)

Satz v. Schwarz: Für hinreichend glatte Funktionen sind part. Ableitungen vertauschbar:



$$\boxed{\partial_i \partial_j f(\vec{x}) = \partial_j \partial_i f(\vec{x})} \qquad (6)$$

V3 Skalare Felder

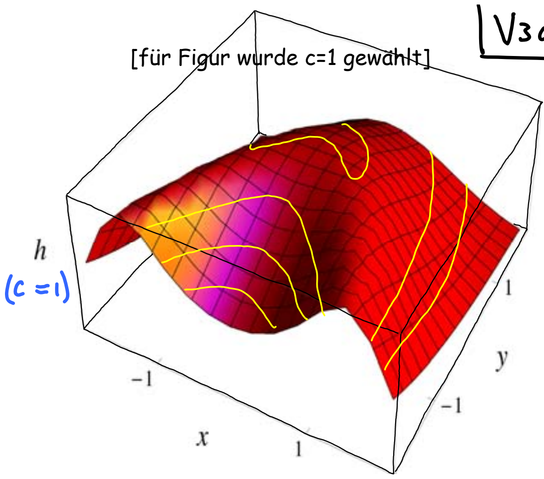
V3a

Beispiel: Höhenfeld

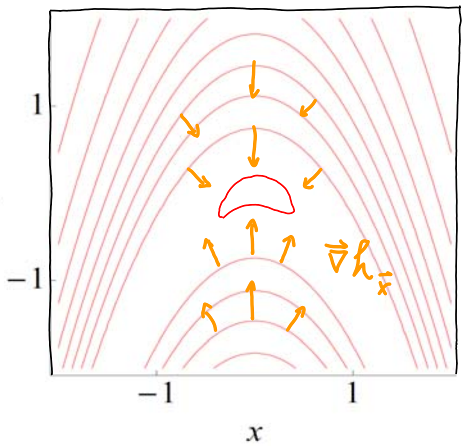
$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto h(\vec{x}) = h(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^2 + c}$$

[für Figur wurde c=1 gewählt]



Kontur-Linien: $h(x,y) = \text{const.}$



Dort, wo Konturlinien dicht liegen, ist es "steil".

Funktion ändert sich am schnellsten in Richtung senkrecht zu den Konturlinien.
Frage: Welcher Vektor gibt diese Richtung an?

Antwort: Gradient:

$$\vec{\nabla} h_{\vec{x}} \overset{(V3e.6)}{=} \begin{pmatrix} \partial_x h \\ \partial_y h \end{pmatrix} = -\frac{2(x^2+y)}{[(x^2+y)^2+c]^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

(wird im Folgenden eingeführt)

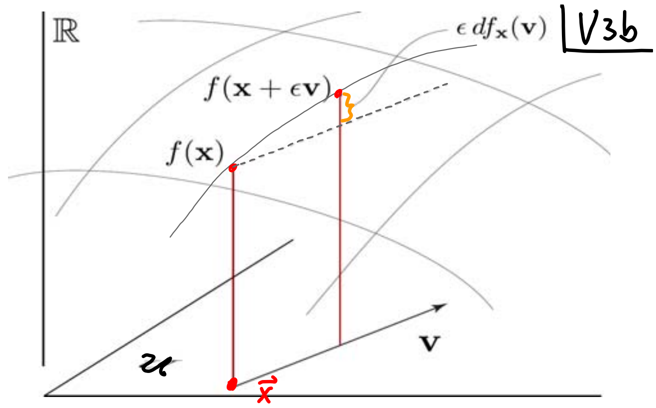
V3.1 Totales Differential

V3b

Wie ändert sich eine Funktion $f(\vec{x})$

an einem gegebenen Punkt $\vec{x} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$

in eine vorgegebene Richtung $\vec{v} \in \mathbb{R}^d$?



'totales Differential' liefert die Antwort:

$$df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{v} \longmapsto df_{\vec{x}}(\vec{v}) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(\vec{x}+\varepsilon\vec{v}) - f(\vec{x}) \right] \qquad (1)$$

vergleiche "Mutter aller Ableitungen", (C1b.3)

Das totale Differential $df_{\vec{x}}$ ist eine 'Maschine', definiert bei $\vec{x}$, die einen Vektor $\vec{v}$ 'frisst' und als Antwort eine Zahl 'ausspuckt', nämlich die differenzielle Änderung v. f bei einem $\vec{v}$ -Schritt.

Falls $\vec{v} = \hat{e}_i$:
$$df_{\vec{x}}(\hat{e}_i) \overset{(1)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(\vec{x}+\varepsilon\hat{e}_i) - f(\vec{x}) \right] \overset{(C3a.2)}{=} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} = \partial_i f(\vec{x}) \qquad (2)$$

Allgemein gilt:
$$df_{\vec{x}}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{d} (\partial_i f) v^i \qquad (3)$$

(Begründung: Seite 3d)

Beispiel: Höhenfeld

V3c

$$h(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^2+c}$$

nachdifferenziert nach x, y

$$dh_{\vec{x}}(\vec{v}) \overset{(V3b.3)}{=} (\partial_x h) v_x + (\partial_y h) v_y = -\frac{2(x^2+y)}{[(x^2+y)^2+c]^2}\left[2x\, v_x + 1\, v_y \right] \qquad (1)$$

$\vec{v} = (v_x, v_y)^T$

Anmerkung: trotz des "d" in der Notation, ist das totale Differential im Allgemeinen <u>nicht</u> infinitessimal klein! Es ist nur dann klein, wenn der Vektor im Argument klein ist:

z.B.:
$$df_{\vec{x}}(\underbrace{\delta\vec{v}}_{\hat{e}_i \delta v^i}) \overset{(V3b.3)}{=} \sum_i \partial_i f(\vec{x})\, \delta v^i \longrightarrow 0 \quad \text{nur, falls} \quad \delta v^i \to 0 \;\; \forall i \qquad (2)$$

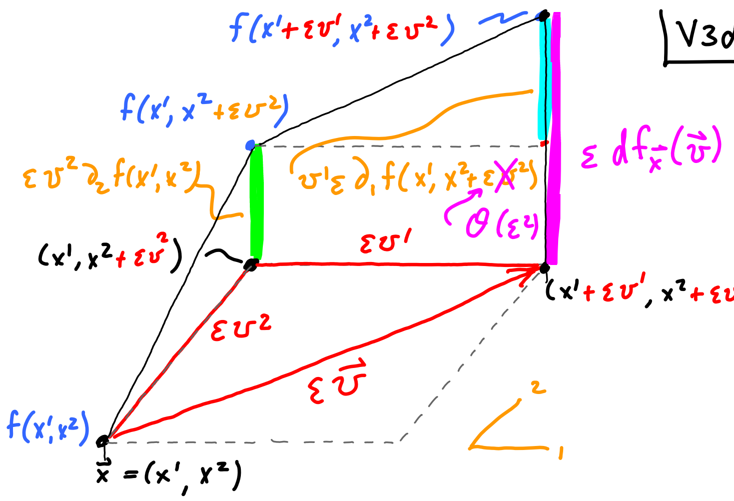
Begründung für (V3b.3):

V3d

explizit für $d = 2$:

$$\vec{v} = \hat{e}_1 v^1 + \hat{e}_2 v^2 \qquad (1)$$

$$df_{\vec{x}}(\vec{v}) \overset{(V3b.1)}{\equiv} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(\vec{x}+\varepsilon\vec{v}) - f(\vec{x}) \right] \qquad (2)$$



subtrahiere und addiere dieselbe Größe

$$[\;] \overset{(2)}{=} \underbrace{f(x^1+\varepsilon v^1, x^2+\varepsilon v^2) - f(x^1, x^2+\varepsilon v^2)} + \underbrace{f(x^1, x^2+\varepsilon v^2) - f(x^1, x^2)} \qquad (3)$$

$$\simeq \varepsilon v^1 \partial_1 f(x^1, x^2+\cancel{\varepsilon v^2}) + \varepsilon v^2 \partial_2 f(x^1, x^2) \qquad (4)$$

$$\simeq \varepsilon v^1 \partial_1 f(x^1, x^2) + \underbrace{\varepsilon v^2 \partial_2\, \varepsilon v^1 \partial_1 f(x^1, x^2)}_{\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \varepsilon v^2 \partial_2 f(x^1, x^2) \qquad (5)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ vernachlässigbar!

(5) eingesetzt in (2)

$$df_{\vec{x}}(\vec{v}) = v^1 \partial_1 f(\vec{x}) + v^2 \partial_2 f(\vec{x}) \overset{ES}{=} \sum_{i=1}^{2} \left(\partial_i f(\vec{x})\right) v^i \qquad (6)$$

Analog folgt (V3b.3) für beliebiges d

V3.2 Gradient

V3e

Kompaktnotation: (C3a.3)

$$df_{\vec{x}}(\vec{v}) \overset{(V3b.3)}{=} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} v^i \overset{ES}{=} \left(\partial_i f(\vec{x})\right) v^i \qquad (1)$$

Das totale Differential 'wirkt linear auf seinen Argument-Vektor':

$$df_x(a\vec{v} + b\vec{w}) \overset{ES}{=} \left(\partial_i f(\vec{x})\right)(a v^i + b w^i) \qquad (2)$$

(1) und (2) lassen sich kompakt schreiben, wenn wir der Funktion f einen neuen Vektor zuordnen:

Def: 'Gradient v. f am Punkt $\vec{x}$:

$\vec{\nabla} f : U \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

'grad f'

$$\vec{x} \longmapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \equiv \begin{pmatrix} \partial_1 f(\vec{x}) \\ \partial_2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial_d f(\vec{x}) \end{pmatrix} \equiv \hat{e}_i \left(\vec{\nabla} f\right)^i(\vec{x}) \qquad (3)$$

i-Komponente des Gradienten-Vektors: $\left(\vec{\nabla} f\right)^i \equiv \partial_i f = \frac{\partial}{\partial x^i}$ (4)

Skalarproduktnotation: $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_i v^i$

für (1): $$df_{\vec{x}}(\vec{v}) = \left(\vec{\nabla} f_{\vec{x}}\right)\cdot \vec{v} \qquad (8)$$

für (2): $$df_{\vec{x}}(a\vec{v} + b\vec{w}) = \left(\vec{\nabla} f_{\vec{x}}\right)\cdot\left(a\vec{v} + b\vec{w}\right) \qquad (9)$$

Beispiel (d=2): Höhenfeld:

$$h(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^2 + c} \qquad (5)$$

$$\vec{\nabla} h_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \partial_x h \\ \partial_y h \end{pmatrix} \qquad (6)$$

vergleiche (VC3.1)

$$= -\frac{2(x^2+y)}{\left[(x^2+y)^2 + c\right]^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

(siehe Fig, Seite V3a !)

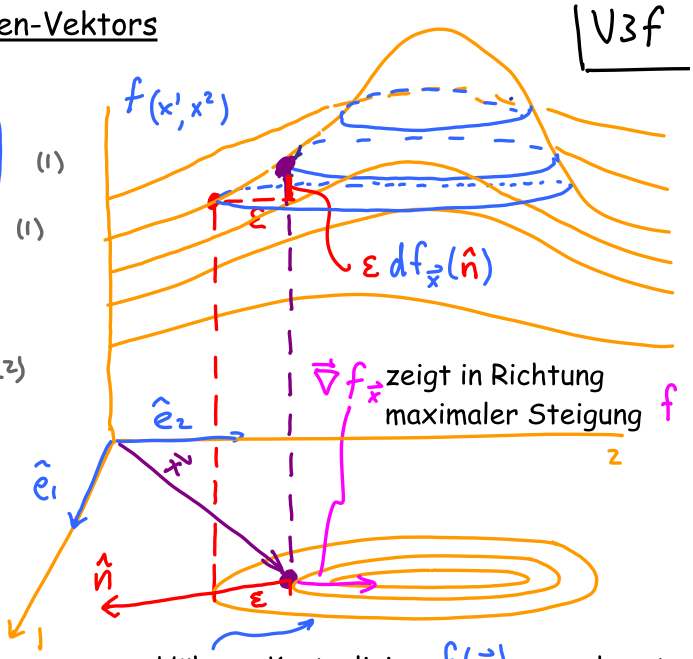
<u>Geometrische Interpretation des Gradienten-Vektors</u>

V3f

Skizze in d = 2 Dimensionen, zur Veranschaulichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{n} = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \simeq \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \partial^2 f(\vec{x}) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(sei ein Einheitsvektor, Richtung beliebig) (1)



$$df_{\vec{x}}(\hat{n}) \overset{(V3b.1)}{\equiv} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[f(\vec{x} + \varepsilon \hat{n}) - f(\vec{x}) \right] \qquad (2)$$

= Steigung in $\hat{n}$ -Richtung (3)

$$\overset{(V3e.8)}{=} \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \cdot \hat{n} \qquad (4)$$

$$\overset{(L3.2a.1)}{=} \cos\theta \, \|\vec{\nabla} f_{\vec{x}}\| \overbrace{\|\hat{n}\|}^{=1} \qquad (5)$$

= { maximal falls $\hat{n} \parallel \vec{\nabla} f_{\vec{x}}$ $\Longrightarrow$
  0 falls $\hat{n} \perp \vec{\nabla} f_{\vec{x}}$ $\Longrightarrow$

$\vec{\nabla} f_{\vec{x}}$ zeigt in Richtung maximaler Steigung v. f (6)

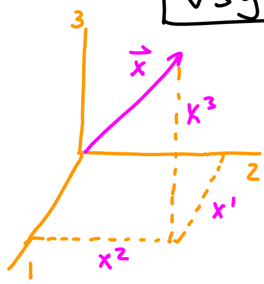
(allgemeiner: Höhenflächen)
$\vec{\nabla} f_{\vec{x}}$ steht $\perp$ auf den Höhenlinien v. f (7)

<u>Beispiel:</u> Sei

V3g

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} = r \qquad (1)$$

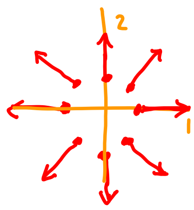
(2)



$$\vec{\nabla} f_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\vec{x}) \\ \partial_2 f(\vec{x}) \\ \partial_3 f(\vec{x}) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

mit $\partial_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x^1} \overset{KR}{=} \dfrac{1}{2} \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \right]^{-1/2} \cdot 2x^1 = \dfrac{x^1}{\|x^1\|}$ (4)

Analog für die anderen Komponenten, also: $\vec{\nabla} f_{\vec{x}} = \dfrac{1}{\|\vec{x}\|} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \hat{x}$ = nach 'aussen' gerichteter Einheitsvektor (5)

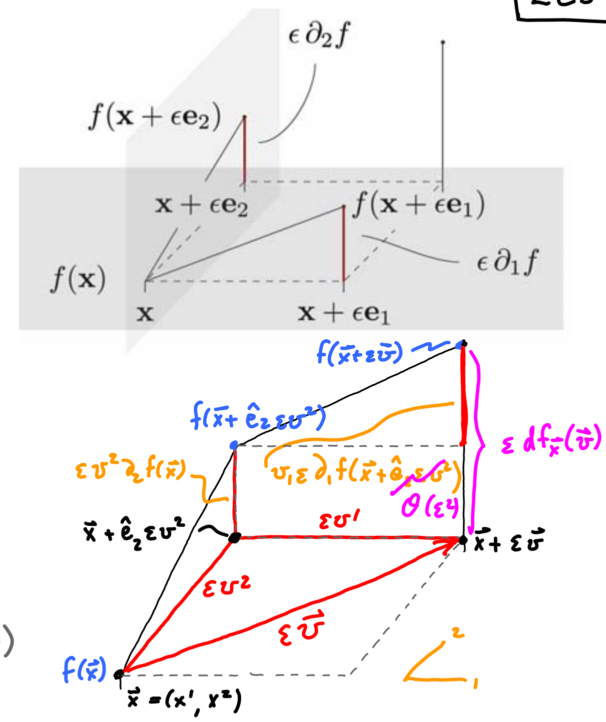


Zusammenfassung C3: Partielle Ableitungen

Partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec x)}{\partial x^i} \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[f(\vec x+\varepsilon\hat e_i) - f(\vec x)\right] \qquad (1)$$

$$\equiv \partial_{x^i} f(\vec x) \equiv \partial_i f(\vec x) \qquad (2)$$



Satz v. Schwarz: $\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f$ (3)

Totales Differential:

$$df_{\vec x}(\vec v) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[f(\vec x+\varepsilon\vec v) - f(\vec x)\right] \qquad (4)$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \partial_i f(\vec x)\, v^i \equiv \vec\nabla f_{\vec x}\cdot\vec v \qquad (5)$$

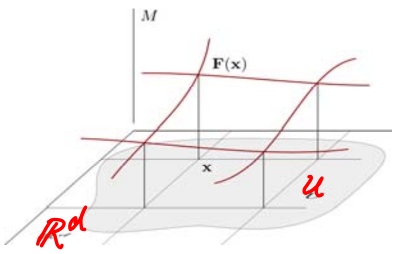
Kettenregel:
(nächstes Mal)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec g(\vec x)) = \sum_k \frac{\partial f(\vec g(\vec x))}{\partial g_k}\cdot\frac{\partial g_k(\vec x)}{\partial x_i} \qquad (6)$$

Zusammenfassung V2: Konzept eines Feldes

$$\vec F: U\subset\mathbb{R}^d \longrightarrow M\subset\mathbb{R}^n$$

$$\vec x=(x^1,\dots,x^d)^T \longmapsto \vec F(\vec x) = \left(F^1(\vec x),\dots,F^d(\vec x)\right)^T \qquad (1)$$

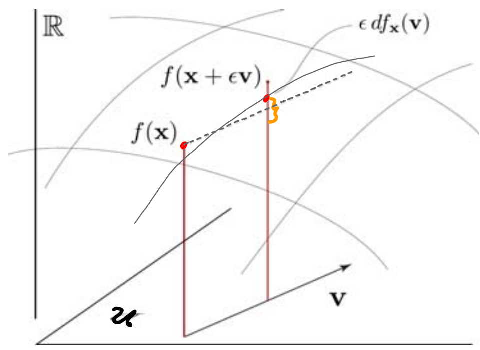


Zusammenfassung V3: Skalarfelder, Gradient

Totales Differential: differentielle Änderung von f bei $\vec x$ durch einen $\vec v$ -Schritt:

$$df_{\vec x}: \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}, \quad \vec v\mapsto df_{\vec x}(\vec v) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[f(\vec x+\varepsilon\vec v) - f(\vec x)\right] \qquad (2)$$

$$df_{\vec x}(\vec v) = \sum_{i=1}^{d}\partial_i f(\vec x)\, v^i \equiv \vec\nabla f_{\vec x}\cdot\vec v \qquad (3)$$



Gradient: (4)

$$\underbrace{\vec\nabla f}_{\text{'grad f'}} : U\subset\mathbb{R}^d \to (\mathbb{R}^d)^T,$$

$$\vec x \mapsto \vec\nabla f_{\vec x} \equiv \begin{pmatrix}\partial_1 f(\vec x)\\ \vdots \\ \partial_d f(\vec x)\end{pmatrix} \equiv \hat e_i\,(\vec\nabla f)^i(\vec x) \qquad (5)$$

$\vec\nabla f_{\vec x}$ zeigt in Richtung maximaler Steigung v. f, steht $\perp$ auf den 'Höhenflächen' v. f