L5 Matrizen I

L5a

Matrix:
(Plural: Matrizen)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \cdots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \cdots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & a^3{}_3 \ddots & \vdots \\ a^m{}_1 & \cdots & & a^m{}_n \end{bmatrix} = \{a^i{}_j\} \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix} \tag{1}$$

Vielfältige Anwendungen in der Physik:
- Lösung von linearen Gleichungsystemen
- Beschreibung von Drehungen
- Beschreibung von Lorenz-Transformationen (spezielle Relativitätstheorie)
- Lösung von linearen Differenzialgleichungen (nach Fouriertransformation)
- Bestimmung der Normalmoden von gekoppelten harmonischen Oszillatoren
- Bestimmung der Eigenzuständen und Eigenenergien eines Quantensystems
- Dirac-Gleichung (relativistische Version der Schrödingergleichung)
- ... ...

Für gründliche Einführung: siehe lineare Algebra Vorlesung

L5.1 Lineare Abbildungen und Matrizen

L5b

(allgemeinere Körper $\mathbb{F}$ auch möglich, insbesondere $\mathbb{C}$)

Def: V und W seien zwei- $\mathbb{R}$ Vektorräume, mit Dimension n bzw. m

$$F: V \to W, \quad \vec{u} \mapsto F(\vec{u}) \equiv F\vec{u} \tag{1}$$

Kompaktnotation verzichtet auf ( )-Klammern

ist eine 'lineare Abbildung', falls

Körper

$$F(a\vec{u} + b\vec{v}) = aF(\vec{u}) + bF(\vec{v}) \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \vec{u}, \vec{v} \in V \tag{2}$$

Lin. Abb. ist ein Homomorphismus: sie 'respektiert' die Vektorraumstruktur v. V und W:
erst addieren/strecken, dann abbilden = erst abbilden, dann addieren/strecken

Alltagsbeispiele: Foto einer Person ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Foto einer Buchseite ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Im Folgenden betrachten wir zunächst die Standardvektorräume $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$

L5c

<u>n = 1, m = 1:</u> $A : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$,

Kompaktnotation (nur für lineare Abbildungen): verzichte auf ( )-Klammern

$$x \mapsto y = A(x) \equiv A x = a x \, , \qquad a \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

wie in (b.2) gefordert ✓

Beispiel:

$x \mapsto 3x$, dann: $A(5x + 6y) = 3(5x + 6y) = 5(3x) + 6(3y) = 5A(x) + 6A(y)$ (2)

Essentielle Eigenschaft v. A: <u>linear</u> in x: $Ax = ax$

d.h. keine Konstante: $Ax \neq ax + b$

und keine Potenzen: $Ax \neq a(x)^3$

dann wäre (b.2) nicht erfüllt (3)

wie in (b.2) gefordert

Konstante zerstört Linearität:

$x \mapsto 3x + 1$ dann: $A(5x + 6y) = 3(5x + 6y) + 1 = 5(3x+1) + \underset{-10}{6(3y+1)} = 5A(x) + \underset{-10}{6A(y)}$

<u>n = 2, m = 1:</u> $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$, $\qquad a_j \in \mathbb{R}$

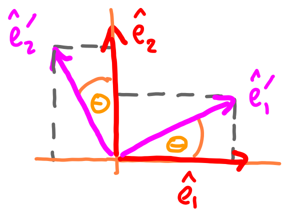
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \longmapsto y = A\vec{x} = a_1 x^1 + a_2 x^2 \, , \qquad j = 1, 2 \qquad (3)$$

<u>n = 2, m = 2:</u> $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\qquad a^i{}_j \in \mathbb{R}$,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \longmapsto \vec{y} = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 x^1 + a^1{}_2 x^2 \\ a^2{}_1 x^1 + a^2{}_2 x^2 \end{bmatrix} , \qquad j = 1, 2, \quad i = 1, 2 \qquad (4)$$

L5d

<u>Beispiel: Rotation in 2 Dimensionen</u>



$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos\theta \; x^1 - \sin\theta \; x^2 \\ \sin\theta \; x^1 + \cos\theta \; x^2 \end{bmatrix} ; \qquad (1)$$

$$\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \hat{e}'_1 \, , \qquad \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \hat{e}'_2 \qquad (2)$$

<u>Allgemein: n, m beliebig:</u>

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$\vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x}$, mit

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^i \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 x^1 + \dots + a^1{}_j x^j + \dots + a^1{}_n x^n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a^i{}_1 x^1 + \dots + a^i{}_j x^j + \dots + a^i{}_n x^n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a^m{}_1 x^1 + \dots + a^m{}_j x^j + \dots + a^m{}_n x^n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Einstein-Notation: $\quad y^i = a^i{}_j x^j \, , \quad i = 1, \dots, m \, , \quad j = 1, \dots, n \qquad (4)$

L5.2 Matrizen

L5e

'm x n Matrix' $\underline{\underline{A}} = \{a^i{}_j\}$ ist rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten,

'Matrixelement': $a^i{}_j \in \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_j & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^i{}_1 & \dots & a^i{}_j & \dots & a^i{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_j & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix} = \{a^i{}_j\} \qquad (1)$$

Reihenindex (links oben): $i = 1, \dots, m$

Spaltenindex (rechts unten): $j = 1, \dots, n$ (2)

Spalte j: $(\underline{\underline{A}}_j) \equiv \begin{pmatrix} a^1{}_j \\ \vdots \\ a^i{}_j \\ \vdots \\ a^m{}_j \end{pmatrix}$ ist ein 'Spaltenvektor', mit Komponenten $(\underline{\underline{A}}_j)^i = a^i{}_j$ (3)

$\in \mathbb{R}^m$

Reihe i: $(\underline{\underline{A}}^{iT}) \equiv (a^i{}_1, \dots, a^i{}_j, \dots a^i{}_n)$ ist ein 'Reihenvektor', mit Komponenten

$\in \mathbb{R}^n$

$(\underline{\underline{A}}^{iT})_j = a^i{}_j$ (4)

'Quadratische Matrix' falls $m = n$

Notationskonventionen: $\underline{\underline{A}}$, A, $\{a^i{}_j\}$, $\{a_{ij}\}$, $\{a^{ij}\}$, $(a^i{}_j)$, $[a^i{}_j]$, $\{A^i{}_j\}$...

oft auch mit beiden Indizes unten, oder oben:

Multiplikation: Matrix mal Spaltenvektor

Spaltenvektor mit n Komponenten ist nx1 Matrix.

L5f

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^i \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \overset{(d.3)}{=} \begin{bmatrix} a^1{}_1 x^1 + \dots + a^1{}_j x^j + \dots + a^1{}_n x^n \\ \vdots \\ a^i{}_1 x^1 + \dots + a^i{}_j x^j + \dots + a^i{}_n x^n \\ \vdots \\ a^m{}_1 x^1 + \dots + a^m{}_j x^j + \dots + a^m{}_n x^n \end{bmatrix} \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_j & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & & & & \\ a^i{}_1 & \dots & a^i{}_j & \dots & a^i{}_n \\ \vdots & & & & \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_j & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^j \\ x^n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

per Definition

Kompaktnotation:

$$\vec{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \qquad (2)$$

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} a^i{}_j x^j = a^i{}_j x^j$$

$$\overset{(5e.3)}{=} (\underline{\underline{A}}^{iT})_j \, x^j \qquad (3)$$

$$= (\underline{\underline{A}}^{iT}) \cdot \vec{x} \qquad (4)$$

Beispiele:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ 2 \cdot 1 \quad (-1) \cdot 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 3/2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 6 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Einschub: Matrizen bilden einen Vektorraum

L5g

$$\text{mat}(\mathbb{R},m,n) \equiv \{ \underline{\underline{A}} \doteq \{a^i{}_j\} : \; i = 1,\dots,m; \; j = 1,\dots,n, \; a^i{}_j \in \mathbb{R} \}$$

Menge aller mxn Matrizen, ist ein Vektorraum:

(i) Matrixaddition: $+ : \text{mat}(\mathbb{R},m,n) \times \text{mat}(\mathbb{R},m,n) \to \text{mat}(\mathbb{R},m,n)$ (1)

$$(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) \mapsto \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}, \quad (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^i{}_j \equiv (a^i{}_j + b^i{}_j)$$

(elementenweise Addition)

Explizit:
(m = n = 2)

$$\begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^1{}_1 & b^1{}_2 \\ b^2{}_1 & b^2{}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a^1{}_1 + b^1{}_1) & (a^1{}_2 + b^1{}_2) \\ (a^2{}_1 + b^2{}_1) & (a^2{}_2 + b^2{}_2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Neutrales Element der Matrixaddition: "Nullmatrix" : (bestehend aus lauter Nulleinträgen)

$$\underline{\underline{0}} = \{0^i{}_j\} \in \text{mat}(\mathbb{R},m,n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{A}}$$

Negatives Element (= inverses Element der Addition):

L5h

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}} \quad \xrightarrow{\text{Lösung}} \quad \underline{\underline{B}} \equiv -\underline{\underline{A}} = \{-a^i{}_j\} \quad (1)$$

Matrix bestehend aus den negativen Matrixelementen

Matrixaddition ist assoziativ: $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}} \overset{(h.1)}{=} \underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}})$ (2)

und kommutativ: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \overset{(h.1)}{=} \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$ (3)

(ii) Skalarmultiplikation: $\cdot : \mathbb{R} \times \text{mat}(\mathbb{R},m,n) \to \text{mat}(\mathbb{R},m,n)$

$$(\lambda, \underline{\underline{A}}) \mapsto \lambda \underline{\underline{A}}, \quad (\lambda \underline{\underline{A}})^i{}_j \equiv \lambda a^i{}_j \quad (4)$$

(elementenweise Multiplikation)

Explizit:
(m = n = 2)

$$\lambda \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a^1{}_1 & \lambda a^1{}_2 \\ \lambda a^2{}_1 & \lambda a^2{}_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Beispiel: $3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ (6)

$\text{mat}(\mathbb{R},m,n)$, mit Matrixaddition und skalarer Multiplikation gestattet, ist ein $m \cdot n$ -dimensionaler (reeller) Vektorraum [äquivalent zu $\mathbb{R}^{m \cdot n}$] (7)

Wirkung einer linearen Abbildung auf Standardbasis

L5i

Standardbasis in $\mathbb{R}^n$: $\{\hat{e}_j\}$ $j = 1,\dots,n$ $\hat{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ← Position j von insgesamt n (1)

Standardbasis in $\mathbb{R}^m$: $\{\hat{e}_i\}$ $i = 1,\dots,m$ (2)

$\hat{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ← Position i von insgesamt m

Was ist das Bild eines Standardbasisvektors für Abbildung A?

Position j:

$$\hat{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_j & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & & & & \\ a^i{}_1 & \dots & a^i{}_j & \dots & a^i{}_n \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_j & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1{}_j \\ \vdots \\ a^i{}_j \\ \vdots \\ a^m{}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} a^1{}_j + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} a^2{}_j + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} a^m{}_j \quad (3)$$

$$= \hat{e}_1 a^1{}_j + \hat{e}_2 a^2{}_j + \dots + \hat{e}_m a^m{}_j$$

$$\hat{e}_j \longmapsto \underline{\underline{A}}\, \hat{e}_j = \hat{e}_i\, a^i{}_j \quad (4)$$

$(\underline{\underline{A}}_j) =$ Spalte j der Matrix $\underline{\underline{A}}$

Fazit: für lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dargestellt durch $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, m, n)$

liefert $(\underline{\underline{A}}_j)$ ($\equiv$ Spalte j der Matrix $\underline{\underline{A}}$) das Bild des Basisvektors $\hat{e}_j$ (5)

L5.3 Matrixmultiplikation: Verknüpfung v. zwei linearen Abbildungen

L5j

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{B} \mathbb{R}^\ell \quad (1)$$

$$\vec{x} = \xmapsto{A} \vec{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \xmapsto{B} \vec{z} = \underline{\underline{B}} \cdot \vec{y} = \underline{\underline{B}} \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}) \equiv \underline{\underline{C}} \cdot \vec{x} \quad (2)$$

$j = 1,\dots,n$ $i = 1,\dots,m$ $k = 1,\dots,\ell$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^j \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \xmapsto{A} \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^i \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1{}_j x^j \\ \vdots \\ a^i{}_j x^j \\ \vdots \\ a^m{}_j x^j \end{bmatrix} \xmapsto{B} \begin{bmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^k \\ \vdots \\ z^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1{}_i y^i \\ \vdots \\ b^k{}_i y^i \\ \vdots \\ b^\ell{}_i y^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1{}_i a^i{}_j x^j \\ \vdots \\ b^k{}_i a^i{}_j x^j \\ \vdots \\ b^\ell{}_i a^i{}_j x^j \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c^1{}_j x^j \\ \vdots \\ c^k{}_j x^j \\ \vdots \\ c^\ell{}_j x^j \end{bmatrix} \quad (3)$$

Kompaktnotation: $z^k = b^k{}_i y^i = b^k{}_i a^i{}_j x^j = c^k{}_j x^j$ (4)

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{C \equiv B \circ A} \mathbb{R}^\ell$$

$$\vec{x} \xmapsto{C \equiv B \circ A} \vec{z} = \underline{\underline{C}} \cdot \vec{x}$$

mit $\boxed{\underline{\underline{C}} \overset{(2)}{=} \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \qquad c^k{}_j \overset{(4)}{=} b^k{}_i a^i{}_j}$ (5)

Matrixmultiplikation: (zusätzliche Struktur zu der des Vektorraums)

$$\cdot : \mathrm{mat}(\mathbb{R}, \ell, m) \times \mathrm{mat}(\mathbb{R}, m, n) \longrightarrow \mathrm{mat}(\mathbb{R}, \ell, n) \qquad (1)$$

$$(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}) \longmapsto \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}$$

mit

$$\boxed{c^k{}_j = b^k{}_i \, a^i{}_j \overset{(5e.3,4)}{=} (\underline{\underline{B}}^{kT})_i \, (\underline{\underline{A}}_j)^i = (\underline{\underline{B}}^{kT}) \cdot (\underline{\underline{A}}_j)} \qquad (2)$$

= Skalarprodukt von "Zeile k von B" und "Spalte j von A"

Nur definiert falls (# Spalten v. B) = (# Zeilen v. A).

Explizit:

ℓ Zeilen, n Spalten — ℓ Zeilen, m Spalten — m Zeilen, n Spalten

$$\begin{bmatrix} c^1{}_1 & \cdots & c^1{}_j & \cdots & c^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c^k{}_1 & \cdots & c^k{}_j & \cdots & c^k{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c^\ell{}_1 & \cdots & c^\ell{}_j & \cdots & c^\ell{}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1{}_1 & \cdots & b^1{}_i & \cdots & b^1{}_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b^k{}_1 & \cdots & b^k{}_i & \cdots & b^k{}_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b^\ell{}_1 & \cdots & b^\ell{}_i & \cdots & b^\ell{}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \cdots & a^1{}_j & \cdots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^i{}_1 & \cdots & a^i{}_j & \cdots & a^i{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \cdots & a^m{}_j & \cdots & a^m{}_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Zeilenvektor k von B — Spaltenvektor j von A

Beispiel: l = 3, m = 2, n = 2

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{array}{c|c} \underline{\underline{B}} \backslash \underline{\underline{A}} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 4\cdot 0 + 5\cdot 2 & 4\cdot 1 + 5\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 2 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Eigenschaften der Matrixmultiplikation:

1) nicht kommutativ: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ (sogar gar nicht definiert, falls Dimensionen nicht passen!) (2)

Beispiel: (für m = n = p = 2)

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 2 & 1\cdot 6 + 2\cdot 2 \\ 4\cdot 3 + 5\cdot 2 & 4\cdot 6 + 5\cdot 2 \end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 22 & 34 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

verschieden! — verschieden!

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3\cdot 1 + 6\cdot 4 & 3\cdot 2 + 6\cdot 5 \\ 2\cdot 1 + 2\cdot 4 & 2\cdot 2 + 2\cdot 5 \end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 10 & 14 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

2) assoziativ (falls definiert)

L5m

$$\underline{\underline{D}} \equiv (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}} \cdot (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}) \equiv \tilde{\underline{\underline{D}}} \qquad (1)$$

Beweis:

$$d^{l}{}_{j} = \sum_i (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}})^{l}{}_{i}\, a^{i}{}_{j} \qquad \Big| \qquad \sum_k c^{l}{}_{k} (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}})^{k}{}_{j} = \tilde{d}^{l}{}_{j} \qquad (2)$$

$$= \sum_i \Big(\sum_k c^{l}{}_{k}\, b^{k}{}_{i}\Big) a^{i}{}_{j} \qquad \Big| \qquad \sum_k c^{l}{}_{k} \Big(\sum_i b^{k}{}_{i}\, a^{i}{}_{j}\Big)$$

denn skalare Addition
ist assoziativ

$$= \sum_i \sum_k \left(c^{l}{}_{k}\, b^{k}{}_{i}\, a^{i}{}_{j}\right) = \quad \Rightarrow \quad d^{l}{}_{j} = \tilde{d}^{l}{}_{j} \quad \square$$

Beispiel: (m = n = p = 2)

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \qquad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Assoziativität gnadenlos explizit, für m = n = p = 2:

L5n

$$\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^1{}_1 & b^1{}_2 \\ b^2{}_1 & b^2{}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} (c^1{}_1 b^1{}_1 + c^1{}_2 b^2{}_1) & (c^1{}_1 b^1{}_2 + c^1{}_2 b^2{}_2) \\ (c^2{}_1 b^1{}_1 + c^2{}_2 b^2{}_1) & (c^2{}_1 b^1{}_2 + c^2{}_2 b^2{}_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left((c^1{}_1 b^1{}_1 + c^1{}_2 b^2{}_1) a^1{}_1 + (c^1{}_1 b^1{}_2 + c^1{}_2 b^2{}_2) a^2{}_1\right) & \left[(c^1{}_1 b^1{}_1 + c^1{}_2 b^2{}_1) a^1{}_2 + (c^1{}_1 b^1{}_2 + c^1{}_2 b^2{}_2) a^2{}_2\right] \\ \left[(c^2{}_1 b^1{}_1 + c^2{}_2 b^2{}_1) a^1{}_1 + (c^2{}_1 b^1{}_2 + c^2{}_2 b^2{}_2) a^2{}_1\right] & \left[(c^2{}_1 b^1{}_1 + c^2{}_2 b^2{}_1) a^1{}_2 + (c^2{}_1 b^1{}_2 + c^2{}_2 b^2{}_2) a^2{}_2\right] \end{pmatrix}$$

genau die gleichen Terme kommen vor (nur in unterschiedlicher Reihenfolge)

$$\underline{\underline{C}} \cdot (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}) = \begin{pmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (b^1{}_1 a^1{}_1 + b^1{}_2 a^2{}_1) & (b^1{}_1 a^1{}_2 + b^1{}_2 a^2{}_2) \\ (b^2{}_1 a^1{}_1 + b^2{}_2 a^2{}_1) & (b^2{}_1 a^1{}_2 + b^2{}_2 a^2{}_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(c^1{}_1 (b^1{}_1 a^1{}_1 + b^1{}_2 a^2{}_1) + c^1{}_2 (b^2{}_1 a^1{}_1 + b^2{}_2 a^2{}_1)\right) & \left(c^1{}_1 (b^1{}_1 a^1{}_2 + b^1{}_2 a^2{}_2) + c^1{}_2 (b^2{}_1 a^1{}_2 + b^2{}_2 a^2{}_2)\right) \\ \left(c^2{}_1 (b^1{}_1 a^1{}_1 + b^1{}_2 a^2{}_1) + c^2{}_2 (b^2{}_1 a^1{}_1 + b^2{}_2 a^2{}_1)\right) & \left(c^2{}_1 (b^1{}_1 a^1{}_2 + b^1{}_2 a^2{}_2) + c^2{}_2 (b^2{}_1 a^1{}_2 + b^2{}_2 a^2{}_2)\right) \end{pmatrix}$$

3. distributiv $\underline{\underline{A}} \cdot (\lambda \underline{\underline{B}} + \mu \underline{\underline{C}}) = \lambda\, \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} + \mu\, \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}$ (1) L5o

Beweis: $\sum_k a^i_{\ k} (\lambda\, b^k_{\ j} + \mu c^k_{\ j}) \overset{\shortparallel}{=} \lambda \sum_k a^i_{\ k} b^k_{\ j} + \mu \sum_k a^i_{\ k} c^k_{\ j}$ $\square$ (2)

ebenso: $(\lambda \underline{\underline{A}} + \mu \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{C}} = \lambda\, \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}} + \mu\, \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}$ (3)

4. $(\lambda \underline{\underline{A}}) \cdot (\mu \underline{\underline{B}}) = \lambda \mu (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})$ (4)

Beweis: $\left(\sum_k (\lambda a^i_{\ k})(\mu b^k_{\ j})\right) \overset{\shortparallel}{=} \lambda \mu \left(\sum_k a^i_{\ k} b^k_{\ j}\right)$ (5)

5. Falls $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n) \Longrightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$ (6)

Quadratische Matrizen sind "abgeschlossen" unter Matrixmultiplikation.

6. Neutrales Element der Matrixmultiplikation: L5p

"Einheitsmatrix (engl: identity)":
(für m = n)

(Einser auf der Diagonalen, ansonsten Nullen)

$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} = (\delta^i_{\ j}) \qquad (1)$$

$$\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{I}} \qquad (2)$$

denn: $\left(\sum_k \delta^i_{\ k} a^k_{\ j}\right) \overset{(j.s)}{=} (a^i_{\ j}) = \left(\sum a^i_{\ k} \delta^k_{\ j}\right)$ $\square$ (3)

Explizit:
(n=3)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_{\ 1} & a^1_{\ 2} & a^1_{\ 3} \\ a^2_{\ 1} & a^2_{\ 2} & a^2_{\ 3} \\ a^3_{\ 1} & a^3_{\ 2} & a^3_{\ 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_{\ 1} & a^1_{\ 2} & a^1_{\ 3} \\ a^2_{\ 1} & a^2_{\ 2} & a^2_{\ 3} \\ a^3_{\ 1} & a^3_{\ 2} & a^3_{\ 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_{\ 1} & a^1_{\ 2} & a^1_{\ 3} \\ a^2_{\ 1} & a^2_{\ 2} & a^2_{\ 3} \\ a^3_{\ 1} & a^3_{\ 2} & a^3_{\ 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Quadratische Matrizen bilden eine 'Algebra': das ist ein Vektorraum mit zusätzlicher Multiplikation mit Verträglichkeitsbedingungen (assoziativ, distributiv), und Einselement.

Zusammenfassung: L5.1-5.2 Lineare Abbildungen und Matrizen ZL5a

$F: V \longrightarrow W$ ist 'lineare Abbildung', falls $F(a\vec{u}+b\vec{v}) = aF(\vec{u}) + bF(\vec{v})$ (1)

Für $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ hat eine lineare Abbildung die Form:

$$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \quad \text{mit} \quad y^i = a^i{}_j x^j = (\underline{\underline{A}}^{iT}) \cdot \vec{x} \qquad (2)$$

m x n Matrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \cdots & a^1{}_j & \cdots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^i{}_1 & \cdots & a^i{}_j & \cdots & a^i{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \cdots & a^m{}_j & \cdots & a^m{}_n \end{bmatrix} = \{a^i{}_j\} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, \\ j = 1, \dots, \end{matrix} \qquad (3)$$

Spalte j: $\quad (\underline{\underline{A}}_j) \equiv \begin{pmatrix} a^1{}_j \\ \vdots \\ a^i{}_j \\ \vdots \\ a^m{}_j \end{pmatrix}$ (4)

Reihe i: $\quad (\underline{\underline{A}}^{iT}) \equiv (a^i{}_1, \dots, a^i{}_j, \dots a^i{}_n)$ (5)

Abbildung der Standardbasis: $\hat{e}_j \xmapsto{A} \underline{\underline{A}}\,\hat{e}_j = (\underline{\underline{A}}_j)$ = Spalte j (6)

Reelle (mxn)-Matrizen bilden $m \cdot n$ dim. Vektorraum, $\simeq \mathbb{R}^{m \cdot n}$ ZL5b

$$\mathrm{mat}(\mathbb{R}, m, n) \equiv \{\underline{\underline{A}} = \{a^i{}_j\} : \; i = 1, \dots, m; \; j = 1, \dots, n, \; a^i{}_j \in \mathbb{R}\} \qquad (1)$$

mit Matrixaddition, (elementenweise) $\quad (\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) \mapsto \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}, \quad (\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}})^i{}_j \equiv (a^i{}_j + b^i{}_j)$ (2)

und Skalarmultiplikation, (elementenweise) $\quad (\lambda, \underline{\underline{A}}) \mapsto \lambda \underline{\underline{A}}, \quad (\lambda \underline{\underline{a}})^i{}_j \equiv \lambda\, a^i{}_j$ (3)

Verknüpfung von zwei linearen Abbildungen $\Longrightarrow$ Matrixmultiplikation

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{B} \mathbb{R}^\ell \qquad (4)$$

$$\vec{x} = \xmapsto{A} \vec{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \xmapsto{B} \vec{z} = \underline{\underline{B}} \cdot \vec{y} = \underline{\underline{B}} \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}) \equiv \underline{\underline{C}} \cdot \vec{x} \qquad (5)$$

(5e.3,4)

$$c^k{}_j = b^k{}_i\, a^i{}_j = (\underline{\underline{B}}^{kT})_i \, (\underline{\underline{A}}_j)^i = (\underline{\underline{B}}^{kT}) \cdot (\underline{\underline{A}}_j) \qquad \left\{ \begin{matrix} k = 1, \dots, \ell \\ i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix} \right. \qquad (6)$$

(Zeile k von B) •(Spalte j von A)

Matrixmultiplikation ist assoziativ & distributiv, aber nicht kommutativ !