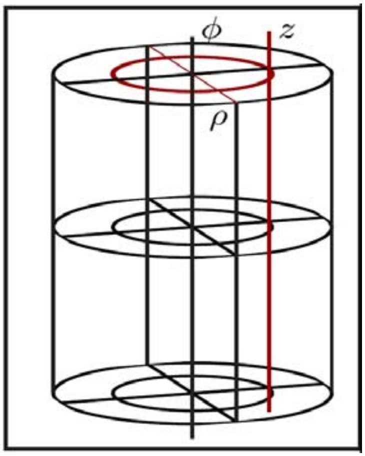
V5 Krummlinige Koordinatensysteme

Übersicht / Vorschau:

Motivation: Symmetrien des Systems ausnutzen, um Beschreibung zu vereinfachen!

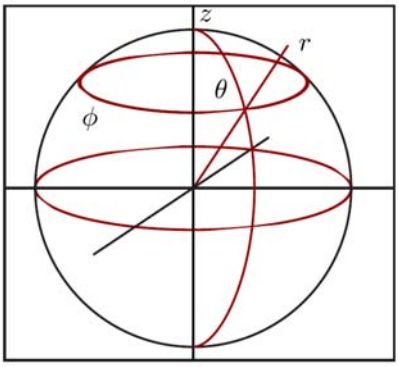
Beispiel Stromdurchflossener Leiter: Stärke des Magnetfelds hängt nur vom Abstand ρ zum Leiter ab:
Also nutze Abstand als einen der Koordinaten!
"Zylindersymmetrie" "Polarkoordinaten"

$$x^1 = \rho \cos\phi \quad , \quad x^2 = \rho \sin\phi , \quad x^3 = z$$



Beispiel Plantenbewegung: Stärke der Kraft zwischen Sonne und Planet hängt nur vom Abstand ab.
Also nutze Abstand als einen der Koordinaten
"Kugelsymmetrie" "Kugelkoordinaten"

$$x^1 = r \sin\theta \cos\phi \quad , \quad x^2 = r \sin\theta \sin\phi \quad , \quad x^3 = r\cos\theta$$



Das hat allerdings seinen Preis:
lokales Dreibein v. Basisvektoren wird koordinatenabhängig!

V5.1 Definition eines Koordinatensystems

Ein Koordinatensystem ist eine "glatte" Abbildung von Vektoren auf Koordinaten

Beispiel: Cartesische Koordinaten

= Koordinaten bezüglich Standardbasis

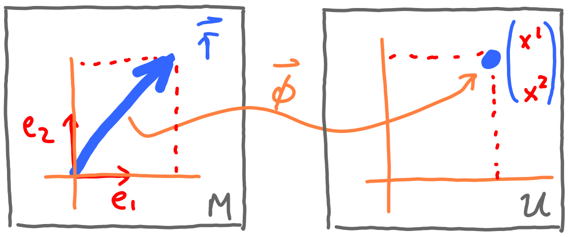
$$\vec{\phi} : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{r} \longmapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \equiv \vec{\phi}(\vec{r})$$

Vektor Koordinaten

$$\vec{\phi}^{-1} : \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \longmapsto \vec{0} + \hat{e}_1 x^1 + \hat{e}_2 x^2 \equiv \vec{r}(\vec{\phi})$$

[Ursprung, wird vortan nicht explizit notiert]



Vektoren Koordinaten

['glatt': $\vec{\phi}$ ist eine Bijektion, $\vec{\phi}$ und $\vec{\phi}^{-1}$ differenzierbar, 'Diffeomorphismus']

Allgemeine Formulierung:

$$\vec{\phi} : M \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$$

$$\vec{r} \longmapsto \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^d \end{pmatrix} \equiv \vec{\phi}(\vec{r})$$

'Koordinaten', die den Vektor $\vec{r}$ beschreiben : y^j, $j=1,\dots,d$

$$\vec{\phi}^{-1} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^d$$

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^d \end{pmatrix} \longmapsto \vec{r}(\vec{\phi})$$

Der Vektor, der durch die Koordinaten $\vec{\phi}$ beschrieben wird.

Beispiel: Polarkoordinaten

V5c

(1)

$x^1 = \rho \cos\phi$ (1)

$x^2 = \rho \sin\phi$ (2)

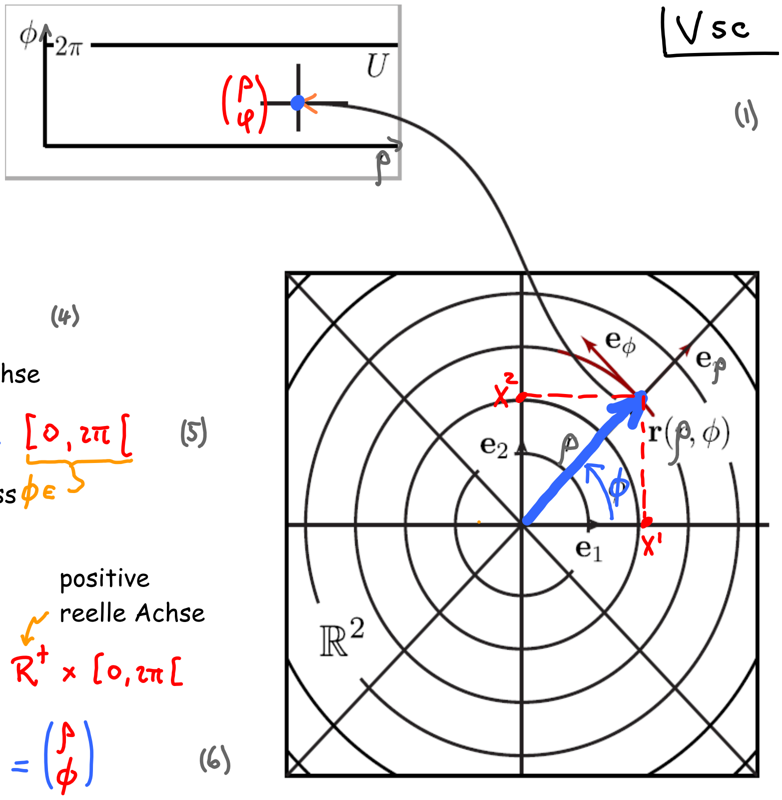
$(y^1 =)\quad \rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ (3)

$\in \mathbb{R}^+ = \{\rho \in \mathbb{R} \mid \rho > 0\}$ (4)

positive reele Achse

$(y^2 =)\quad \phi = \arctan\frac{x^2}{x^1} + n\pi \quad \in [0, 2\pi[$ (5)

so gewählt, dass $\phi \in$



der Nullvektor ist in Polarkoordinaten nicht eindeutig definiert, wird also ausgeschlossen

positive reelle Achse

$\vec{\phi}: \quad M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \longrightarrow \mathcal{U} = \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$

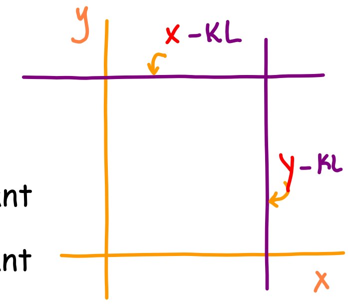
$\vec{r} \longmapsto \vec{\phi}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \end{pmatrix}$ (6)

$\vec{\phi}^{-1}: \quad \vec{\phi} = \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \end{pmatrix} \longmapsto \vec{r}(\rho, \phi) = \rho \cos\phi \, \hat{e}_1 + \rho \sin\phi \, \hat{e}_2$ (7)

Koordinatenlinien

V5d

Def.: entlang einer '<u>Koordinatenlinie</u>' (KL) sind alle Koordinaten konstant, bis auf eine;
diese parametrisiert die Koordinatenline.



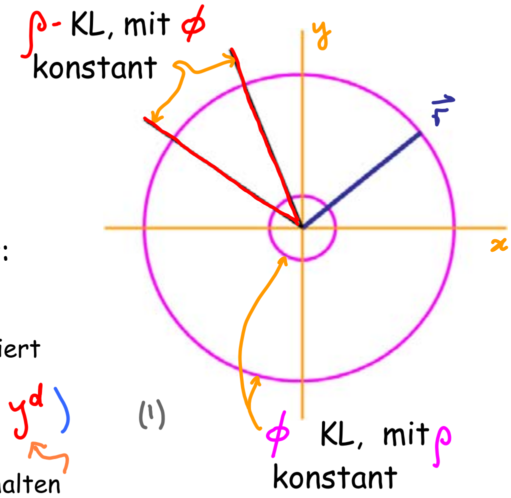
Cartesisch: y-KL: parametrisiert durch y, mit x konstant

x-KL: parametrisiert durch x, mit y konstant

Polarkoordinaten:

ρ-KL: parametrisiert durch ρ, mit ϕ konstant

ϕ-KL: parametrisiert durch ϕ, mit ρ konstant



Allgemein: 'Koordinatenlinie' für j-Koordinate:
variere y^j, halte alle andere Koordinaten konstant:

$\vec{r}_j \; : \; I \longrightarrow M$

wird variert

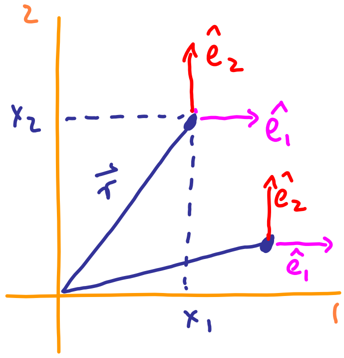
$y^j \longmapsto \vec{r}_j(y^j) \equiv \vec{r}(y^1, \ldots, y^j, \ldots, y^d)$ (1)

werden konstant gehalten

Lokale Basis:

V5e

Def.: "Lokale Basis":
Ein lokaler Basisvektor gibt an, in welche Richtung sich der Ortsvektor ändert, wenn eine der Koordinaten geändert wird:



Cartesisch: $\vec{r}(x^1,x^2) = \hat{e}_1 x^1 + \hat{e}_2 x^2$ (1)

$$\vec{v}_1 \underset{(V1c.2)}{\equiv} \frac{d\,\vec{r}_1(x^1)}{dx^1} \underset{(d.1)}{=} \partial_{x^1}\vec{r}(x^1,x^2) \overset{(1)}{=} \hat{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\vec{v}_2 \equiv \frac{d\,\vec{r}_2(x^2)}{dx^2} = \partial_{x^2}\vec{r}(x^1,x^2) \overset{(1)}{=} \hat{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad (3)$$

Ableitung entlang der Koordinatenlinie

Kurvengeschwindigkeit entlang der Koordinatenlinie

Eigenschaften der kartesischen lokalen Basis:
- tangential zu KL
- orthonormal: $\sim$ $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_{i'} = \delta_{ii'}$
- ortsunabhängig

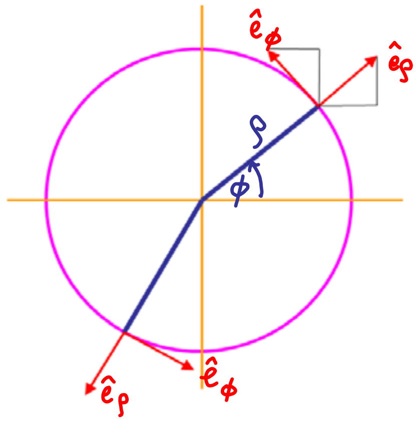
Lokale Basis für Polarkoordinaten:

V5f

[Konstruktion analog zu (e.2), (e.3)]

Ortsvektor:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}(\rho,\phi) &\overset{(c.7)}{=} \rho\cos\phi\,\hat{e}_1 + \rho\sin\phi\,\hat{e}_2 \\ &= \rho\,\hat{e}_\rho\end{aligned}} \quad (1)$$



$$(\vec{v}_\rho)_{\vec{r}} \equiv \frac{d}{d\rho}\underbrace{\vec{r}_\rho(\rho)}_{\rho\text{-KL}} = \partial_\rho \vec{r}(\rho,\phi) = \underbrace{\cos\phi\,\hat{e}_1 + \sin\phi\,\hat{e}_2}_{} \equiv \hat{e}_\rho \quad (2)$$

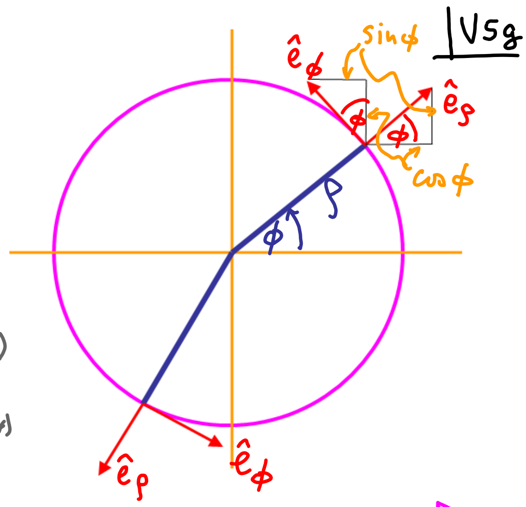
Betrag = $\left[\cos^2\phi + \sin^2\phi\right]^{1/2} = 1$ (3)

$$(\vec{v}_\phi)_{\vec{r}} \equiv \frac{d}{d\phi}\underbrace{\vec{r}_\phi(\phi)}_{\phi\text{-KL}} = \partial_\phi \vec{r}(\rho,\phi) = \underbrace{-\rho\sin\phi\,\hat{e}_1 + \rho\cos\phi\,\hat{e}_2}_{} \equiv \rho\,\hat{e}_\phi \quad (4)$$

Betrag = $\left[\rho^2\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi\right]^{1/2} = \rho$ (5)

Geometrische Betrachtung lokaler Basis

VSg



$$\hat{e}_\rho \overset{(f.2)}{=} \cos\phi\ \hat{e}_1 + \sin\phi\ \hat{e}_2 \qquad (1)$$

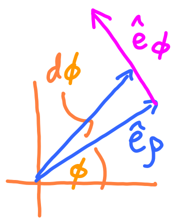
$$\hat{e}_\phi \overset{(f.4)}{=} -\sin\phi\ \hat{e}_1 + \cos\phi\ \hat{e}_2 \qquad (2)$$

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho = 1 = \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi \qquad (3)$$

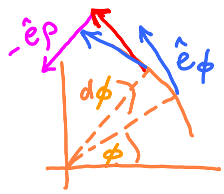
$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\phi = (-\cos\phi \sin\phi + \sin\phi\cos\phi) = 0 \qquad (4)$$

Lokale Basis ist orthonormal: $\hat{e}_{y^1} \cdot \hat{e}_{y^2} \overset{(3,4)}{=} \delta_{y^1 y^2}$ (4')

Lokale Basis ist orts<u>ab</u>hängig:



$$\partial_\rho \hat{e}_\rho \overset{(1)}{=} 0, \quad \partial_\phi \hat{e}_\rho \overset{(1)}{=} -\sin\phi\ \hat{e}_1 + \cos\phi\ \hat{e}_2 \overset{(2)}{=} \hat{e}_\phi \qquad (5)$$

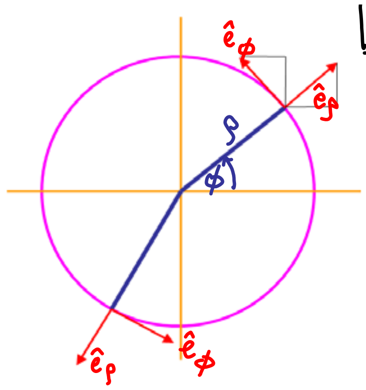


$$\partial_\rho \hat{e}_\phi \overset{(2)}{=} 0, \quad \partial_\phi \hat{e}_\phi \overset{(2)}{=} -\cos\phi\ \hat{e}_1 - \sin\phi\ \hat{e}_2 \overset{(1)}{=} -\hat{e}_\rho \qquad (6)$$

Diese Beziehungen sind konsistent mit Figur!

VSh

Zusammenfassend: lokale Basis für Polarkoordinaten ist:



$$\hat{e}_\rho = \cos\phi\ \hat{e}_1 + \sin\phi\ \hat{e}_2 = \frac{(\vec{v}_\rho)_{\vec{r}}}{\|(\vec{v}_\rho)_{\vec{r}}\|} \qquad (1)$$

$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\ \hat{e}_1 + \cos\phi\ \hat{e}_2 = \frac{(\vec{v}_\phi)_{\vec{r}}}{\|(\vec{v}_\phi)_{\vec{r}}\|} \qquad (2)$$

<u>Allgemeine Konstruktion einer lokalen Basis:</u> $\vec{\phi}^{-1}: \ \vec{y} \longmapsto \vec{r}(y^1, \dots, y^d)$ (3)

Berechne Kurvengeschwindigkeit entlang KL j,

$$(\vec{v}_j)_{\vec{r}} \equiv \frac{d}{dy^j}\vec{r}_j(y^j) = \partial_j \vec{r}(\vec{y}) \qquad (4)$$

erinnert an Ortsabhängigkeit,
wird meist nicht explizit angezeigt

und normiere:

$$(\hat{e}_j)_{\vec{r}} \equiv \frac{(\vec{v}_j)_{\vec{r}}}{\|(\vec{v}_j)_{\vec{r}}\|} \qquad (5)$$

Lokale Basis ist: linear unabhängig, nicht unbedingt orthogonal, meist ortsabhangig!

Kurven: Orts- und Gechwindigkeitsvektor, ausgedrückt in lokaler Basis

V5i

Cartesische Koordinaten: $\vec r = x^1 \hat e_1 + x^2 \hat e_2$

zeitunabhängige Basisvektoren

Parametrisierung einer Raumkurve: $\vec r(t) = x^1(t)\, \hat e_1 + x^2(t)\, \hat e_2$ (1)

Kurvengeschwindigkeit: $d_t \vec r(t) = \dot x^1(t)\, \hat e_1 + \dot x^2(t)\, \hat e_2$ (2)

$d_t \equiv \frac{d}{dt}$

zeigt radial auswärts

Polarkoordinaten: $\vec r \overset{(f.1)}{=} \rho \Big[\underbrace{\cos\phi\, \hat e_1 + \sin\phi\, \hat e_2}_{(\hat e_\rho)_{\vec r}}\Big] \overset{(g.1)}{=} \rho\, (\hat e_\rho)_{\vec r} = \rho\, \hat e_\rho$ (3)

Kompaktnotation

Parametrisierung einer Raumkurve: $\vec r(t) = \rho(t) \Big[\underbrace{\cos\phi(t)\, \hat e_1 + \sin\phi(t)\, \hat e_2}_{(\hat e_\rho)_{\vec r(t)}}\Big] = \rho(t)\, (\hat e_\rho)_{\vec r(t)}$ (4)

zeitabhängige Basisvektoren

$$d_t \vec r(t) = \dot\rho(t)\, (\hat e_\rho)_{\vec r(t)} + \rho\, \overbrace{d_t (\hat e_\rho)_{\vec r(t)}}^{\overset{(i.1)}{=}\ \dot\phi\, \hat e_\phi} \quad (5)$$

$$\dot{\vec r} = \dot\rho\, \hat e_\rho + \rho\, \dot\phi\, \hat e_\phi \quad (6)$$

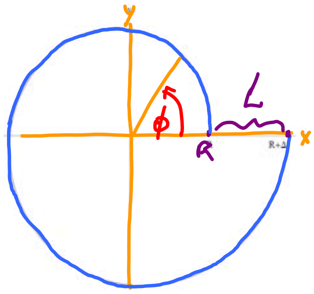
Einheiten: Länge / Zeit

V5i'

$$d_t\, \hat e_\rho(\rho,\phi) \overset{\text{KR (C3d.3)}}{=} \underbrace{\partial_\rho \hat e_\rho}_{\overset{(g.5)}{=}0}\, d_t\rho + \underbrace{\partial_\phi \hat e_\rho}_{\overset{(g.5)}{=}\hat e_\phi}\, d_t\phi = \dot\phi\, \hat e_\phi \quad (1)$$

$$d_t\, \hat e_\phi(\rho,\phi) \overset{\text{KR (C3d.3)}}{=} \underbrace{\partial_\rho \hat e_\phi}_{\overset{(g.6)}{=}0}\, d_t\rho + \underbrace{\partial_\phi \hat e_\phi}_{\overset{(g.6)}{=}-\hat e_\rho}\, d_t\phi = -\dot\phi\, \hat e_\rho \quad (2)$$

<u>Beispiel: Spiralbahn</u> $\gamma: \ \vec r_S(t) = \rho(t)\, \hat e_\rho(t)$, (3)



$\rho(t) = R + tL$, (4a) $\quad \phi(t) = 2\pi t$, (4b) $\quad t \in [0,1]$

$\dot\rho(t) = L$, (5a) $\quad \dot\phi(t) = 2\pi$ (5b)

Kurvengeschwindigkeit:

$$\dot{\vec r}_S(t) = \frac{d}{dt}(\rho\, \hat e_\rho) \overset{(i.6)}{=} \dot\rho\, \hat e_\rho + \rho\, \dot\phi\, \hat e_\phi \overset{(5)}{=} L\, \hat e_\rho + (R+tL)\cdot 2\pi\, \hat e_\phi \quad (6)$$

Arbeit mit 'Gegenwind': Sei $\vec F = -F_0\, \hat e_\phi$ (7)

$$W[\gamma] = \int_0^1 dt\, \dot{\vec r}_S(t)\cdot \vec F(\vec r_S(t)) = \int_0^1 dt\, \overbrace{\Big[L\hat e_\rho + (R+tL)2\pi\, \underbrace{\hat e_\phi \Big]\cdot(-F_0 \hat e_\phi)}_{=1}}^{=0 \ (5g.4')} = -F_0 \int_0^1 dt\, (R + Lt)\cdot 2\pi \quad (8)$$

$$= -(2\pi R + L\pi)\, F_0 \quad (9)$$

Beispiel: Magnetfeld v. stromtragendem Leiter (vergleiche Bsp., Seite V4h)

V5j

$$\vec B(\vec r) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix}-\rho\sin\phi\\ \rho\cos\phi\end{pmatrix} \overset{(g.2)}{=} \frac{\hat e_\phi}{\rho} \qquad (1)$$

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi \qquad (2)$$

geschlossene Kurve: $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \vec r(t) \qquad (3)$

$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t)$ $\qquad \vec r(0) = \vec r(1)$

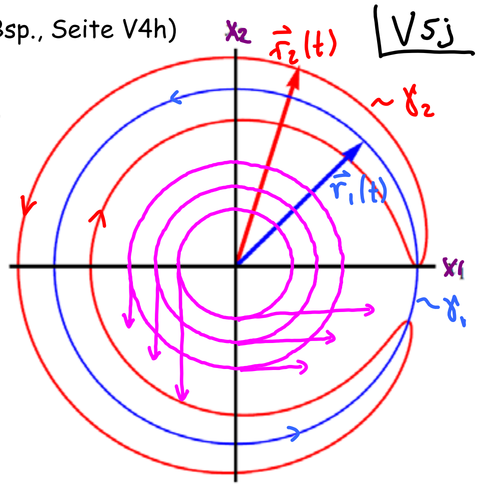
Kurvengeschwindigkeit:

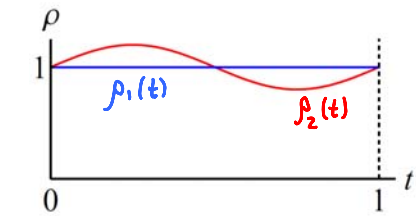
$$\vec v = \dot{\vec r} \underset{(i.6)}{=} \dot\rho\,\hat e_\rho + \rho\dot\phi\,\hat e_\phi \qquad (4)$$

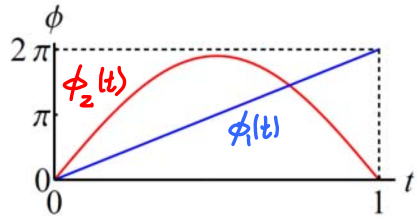
$$\dot{\vec r}\cdot\vec B \overset{(1)}{=} \underbrace{(\dot\rho\,\hat e_\rho + \cancel{\rho}\dot\phi\,\hat e_\phi)\cdot\frac{\hat e_\phi}{\cancel{\rho}}}_{=0,\ \overbrace{}^{=1\ (5g.4')}} = \dot\phi \qquad (5)$$

$$\int_\gamma d\vec r\cdot\vec B = \int_0^1 dt\; \dot{\vec r}(t)\cdot\vec B(\vec r(t)) \overset{(5)}{=} \int_0^1 dt\,\frac{d\phi}{dt} \qquad (6)$$

$= \phi(1) - \phi(0) = \begin{cases} 2\pi & \text{falls Ursprung eingeschlossen}, \ \gamma_1 \\ 0 & \text{falls Ursprung \underline{nicht} eingeschlossen}, \ \gamma_2 \end{cases}$







Kinetische Energie, Beschleunigung

V5k

radialer, axialer Beitrag

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} m\,\dot{\vec r}^{\,2} = \tfrac{1}{2} m\,(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2) \qquad (1)$$

denn:

$$\hat e_{y^i}\cdot\hat e_{y^j} \overset{(h3,4)}{=} \delta_{y^i y^j}$$

$$|\dot{\vec r}_s(t)|^2 = \dot{\vec r}_s\cdot\dot{\vec r}_s \overset{(si.6)}{=} (\dot\rho\,\hat e_\rho + \rho\dot\phi\,\hat e_\phi)\cdot(\dot\rho\,\hat e_\rho + \rho\dot\phi\,\hat e_\phi) = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 \qquad (2)$$

$=1, \ =1, \ =0, \ =0 \ (5g.4')$

Beschleunigung:

$$\vec a = d_t\vec v \overset{(3)}{=} d_t\left[\dot\rho\,\hat e_\rho + \rho\dot\phi\,\hat e_\phi\right] \qquad (3)$$

$$\overset{PR}{=} \ddot\rho\,\hat e_\rho + \dot\rho\,\underbrace{\dot{\hat e}_\rho}_{(1)\ \dot\phi\hat e_\phi} + \dot\rho\dot\phi\,\hat e_\phi + \rho\ddot\phi\,\hat e_\phi + \rho\dot\phi\,\underbrace{\dot{\hat e}_\phi}_{(2)\ -\dot\phi\hat e_\rho} \qquad (4)$$

Einheiten: Länge / (Zeit)^2

$$= (\ddot\rho - \rho\dot\phi^2)\,\hat e_\rho + (2\dot\rho\dot\phi + \rho\ddot\phi)\,\hat e_\phi \qquad (5)$$

rein radial, Mischterme, rein axial

Zylinderkoordinaten (3D)

(= Polar, ergänzt um z-Achse)

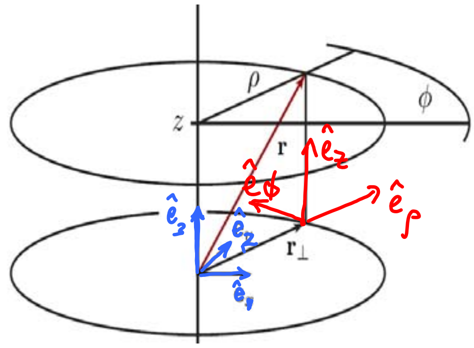
V5l

$$\vec r = \rho\cos\phi\,\hat e_1 + \rho\sin\phi\,\hat e_2 + z\,\hat e_3 \quad (1)$$

$x^1 = \rho\cos\phi$ (2) $\qquad y^1 = \rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} > 0$ (5)

$x^2 = \rho\sin\phi$ (3) $\qquad y^2 = \phi = \arctan\frac{x^2}{x^1} \in [0, 2\pi[$ (6)

$x^3 = z$ (4) $\qquad y^3 = z = x^3 \in \mathbb{R}$ (7)



Konstruktion der lokalen Basis:

$$\vec r = \rho\,\hat e_\rho + z\,\hat e_z \quad (13)$$

$\vec v_\rho \overset{(h.4)}{=} \partial_\rho \vec r = \cos\phi\,\hat e_1 + \sin\phi\,\hat e_2 \equiv \hat e_\rho \qquad v_\rho = 1$ (8)

$\vec v_\phi = \partial_\phi \vec r = \rho(-\sin\phi\,\hat e_1 + \cos\phi\,\hat e_2) \equiv \rho\,\hat e_\phi \qquad v_\phi = \rho$ (9)

$\vec v_z = \partial_z \vec r = 1\cdot\hat e_3 \equiv \hat e_z \qquad v_z = 1$ (10)

Orthonormal: selber kontrollieren! $\quad \hat e_{y^i}\cdot\hat e_{y^j} = \delta_{y^i y^j}$ (11)

rechtshändig: selber kontrollieren! $\quad \hat e_{y^i}\times\hat e_{y^j} = \varepsilon_{y^i y^j y^k}\,\hat e_{y^k}$ (12)

Kugelkoordinaten (3D)

V5m

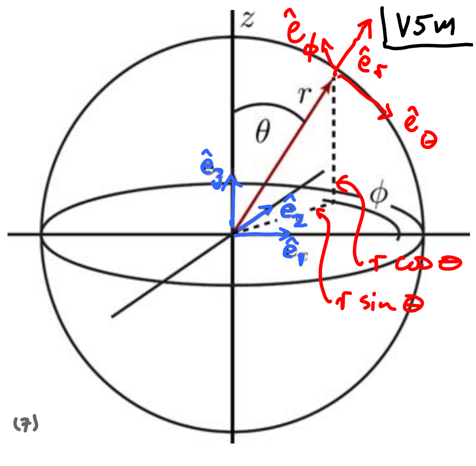
(in xy-Ebene: wie Polar, mit $\rho = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$)

$$\vec r = r\sin\theta\cos\phi\,\hat e_1 + r\sin\theta\sin\phi\,\hat e_2 + r\cos\theta\,\hat e_3 \quad (1)$$

$x^1 = r\sin\theta\cos\phi$ (2) $\qquad y^1 = r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ (5)

$x^2 = r\sin\theta\sin\phi$ (3) $\qquad y^2 = \theta = \arccos\left(\frac{x^3}{r}\right) \in [0, \pi]$ (6)

$x^3 = r\cos\theta$ (4) $\qquad y^3 = \phi = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \in [0, 2\pi[$ (7)



Konstruktion der lokalen Basis:

$$\vec r = r\,\hat e_r \quad (13)$$

$\vec v_r \overset{(h.4)}{=} \partial_r \vec r \overset{(1)}{=} \sin\theta\cos\phi\,\hat e_1 + \sin\theta\sin\phi\,\hat e_2 + \cos\theta\,\hat e_3 \equiv \hat e_r \qquad v_r = 1$ (8)

$\vec v_\theta = \partial_\theta \vec r = r(\cos\theta\cos\phi\,\hat e_1 + \cos\theta\sin\phi\,\hat e_2 - \sin\theta\,\hat e_3) \equiv r\,\hat e_\theta \qquad v_\theta = r$ (9)

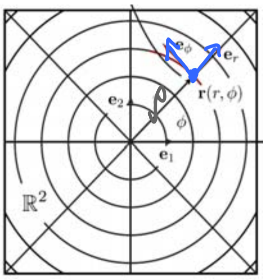
$\vec v_\phi = \partial_\phi \vec r = r\sin\theta(-\sin\phi\,\hat e_1 + \cos\phi\,\hat e_2) \equiv r\sin\theta\,\hat e_\phi \qquad v_\phi = r\sin\theta$ (10)

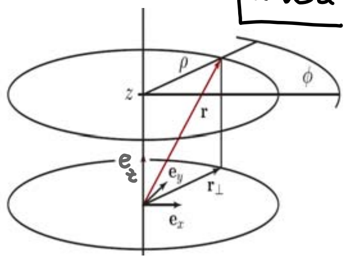
Orthonormal: selber kontrollieren! $\quad \hat e_{y^i}\cdot\hat e_{y^j} = \delta_{y^i y^j}$ (11)

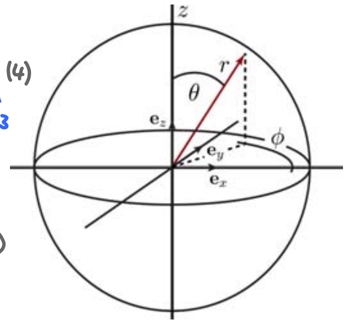
rechtshändig: selber kontrollieren! $\quad \hat e_{y^i}\times\hat e_{y^j} = \varepsilon_{y^i y^j y^k}\,\hat e_{y^k}$ (12)

Zusammenfassung: V5 Krummlinige Koordinaten

ZV5a







Cartesisch: $\vec r = \sum_{i=1}^{d} x_i \hat e_i$ (1)

Polar (2D): $\vec r = \underbrace{\rho\cos\phi}_{x_1}\,\hat e_1 + \underbrace{\rho\sin\phi}_{x_2}\, e_2$ (2)

$y_1 = \rho,\ y_2 = \phi$

Zylinder (3D): $\vec r = \rho\cos\phi\,\hat e_1 + \rho\sin\phi\,\hat e_2 + z\hat e_3$ (3)

Kugel (3D): $\vec r = r\sin\theta\cos\phi\,\hat e_1 + r\sin\theta\sin\phi\,\hat e_2 + r\cos\theta\,\hat e_3$ (4)

Koordinatenlinie: $\vec r_{y_j}(y_j) \equiv \vec r(y_1, \dots, y_j, \dots, y_d)$ (5)

wird variiert

werden konstant gehalten

$\vec r_{y_1}(y_1) = \vec r_\rho(\rho),\ \vec r_\phi(\phi)$

Kurvengeschwindigkeit entlang KL j: $(\vec v_j)_{\vec r} \equiv \frac{d}{dy_j}\vec r_j(y_j) = \partial_j \vec r(\vec y)$ (6)

erinnert an Ortsabhängigkeit,
wird meist nicht explizit angezeigt

Lokale Basis: $(\hat e_j)_{\vec r} \equiv \frac{(\vec v_j)_{\vec r}}{(v_j)_{\vec r}}$, (7) $(v_j)_{\vec r} = \|(\vec v_j)_{\vec r}\|$ (8)

ZV5b

Cartesisch: $\hat e_1,\ \hat e_2,\ \hat e_3$ $\qquad \vec r = \sum_i x_i \hat e_i$ (1)

Polar:

$\hat e_\rho = \cos\phi\,\hat e_1 + \sin\phi\,\hat e_2 \qquad v_\rho = 1 \qquad \vec r = \rho\,\hat e_\rho$ (2)

$\hat e_\varphi = -\sin\phi\,\hat e_1 + \cos\phi\,\hat e_2 \qquad v_\varphi = \rho \qquad \dot{\vec r} = \dot\rho\,\hat e_\rho + \rho\dot\phi\,\hat e_\phi$ (3)

Zylinder (3D):

$\hat e_\rho = \cos\phi\,\hat e_1 + \sin\phi\,\hat e_2, \qquad v_\rho = 1, \qquad \vec r = \rho\,\hat e_\rho + z\,\hat e_z$ (4)

$\hat e_\varphi = -\sin\phi\,\hat e_1 + \cos\phi\,\hat e_2, \qquad v_\varphi = \rho, \qquad \dot{\vec r} = \dot\rho\,\hat e_\rho + \rho\dot\phi\,\hat e_\phi + \dot z\,\hat e_z$ (5)

$\hat e_z = \hat e_3 \qquad v_z = 1$

Kugel (3D):

$\hat e_r = \sin\theta\cos\phi\,\hat e_1 + \sin\theta\sin\phi\,\hat e_2 + \cos\theta\,\hat e_3, \qquad v_r = 1, \qquad \vec r = r\,\hat e_r$ (6)

$\hat e_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\hat e_1 + \cos\theta\sin\phi\,\hat e_2 - \sin\theta\,\hat e_3, \qquad v_\theta = r, \qquad \dot{\vec r} = \dot r\,\hat e_r + r\dot\theta\,\hat e_\theta$ (7)

$\hat e_\phi = -\sin\phi\,\hat e_1 + \cos\phi\,\hat e_2 \qquad v_\phi = r\sin\theta \qquad + r\dot\phi\sin\theta\,\hat e_\phi$ (8)

Alle diese lokalen Basen sind orthonormal: $\hat e_{y_i}\cdot\hat e_{y_j} = \delta_{y_i y_j}$ (9)