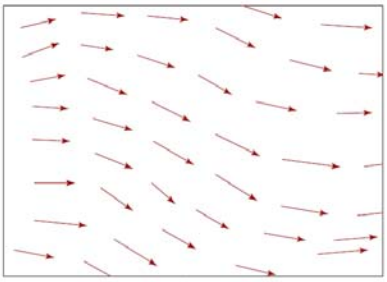
V4 Vektorfelder

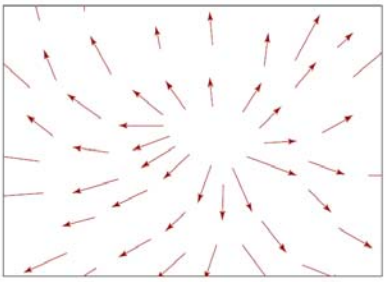
V4.1a

$$\vec{v}: U \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$
$$\vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x})$$

Vektorfelder haben oft Struktur:



I: quellfrei, wirbelfrei

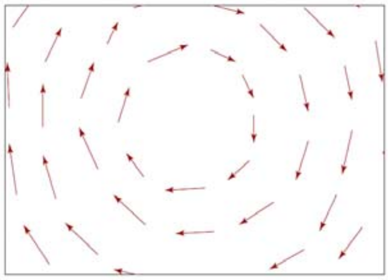


II: Quellfeld

$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \neq 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$



III: Wirbelfeld

$\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{w}$

$\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

Ziel (langfristig): wie lassen sich diese Eigenschaften mathematisch charakterisieren?

Zunächst brauchen wir noch ein Calculus-Resultat: Kettenregel für partielle Ableitungen.

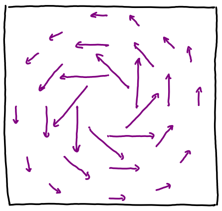
C3.3 Kettenregel für partielle Ableitungen

C3c

Betrachte erstens:

$$\vec{g}: U \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix} \longmapsto \vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g^n(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Beispiel für g:
Geschwindigkeit an Wasseroberfläche, $\vec{v}$:



$d = 2$
$n = 2$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v^1(\vec{x}) \\ v^2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Betrachte zweitens:

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \longmapsto f(\vec{y}) = f(y^1, \ldots, y^n) \quad (3)$$

Beispiel für f: Betragsquadrat des Vektors $\vec{y}$:

$$f(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2 \quad (4)$$

Betrachte nun Verkettung v. f und g:

$$f \circ \vec{g}: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{x} \longmapsto f(\vec{g}(\vec{x}))$$
$$= f(g^1(\vec{x}), \ldots, g^n(\vec{x})) \quad (5)$$

Beispiel für Verkettung: Betragsquadrat der Wassergeschwindigkeit am Punkt $\vec{x}$:

$$f(\vec{v}(\vec{x})) = \|\vec{v}(\vec{x})\|^2 \quad (5)$$
$$= (v^1(\vec{x}))^2 + (v^2(\vec{x}))^2$$
$$= \frac{1}{(x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \quad (6)$$

Wie ändert sich $f(\vec{g}(\vec{x}))$ mit x^i ?

C3d

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{g}(\vec{x})) \overset{(C3a.2)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big[f\big(\vec{g}(\underbrace{\vec{x}+\varepsilon\hat{e}_i}_{})\big) - f(\vec{g}(\vec{x}))\Big] \qquad (1)$$

$(*) \; (C3a.3)$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big[f\big(\vec{g}(\vec{x}) + \varepsilon\,\partial_i\vec{g}(\vec{x})\big) - f(\vec{g}(\vec{x}))\Big] \qquad (2)$$

$(**) \; (V3b.3)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^k}\bigg|_{\vec{y}=\vec{g}(\vec{x})} \cdot \frac{\partial g^k(\vec{x})}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g^k}\,\frac{\partial g^k(\vec{x})}{\partial x^i} \qquad (3)$$

'Kettenregel für partielle Ableitungen' [wie normale Kettenregel (C1d), nur mit zusätzlicher Summe über k

Um herauszubekommen, wie f(g(x)) v. x^i abhängt:
Frage erst, wie f v. g^k abhängt, und dann, wie g^k v. x^i abhängt

---

$$(*) \quad g^k(\vec{x}+\varepsilon\hat{e}_i) \overset{(C3a.3)}{=} g^k(\vec{x}) + \varepsilon\,\partial_i g^k(\vec{x}) \qquad (4)$$

gilt für jede Komponente v. $\vec{g} = \begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^n \end{pmatrix}$ $(k=1,\dots,n)$

$$(**) \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big[f(\vec{y}+\varepsilon\vec{v}) - f(\vec{y})\big] \overset{(V3b.3)}{=} \sum_{k=1}^{n} \partial_{y^k} f(\vec{y})\, v^k \qquad (5)$$

Hier: $\vec{y} \mapsto \vec{g}(\vec{x})$, $\vec{v} \mapsto \partial_i\vec{g}(\vec{x})$, $v^k \mapsto \partial_i g^k(\vec{x})$

Forts. Beispiel: Wie ändert sich Geschwindigkeit an Wasseroberfläche mit x^1 ?

C3e

$$\partial_1 f(\vec{v}(\vec{x})) \overset{(C3c.6)}{=} \partial_1\left[\frac{1}{(x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2}\right] = \left[0 + \frac{-2}{(x^1)^3}\cdot 1\right] = -\frac{2}{(x^1)^3} \qquad (1)$$

Nochmal, nun mit der allgemeinen Kettenregel für partielle Ableitungen gerechnet:

$$f(\vec{y}) \overset{(C3c.4)}{=} (y^1)^2 + (y^2)^2, \quad (2a) \qquad \vec{v}(\vec{x}) \overset{(C3c.2)}{=} \left(-\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^1}\right)^T \qquad (2b)$$

$$\partial_1 f(\vec{v}(\vec{x})) \overset{(C3d.3)}{=} \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^k}\bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \cdot \frac{\partial v^k(\vec{x})}{\partial x^1} \qquad (3)$$

$$= \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^1}\bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial v^1(\vec{x})}{\partial x^1} + \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^2}\bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial v^2(\vec{x})}{\partial x^1} \qquad (4)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y^1}\Big(\overbrace{(y^1)^2+(y^2)^2}^{(2a)}\Big)\bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\overbrace{-\frac{1}{x^2}}^{(2b)}\Big)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y^2}\Big(\overbrace{(y^1)^2+(y^2)^2}^{(2a)}\Big)\bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\overbrace{\frac{1}{x^1}}^{(2b)}\Big) \qquad (5)$$

$$= 2y^2\Big|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \cdot \left(\frac{-1}{(x^1)^2}\right) = 2\,v^2(\vec{x})\left(\frac{-1}{(x^1)^2}\right) = 2\,\frac{1}{x^1}\left(-\frac{1}{(x^1)^2}\right) = -\frac{2}{(x^1)^3} \;\checkmark \qquad (6)$$

V4.1 Gradientenfeld

V4.1b

Gegeben sei ein Skalarfeld:

$$\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \vec{x} \longmapsto \phi(\vec{x}) \tag{1}$$

Der Gradient dieses Skalarfelds wird ein "Gradientenfeld" genannt:

$$\vec{\nabla}\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \qquad \vec{x} \longmapsto \vec{\nabla}\phi_{\vec{x}} \equiv \begin{bmatrix} \partial_1 \phi(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial_d \phi(\vec{x}) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Umgekehrt: gegeben sei ein Vektorfeld:

$$\vec{v} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \qquad \vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x}) \tag{3}$$

Frage: ist $\vec{v}$ ein Gradientenfeld?

d.h., existiert ein Skalarfeld ϕ, der Form (1), mit $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi_{\vec{x}}$? (4)

Beispiel: ist $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2x^1(x^2)^2 \\ 2(x^1)^2 x^2 \end{bmatrix}$ ein Gradientenfeld? (5)

Ja, denn es lässt sich schreiben als:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \partial_1 (x^1 x^2)^2 \\ \partial_2 (x^1 x^2)^2 \end{bmatrix} = \vec{\nabla}\phi_{\vec{x}} \quad \text{mit} \quad \phi(\vec{x}) = (x^1 x^2)^2 \tag{6}$$

V4.1c

Wichtige Anwendung: konservative Kraftfelder (Arbeit ist wegunabhängig) sind Gradientenfelder. Deswegen ist es wichtig, Kriterien zu finden die klären, wann $\vec{v}(\vec{x})$ ein Gradientenfeld ist.

Sei $\vec{v}(\vec{x})$ ein Gradientenfeld (hinreichend glatt), dann gilt: $v^i \overset{(b.4)}{=} \partial_i \phi$ (1)

Daraus folgt einerseits: ∂_j (1) $\quad \partial_j v^i = \partial_j \partial_i \phi$ (2)

andrerseits: ∂_i (1) $\quad \partial_i v^j = \partial_i \partial_j \phi$ (3)

laut Satz v. Schwarz, (C3b.6), gilt (2) = (3)

Somit: (2) − (3): $\quad \partial_j v^i - \partial_i v^j = 0$ (4)

Beispiel v. Seite V4b:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} v^1(\vec{x}) \\ v^2(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^1(x^2)^2 \\ 2(x^1)^2 x^2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1 = \partial_1 \left(2(x^1)^2 x^2\right) - \partial_2 \left(2x^1(x^2)^2\right) \tag{6}$$

$$= 4x^1x^2 - 4x^1x^2 = 0 \tag{7}$$

(4) ist ein notwendige, aber nicht ausreichende, Bedingung für ein Gradientenfeld.

Es kann gezeigt werden (viel später in der Vorlesung): V4.1d

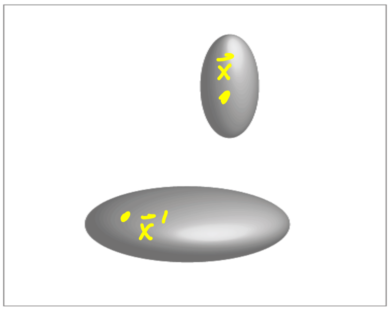
Ein Vektorfeld $\vec{v} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist ein Gradientenfeld, falls

$$\partial_i v^j - \partial_j v^i = 0 \qquad \forall\ i,j = 1, \dots, d \tag{1}$$

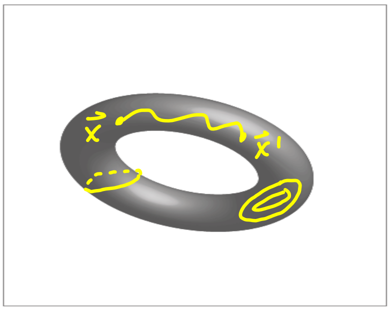
und falls der Definitionsbereich, U, 'einfach zusammenhängend' ist.

Def.: 'Zusammenhängendes Gebiet:' jede zwei Punkte $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathcal{U}$
können verbunden werden durch einen Weg $\gamma_{\vec{x} \to \vec{x}'}$ (2)

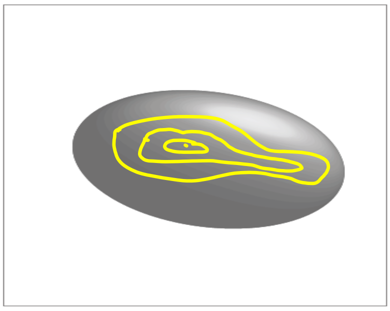
Def.: 'Einfach zusammenhängendes Gebiet:' jeder geschlossene Weg $\gamma_c \subset \mathcal{U}$ (3)
kann zu einem Punkt zusammengezogen werden.



nicht zusammenhängend



zusammenhängend



einfach zusammenhängend

Wir werden zeigen, dass folgende Aussagen äquivalent sind: V4.1e

$$\left(\vec{v} \text{ ist ein Gradientenfeld} \right) \Longleftrightarrow \left(\int_{\gamma_{\vec{x} \to \vec{x}'}} d\vec{r} \cdot \vec{v} \text{ ist wegunabhängig } \forall\ \vec{x}, \vec{x}' \in \mathcal{U} \right) \tag{1}$$

Physikalische Bedeutung: Arbeit verrichtet gegen Kraft entlang geschlossenem Weg γ:

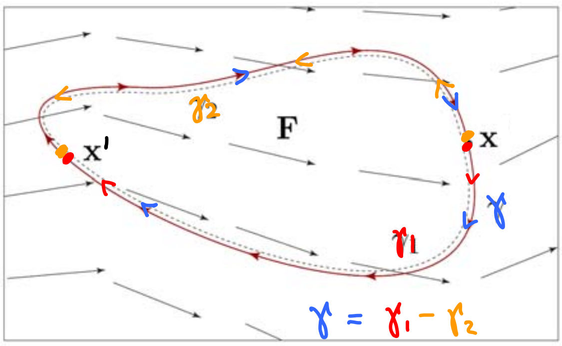
$$W[\gamma] = \oint_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{F} \tag{1}$$

geschlossener Weg

$$= \int_{\gamma_1} d\vec{r} \cdot \vec{F} + \int_{-\gamma_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} \tag{2}$$

$$= \int_{\gamma_1} d\vec{r} \cdot \vec{F} - \int_{\gamma_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} \tag{3}$$

$$= W[\gamma_1] - W[\gamma_2] \tag{4}$$



Falls $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist, gilt laut (1): $W[\gamma_1] = W[\gamma_2]$ (5)

$\Longrightarrow$ $W[\gamma] = 0$ $\Rightarrow$ Arbeit entlang geschlossenem Weg = 0 (6)

Fazit: ein Gradientenfeld beschreibt ein 'konservatives Kraftfeld'

[Die Energie, die bei den entgegen der Kraft gerichteten Wegstrecken verloren geht, wird kompensiert durch die Energie, die bei den entlang der Kraft gerichteten Wegstrecken gewonnen wird.]

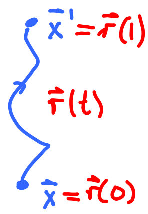
Begründung für (e.1) $\Longrightarrow$:

V4.1f

Annahme: $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi_{\vec{r}}$ ist ein Gradientenfeld. (1)

Parametrisierung eines Weges $\gamma_{\vec{x}\to x'}$ $\quad \vec{r}: [0,1] \to \mathbb{R}^d, \quad t \mapsto \vec{r}(t),$ (2)

$\vec{r}(0) = \vec{x}, \quad \vec{r}(1) = \vec{x}'$ (3)



$$\int_{\gamma_{\vec{x}\to\vec{x}'}} d\vec{r}\cdot\vec{v} \overset{(V1m.6)}{=} \int_0^1 dt\, \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\cdot \overbrace{\vec{v}(\vec{r}(t))}^{(1)\ \vec{\nabla}\phi(\vec{r}(t))}$$

$$\overset{(V3e.3)}{=} \int_0^1 dt \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial\phi(\vec{r}(t))}{\partial r^k}\, \frac{dr^k(t)}{dt}$$

$$\overset{(C3d.3)}{=} \int_0^1 dt\, \frac{d\phi(\vec{r}(t))}{dt}$$

$$= \phi(\vec{r}(1)) - \phi(\vec{r}(0)) \overset{(3)}{=} \phi(\vec{x}') - \phi(\vec{x})$$

= hängt nur von Endpunkten ab, also unabhängig vom Weg dazwischen!! ($\checkmark\Longrightarrow$)

(V3e.3): $\vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix}\partial^1\phi \\ \vdots \\ \partial^d\phi\end{pmatrix}$

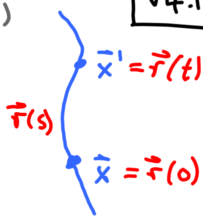
$$\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g^k}\cdot\frac{\partial g^k(\vec{x})}{\partial x^i} \overset{(C3d.3)}{=} \frac{\partial f(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x^i}$$

$f \rightsquigarrow \phi, \quad \vec{g} \rightsquigarrow \vec{r}, \quad x^i \rightsquigarrow t$

Begründung für (e.1) $\Longleftarrow$:

Annahme: $\int_{\gamma_{\vec{x}\to\vec{x}'}} d\vec{r}\cdot\vec{v}$ ist wegunabhängig. (1)

V4.1g



Wähle Weg durch Punkt $\vec{x}$, parametrisiert als $\quad \vec{r}: [0,t] \to \mathbb{R}^d, \quad s \mapsto \vec{r}(s)$ (2)

und definiere: $\phi(\vec{x}') \equiv \int_{\gamma_{\vec{x}\to\vec{x}'}} \vec{v}\cdot d\vec{r}$ (3)

(für gegebenes $\vec{x}$, ist (3), laut Annahme (1), eine Funktion nur v. $\vec{x}'$, nicht vom Weg!)

$$\phi(\vec{r}(t)) = \int_0^t ds\, \vec{v}(\vec{r}(s))\cdot\frac{d\vec{r}(s)}{ds} \qquad (4)$$

Ableiten nach t:

links: $\frac{d}{dt}\phi(\vec{r}(t)) \overset{(C3d.3)}{=} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial\phi(\vec{r}(t))}{\partial r^i}\, \frac{dr^i(t)}{dt}$ (5)

$= \vec{\nabla}\phi_{\vec{r}}\Big|_{\vec{r}(t)}\cdot\dot{\vec{r}}(t)$ (6)

rechts: $\frac{d}{dt}\int_0^t ds\, \vec{v}(\vec{r}(s))\cdot\frac{d\vec{r}(s)}{ds}$ (7)

$= \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ (8)

t = 0 setzen: $\vec{\nabla}\phi_{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}(\vec{x})\cdot\dot{\vec{r}}(0)$ (9)

Dies gilt für beliebige Werte der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(0)$;

somit: $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi_{\vec{x}}$ (10) ($\checkmark\Longleftarrow$)

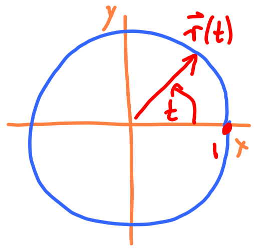
Beispiel 1: $\vec{v} : U = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ (1) V4.1h

Es gilt: $\partial_x v_y = \partial_x (x) = 1, \quad \partial_y v_x = \partial_y (y) = 1$ (2)

sind gleich

Ferner ist U einfach zusammenhängend, also ist $\vec{v}$ ein Gradientenfeld (siehe V4d.1)

Konsistenzcheck der Wegunabhängigkeit, nach (e.1):
ist Linienintegral entlang geschlossenen Weg = 0?



Parametrisierung eines Kreises: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ (3) $\quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ (4)

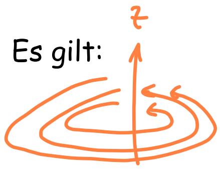
$t \in [0, 2\pi]$

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{v} = \int_0^{2\pi} dt\, \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{r}(t)) = \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (5)$$

$v_x(t) \overset{(1)}{=} y(t)$, $\quad v_y(t) \overset{(1)}{=} x(t)$

$$= \int_0^{2\pi} dt \left[-\sin^2 t + \cos^2 t \right] = 0 \quad \checkmark \quad (6)$$

Beispiel 2: $\vec{B} : U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ V4.1i (1)



Es gilt:

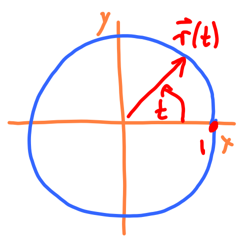
$$\partial_x B_y = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad (2)$$

$$\partial_y B_x = -\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y \cdot (-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

sind gleich

Aber: U ist nicht einfach zusammenhängend, also ist $\vec{v}$ kein Gradientenfeld (V4c.1)

Konsistenzcheck, nach (d.1): Linienintegral entlang geschlossenem Weg, der Ursprung einschließt, sollte $\neq$ 0 sein!



Parametrisierung eines Kreises: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ (3) $\quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ (4)

$t \in [0, 2\pi]$

$$\int d\vec{r} \cdot \vec{v} = \int_0^{\pi} dt\, \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{r}(t)) = \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{[\cos^2 t + \sin^2 t]}}_{=1} \quad (5)$$

$B_x(t) \overset{(1)}{=} y(t)$, $\quad B_y(t) \overset{(1)}{=} x(t)$

$$= \int_0^{2\pi} dt \underbrace{\left[+\sin^2 t + \cos^2 t \right]}_{=1} = 2\pi \neq 0 \quad \checkmark \quad (6)$$

Nabla-Operator

Erinnerung: V3.2 Gradient (siehe Seite V3e-i)

$$\underbrace{\vec{\nabla} f}_{\text{'grad f'}} : \; U \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \qquad (1)$$

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \dots, \; \hat{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \longmapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \overset{\text{(ZV3.1)}}{\equiv} \begin{pmatrix} (\vec{\nabla} f)^1 \\ (\vec{\nabla} f)^2 \\ \vdots \\ (\vec{\nabla} f)^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\vec{x}) \\ \partial_2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial_d f(\vec{x}) \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{d} \hat{e}_i \, \partial_i \right)}_{\equiv \vec{\nabla}} f \equiv \vec{\nabla} f \qquad (2)$$

Definition: '<u>Nabla-Operator</u>':
(in kartesischen Koordinaten;
Definition üblich für d = 2 und 3)

(nützliche Eselsbrücke, zum Merken von Gradient, Divergenz und Rotation)

$$\vec{\nabla} \equiv \sum_{i=1}^{d} \hat{e}_i \, \partial_i = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_d \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$\vec{\nabla}$ ist ein Vektor-Differentialoperator, wirkt auf alle Funktionen, die rechts von ihm stehen. (4)

beinhaltet Ableitungen

liefert einen Vektor, wenn er auf eine skalere Funktion einwirkt

Beispiel:
(d=2)

$$\vec{\nabla}\left(e^{3x^1} \sin(x^2) \right) = \begin{pmatrix} \partial^1 \\ \partial^2 \end{pmatrix} \left(e^{3x^1} \sin(x^2) \right) = \begin{pmatrix} 3 e^{3x^1} \sin(x^2) \\ e^{3x^1} \cos(x^2) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Mathematische Struktur des Nabla-Operators:

Raum d. Funktionen:

Sei $f \in F = \{ g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \; \vec{x} \to g(\vec{x}) \mid$ g hinreichend glatt$\}$ (2)

$$\vec{\nabla} : F \longrightarrow F^d \qquad (3)$$

$$f \longmapsto \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_d f \end{pmatrix} \qquad (4)$$

<u>Rechenregeln:</u>

$$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g \qquad (5)$$

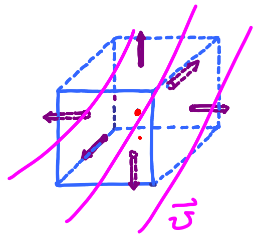
$$\vec{\nabla}(f g) = (\vec{\nabla} f) g + f (\vec{\nabla} g) \qquad \text{(Produktregel)} \qquad (6)$$

Beweis v. (6): $\hookrightarrow = \partial_i (f g) \overset{\text{Produktregel}}{=} (\partial_i f) g + f (\partial_i g)$ (7)

V4.2 Divergenz Geometrische Interpretation: Ausfluss pro Volumenelement (siehe Januar) | V4.2b

Vektorfeld:

$$\vec{v}: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \longmapsto \vec{v}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} v^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ v^d(\vec{x}) \end{bmatrix} \overset{ES}{=} \hat{e}_j v^j(\vec{x}) \qquad (1)$$



Definition: 'Divergenz von $\vec{v}$':
(in Cartesischen Koordinaten)

$$\text{div}\, \vec{v} \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{v}: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^1 \qquad (2)$$

$$\vec{x} \longmapsto \vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{x}) \overset{ES}{\equiv} \partial_i v^i(\vec{x}) = \partial_1 v^1 + \partial_2 v^2 + \ldots \partial_d v^d \qquad (3)$$

Notationscheck: $$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \underbrace{(\overbrace{\hat{e}_i \partial_i}^{(V4.2a.3)}) \cdot (\overbrace{\hat{e}_j v^j}^{(1)})}_{\delta_{ij}} = \partial_i \delta_{ij} v^j = \partial_i v^i \qquad (4)$$

Beispiel: $$\vec{\nabla}\cdot\vec{x} = \partial_1 x^1 + \partial_2 x^2 + \partial_3 x^3 = 1 + 1 + 1 = 3 \qquad (5)$$

<u>Rechenregeln:</u> $$\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \vec{\nabla}\cdot\vec{w} \qquad (6)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{v}) = (\vec{\nabla}\varphi)\cdot\vec{v} + \varphi\, \vec{\nabla}\cdot\vec{v} \qquad (7)$$

Beweis v. (6): $$= \partial_i(\varphi v^i) \overset{\text{Produktregel}}{=} (\partial_i\varphi) v^i + \varphi(\partial_i v^i) \qquad (8)$$

Laplace-Operator (Divergenz v. Gradient): | V4.2c

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi) \overset{(d.3)}{=} \partial_i(\partial_i\varphi) = \sum_i \partial_i^2 \varphi \equiv \vec{\nabla}^2\varphi \qquad (1)$$

Definition 'Laplace- Operator':

$$\Delta \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \partial_i\partial_i = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \qquad (2)$$

(Skalar-Differential operator, wirkt auf alle Funktionen, die rechts von ihm stehen)

Beispiel: $$\vec{\nabla}^2 r = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \qquad (3)$$

$$\partial_i (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \frac{\cancel{2} x^i}{\cancel{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \qquad (4)$$

gilt für i = 1, 2, 3

$$\partial_i^2 = -\frac{\cancel{2}(x^i)^2}{\cancel{2}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{r^3}\left[-(x^i)^2 + r^2\right] \qquad (6)$$

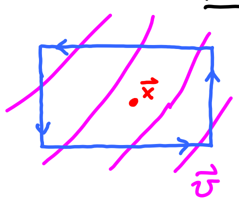
$$\vec{\nabla}^2 r \overset{(4)}{=} \sum_{i=1}^{3}\left(\quad \right) \overset{(6)}{=} \frac{1}{r^3}\left[-r^2 + 3r^2\right] = \frac{2}{r} \qquad (7)$$

V4.3 Rotation   Geometrische Interpretation: Zirkulation pro Flächenelement (Januar 2014)

V4.3a

Vektorfeld: (hier: alle Indizes unten, wie in L4)

$$\vec v : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec x \longmapsto \vec v(\vec x) = \begin{bmatrix} v^1(\vec x) \\ \vdots \\ v^d(\vec x) \end{bmatrix} \overset{ES}{=} \hat e_j v_j(\vec x) \qquad (1)$$



Definition: 'Rotation von $\vec v$':

(nur in d=3 Dimensionen definiert)

$$\mathrm{rot}\,\vec v \equiv \vec\nabla \times \vec v \; : \; \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec x \longmapsto \vec\nabla \times \vec v(\vec x) \overset{ES}{\equiv} \partial_i v_j \varepsilon_{ijk} \hat e_k = \begin{bmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Notationscheck:

$$\vec\nabla \times \vec v = \underbrace{\overbrace{(\hat e_i \partial_i)}^{(V4.2a.3)} \times \overbrace{(\hat e_j v_j)}^{(1)}}_{\varepsilon_{ijk}\hat e_k} = \partial_i v_j \varepsilon_{ijk} \hat e_k \;\checkmark \qquad (3)$$

Beispiel: Sei

$$\vec v = \begin{bmatrix} (x_2)^3 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec\nabla \times \vec v = \begin{bmatrix} \partial_2 0 - \partial_3(-x_1) \\ \partial_3 x_2^3 - \partial_1 0 \\ \partial_1(-x_1) - \partial_2 x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Rechenregeln:

$$\vec\nabla \times (\vec v + \vec w) = \vec\nabla \times \vec v + \vec\nabla \times \vec w$$

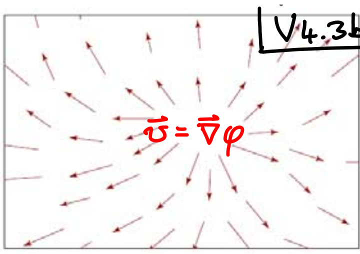
$$\vec\nabla \times (\varphi \vec v) = (\vec\nabla\varphi) \times \vec v + \varphi(\vec\nabla \times \vec v) \qquad (5)$$

Beweis v. (5):

$$= \varepsilon_{ijk}\, \partial_i(\varphi v_j)\, \hat e_k \overset{\text{Produktregel}}{=} \varepsilon_{ijk}\left[(\partial_i\varphi) v_j + \varphi(\partial_i v_j)\right] \hat e_k = \qquad (6)$$

Gradientenfelder sind 'wirbelfrei':

V4.3b



Für ein beliebiges (zweifach differenzierbares) Vektorfeld gilt:

$$\vec\nabla \times (\vec\nabla\varphi) = 0 \qquad (1)$$

Beweis:
(Beispielaufgabe)

$$\vec\nabla \times (\vec\nabla\varphi) \overset{(3a.2)}{=} \partial_i(\partial_j\varphi)\, \varepsilon_{ijk}\, \hat e_k \qquad (2)$$

ε_{ijk} ist antisymmetrisch:

$$= \partial_i \partial_j \varphi (-\varepsilon_{jik})\, \hat e_k \qquad (3)$$

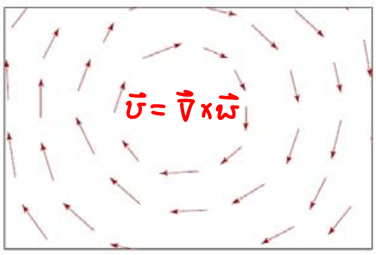
Summationsindizes umbenennen: $i \leftrightarrow j$

$$= -\partial_j \partial_i \varphi \; \varepsilon_{ijk}\, \hat e_k \qquad (4)$$

$\partial_i\partial_j\varphi = \partial_j\partial_i\varphi$

$$= -\partial_i \partial_j \varphi\, \varepsilon_{ijk}\, \hat e_k \overset{(a.2)}{=} -\vec\nabla \times (\vec\nabla\varphi) \qquad (5)$$

$(5) = -(5) \Rightarrow (5) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec\nabla \times (\vec\nabla\varphi) = 0 \;\checkmark \qquad (6)$



Wirbelfelder sind 'quelfrei':

$$\vec\nabla \cdot (\vec\nabla \times \vec v) = 0 \qquad (7)$$

Beweis analog (Hausaufgaben)

Zusammenfassung V4.1: Gradientenfeld

ZV4.1

Gradientenfeld: $\vec{\nabla}\phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \longmapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}}$ (1)

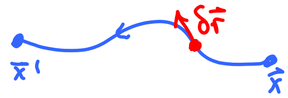
$\left(\vec{v} \text{ ist ein Gradientenfeld} \right) \Longleftrightarrow \left(\partial_j v^i - \partial_i v^j = 0 \, , \right.$ und U ist einfach zusammenhängend $\left. \right)$ (2)

$\left(\vec{v} \text{ ist ein Gradientenfeld} \right) \Longleftrightarrow \left(\int_{\gamma_{\vec{x}\to\vec{x}'}} d\vec{r}\cdot\vec{v} \text{ ist wegunabhängig } \forall \, \vec{x}, \vec{x}' \in \mathcal{U} \right)$ (3)

$\Updownarrow$

$\oint d\vec{r}\cdot\vec{v} = 0$ für geschlossenen Weg

Konkret: $\int_{\gamma_{\vec{x}\to\vec{x}'}} d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\phi = \phi(\vec{x}') - \phi(\vec{x})$



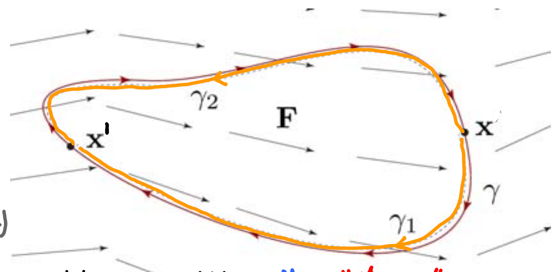
(4)

Konservatives Kraftfeld ist ein Gradientenfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V_{\vec{r}}$ (5)

$W[\gamma] = \oint d\vec{r}\cdot\vec{F} = 0$ (6)

$\Longleftrightarrow \quad W[\gamma_1] = W[\gamma_2]$ (7)

Arbeit von x nach x' ist unabhängig vom Weg!



geschlossener Weg: $\gamma = "\gamma_1 - \gamma_2"$

Zusammenfassung V4.2,3: Nabla, Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace

ZV4.2,3

Skalarfeld: $\varphi(\vec{r})$; Vektorfeld: $\vec{v}(\vec{r})$ (1)

Partielle Ableitung: $\partial_1 \varphi = \dfrac{\partial \varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} \equiv \lim_{\Delta x^1 \to 0} \dfrac{\varphi(x^1 + \Delta x^1, x^2, x^3) - \varphi(x^1, x^2, x^3)}{\Delta x^1}$ (2)

Totales Differential: $d_{\vec{x}} f(\vec{v}) = \sum_j \partial_j f(\vec{x}) \, v^j = \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \cdot \vec{v}$ (3)

Gradient: $\vec{\nabla}\varphi_{\vec{x}} = \hat{e}_i \, \partial_i \varphi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \partial_1 \varphi(\vec{x}) \\ \partial_2 \varphi(\vec{x}) \\ \partial_3 \varphi(\vec{x}) \end{bmatrix}$ (4)

Nabla-Operator: (Vektor-Diff.-Operator) $\vec{\nabla} = \hat{e}_i \partial_i = \hat{e}_1 \partial_1 + \hat{e}_2 \partial_2 + \hat{e}_3 \partial_3$ (5)

Laplace-Operator: $\vec{\nabla}^2 = \Delta = \partial_i \partial_i$ (6)

Divergenz: $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \partial_i v^i = \partial_1 v^1 + \partial_2 v^2 + \partial_3 v^3$ (7)

Rotation: (alle Indizes unten) $\vec{\nabla}\times\vec{v} = \varepsilon_{ijk} \, \partial_i v_j \, \hat{e}_k = \begin{bmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{bmatrix}$ (8)

Gradientenfelder sind 'wirbelfrei': $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = 0$ (9)

Wirbelfelder sind 'quelfrei': $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = 0$ (10)