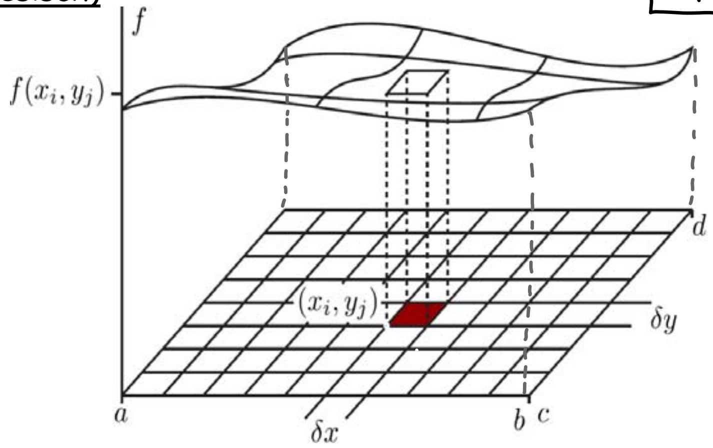
C4 Mehrdimensionale Integration (Kartesisch)

C4.1 2D Integration über Rechteck



$$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x,y)$$

Diskretisierungschritte:

$$\delta_x = \frac{b-a}{N_x} \quad , \quad \delta_y = \frac{d-c}{N_y}$$

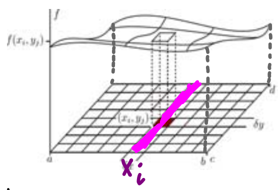
Volumen $\simeq \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} f(x_i, y_j)\, \delta_x \delta_y$ (Riemann-Summe)

Def. v 2D-Integral:

$$\lim_{N_x, N_y \to \infty} \delta_x \delta_y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} f(x_i, y_j) \equiv \int_{[a,b]\times[c,d]} dx\, dy \; f(x,y)$$

Integrations -Domäne

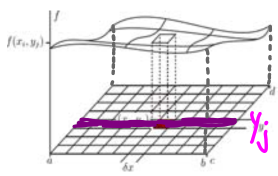
Fubini's Theorem: Integrationsreihenfolge ist egal



$$\int_{[a,b]\times[c,d]} dx\, dy\; f(x,y) = \lim_{N_x \to \infty} \delta_x \sum_{i=1}^{N_x} \underbrace{\lim_{N_y \to \infty} \delta_y \sum_{j=1}^{N_y} f(x_i, y_j)}_{\text{1D-Integral, mit } x_i \text{ fest}} \qquad (1)$$

$$= \lim_{N_x \to \infty} \delta_x \sum_{i=1}^{N_x} \underbrace{\int_c^d dy\; f(x_i, y)}_{\text{Funktion v. } x_i \text{, kann integriert werden}} = \int_a^b dx \int_c^d dy\; f(x,y) \qquad (2)$$

Alternativ:



$$\int_{[a,b]\times[c,d]} dx\, dy\; f(x,y) = \lim_{N_y \to \infty} \delta_y \sum_{j=1}^{N_y} \underbrace{\lim_{N_x \to \infty} \delta_x \sum_{i=1}^{N_x} f(x_i, y_j)}_{\text{1D-Integral, mit } y_j \text{ fest}} \qquad (3)$$

$$= \lim_{N_y \to \infty} \delta_y \sum_{j=1}^{N_y} \underbrace{\int_a^b dx\; f(x, y_j)}_{\text{Funktion v. } y_j \text{, kann integriert werden}} = \int_c^d dy \int_a^b dx\; f(x,y) \qquad (4)$$

Intuitive Begründung:
Zählreihenfolge der Quader in Zeilen oder Spalten ist egal.

$$\boxed{\text{Fubini:} \quad \int_{[a,b]\times[c,d]} dx\, dy\; f(x,y) = \int_a^b dx \int_c^d dy\; f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\; f(x,y)} \qquad (5)$$

C4c

Beispiel $f: [0,2]\times[0,1] \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = xy + y^2 \qquad (1)$$

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy\, f(x,y) = \int_0^2 dx \int_0^1 dy\, (xy + y^2) = \int_0^2 dx \left(x\, \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1 \qquad (2)$$

$$= \int_0^2 dx \left(x\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x\right)\Big|_0^2 = \tfrac{1}{4}\cdot 4 + \tfrac{1}{3}\cdot 2 = \tfrac{5}{3} \qquad (3)$$

Fubini stimmt!

$$\int_0^1 dy \int_0^2 dx\, f(x,y) = \int_0^1 dy \int_0^2 dx\, (xy + y^2) = \int_0^1 dy \left(\tfrac{1}{2}x^2 y + x y^2\right)\Big|_0^2 \qquad (4)$$

$$= \int_0^1 dy \left(\tfrac{1}{2}\cdot 4\, y + 2y^2\right) = \left(2\cdot\tfrac{1}{2}y^2 + 2\,\tfrac{1}{3}\cdot y^3\right)\Big|_0^1 = 1\cdot 1 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3} \qquad (5)$$

Analog in 3D: $$\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} dx\, dy\, dz\, f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\, f(x,y,z) \qquad (6)$$

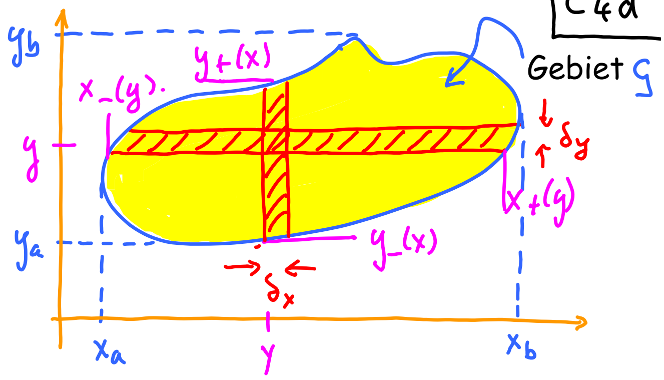
Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig

C4d

C4.2 Integration über allgemeiner Domänen

Riemann-Summe:

$$\simeq \delta_x \sum_{x_a < x_i < x_b} \cdot\ \delta_y \sum_{y_-(x_i) < y_j < y_+(x_i)} f(x_i, y_j) \qquad (1)$$



Integral v. Funktion $f(x,y)$ über d. Fläche:

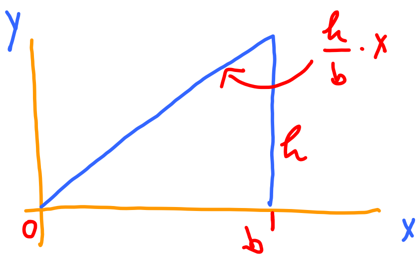
$$\int_G dx\, dy\, f(x,y) \equiv \int_{x_a}^{x_b} dx \left[\int_{y_-(x)}^{y_+(x)} dy\, f(x,y)\right] \overset{\text{nach Fubini}}{=} \int_{y_a}^{y_b} dy \left[\int_{x_-(y)}^{x_+(y)} dx\, f(x,y)\right] \qquad (2)$$

Für das "innere" (zweite) Integral sind die Grenzen abhängig von der "äußeren" (ersten) Integrationsvariable.

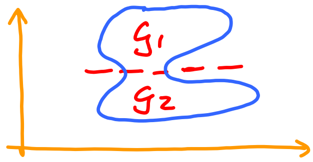
Fläche v.Dreieck:

$$F = \int_0^b dx \int_0^{(h/b)x} dy \cdot 1 = \int_0^b dx\; y\Big|_0^{(h/b)x} \qquad (3)$$

$$= \int_0^b dx\, (h/b)x = \frac{h}{b}\,\frac{1}{2}x^2\Big|_0^b = \frac{1}{2}h\cdot b \qquad (4)$$



Bemerkung: $y_\pm(x)$ bzw. $x_\pm(y)$ müssen eindeutige Funktionen sein; falls nicht, hilft Unterteilung des Integrals in mehrere Teile:



C4e

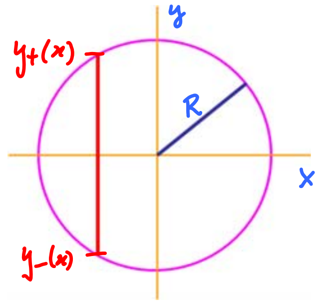
Beispiel: Kreisfläche

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (1)$$

$$y_\pm = \pm\sqrt{R^2-x^2} \qquad (2)$$

$$A \overset{(d.2)}{=} \int_{-R}^{R} dx \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} dy \cdot 1 \qquad (3)$$

$$= \int_{-R}^{R} dx \,[y_+(x)-y_-(x)] \overset{(2)}{=} 2\int_{-R}^{R} dx \sqrt{R^2-x^2} \qquad (4)$$



Substition: $x = -R\cos t$ Grenzen: $-R = -R\cos(0)$ (5)

Maß: $\frac{dx}{\cancel{dt}} = R\sin t \cdot dt$ $+R = -R\cos(\pi)$

$$A \overset{(2)}{=} 2\int_0^\pi dt\,(R\sin t)\underbrace{\sqrt{R^2-R^2\cos^2 t}}_{R\sqrt{1-\cos^2 t} = R\sin t} \qquad (6),\ (7)$$

$$= 2R^2 \underbrace{\int_0^\pi dt\, \overset{u}{\sin^2 t}\cdot \overset{v'}{1}}_{\pi/2} = \pi R^2 \qquad (8)$$

part. Int.

$\square$

C4f

Integration in d Dimensionen, $\mathbb{R}^d$

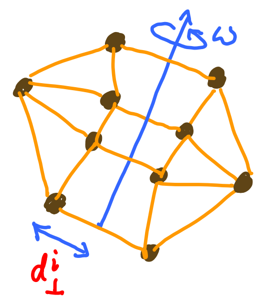
analog zu $\mathbb{R}^2$: Hintereinanderausführen von d eindimensionalen Integralen, Reihenfolge egal

d=3: Volumenintegrale $\int_G dV f(\vec{r}) = \int dx\, dy\, dz\, f(x,y,z)$ (1)

Beispiel: Trägheitsmoment eines homogenen Würfels

'Trägheitsmoment': $I = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(d_\perp^i\right)^2$

Senkrechter Abstand von Masse i zur Drehachse



Starrer Körper von Massenpunkten

Kontinuumslimes:

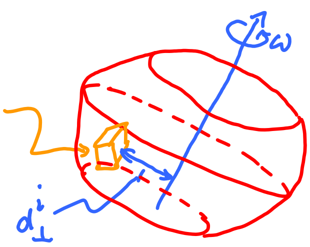
(sehr viele, dicht gepackte Massenpunkte)

$$I = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta m_i}{\delta V}\right)\left(d_\perp^i\right)^2 \delta V \qquad (2)$$

Volumenelement

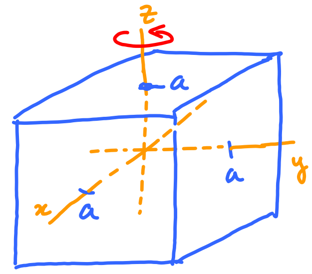
$$= \int_G dV\, \rho(\vec{r})\, d_\perp^2(\vec{r}) \qquad (3)$$

Massendichte



Für einen homogenen Würfel sind kartesische Koordinaten geschickt: C4g

$$\mathcal{G} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , \quad |x| \le a , \ |y| \le a , \ |z| \le a \} \qquad (1)$$



Massendichte: $$\rho(\vec{r}) = \frac{M}{(2a)^3} = \text{konstant} \equiv \rho_0 \qquad (2)$$

z-Achse sei Drehachse: $$d^2 = x^2 + y^2 \qquad (3)$$

Trägheitsmoment: $$I \overset{(13.3)}{=} \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy \int_{-a}^{a} dz \ \rho_0 \cdot \overbrace{(x^2 + y^2)}^{d^2} \qquad (4)$$

Seitenlänge: $2a$

integriere z: $$= \rho_0 \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy \ \underbrace{z \Big|_{-a}^{a}}_{2a} \ (x^2 + y^2) \qquad (5)$$

integriere y: $$= \rho_0 \, 2a \int_{-a}^{a} dx \ \underbrace{\left(y x^2 + \tfrac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-a}^{a}}_{2a x^2 + \frac{2}{3} a^3} \qquad (6)$$

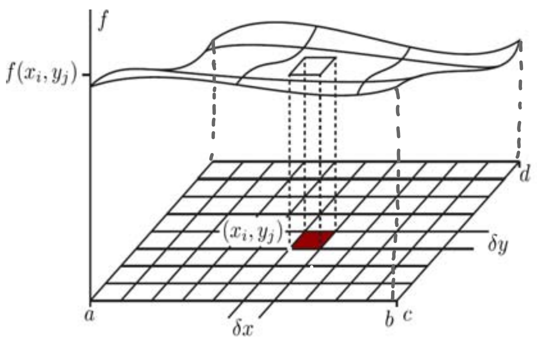
integriere x: $$= \rho_0 (2a) \left[2a \underbrace{\tfrac{1}{3} x^3}_{\frac{2}{3} a^3} + \tfrac{2}{3} a^3 \cdot \underbrace{x}_{2a} \right]_{-a}^{a} = \overset{(2)\ \frac{M}{8a^3}}{\rho_0} \, a^5 \cdot \frac{16}{3} \qquad (7)$$

$$I = \frac{2}{3} M a^2 \qquad (8)$$

<u>Zusammenfassung: C4 Mehrdimensionale Integration (Kartesisch)</u> ZC4a

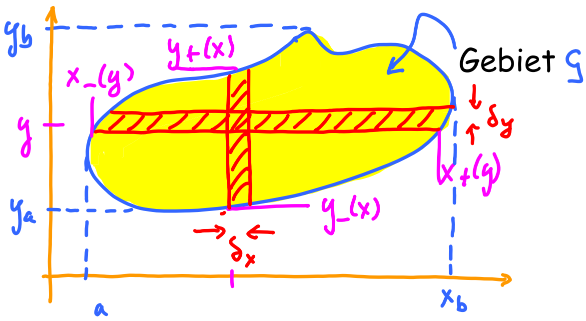
<u>Integration in $\mathbb{R}^2$</u>

$$\int_a^b dx \int_c^d dy \ f(x,y) \equiv \lim_{N_x, N_y \to \infty} \delta_x \delta_y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} f(x_i, y_j)$$



Fubini: Integrationsreihenfolge ist egal:

$$\int_a^b dx \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} dy \ f(x,y) = \int_{y_a}^{y_b} dy \int_{x_-(y)}^{x_+(y)} dx \ f(x,y)$$



Für das "innere" (zweite) Integral sind die Grenzen abhängig von der "äußeren" (ersten) Integrationsvariable.

Analog in 3D: $$\int_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} dx\, dy\, dz \ f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz \ f(x,y,z)$$

Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig