L5.4 Inverse einer Matrix

L5.4a

Ausgangsfrage: Wie löst man ein lineares Gleichungsystem (LSG)?

Betrachte n lineare Gleichungen für n Unbekannte:

$$\begin{array}{ccccccc} a^1{}_1 x^1 & + & a^1{}_2 x^2 & + \dots + & a^1{}_n x^n & = & b^1 \\ a^2{}_1 x^1 & + & a^2{}_2 x^2 & + \dots + & a^2{}_n x^n & = & b^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n{}_1 x^1 & + & a^n{}_2 x^2 & + \dots + & a^n{}_n x^n & = & b^n \end{array} \qquad (1)$$

Ziel: durch geeignete Umformungen
- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

bringe man das LSG in folgende Form (1 auf der 'Diagonalen', 0 überall sonst): (2)

$$\begin{array}{ccccccc} 1\cdot x^1 & + & 0\cdot x^2 & + \dots + & 0\cdot x^n & = & d^1 \\ 0\cdot x^1 & + & 1\, x^2 & + \dots + & 0\cdot x^n & = & d^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0\cdot x^1 & + & 0\cdot x^2 & + \dots + & 1\cdot x^n & = & d^n \end{array}$$

Dann folgt sofort:

$$x^i = d^i$$

Nützliches Hilfsmittel (um Schreiberei zu reduzieren): 'Erweiterte Matrix': L5.4b

$$\text{Start: } \left(\begin{array}{cccc|c} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \dots & a^1{}_n & b^1 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \dots & a^2{}_n & b^2 \\ \vdots & & & & \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 & \dots & a^n{}_n & b^n \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Verfahren}]{\text{Gauß-}} \text{Ziel: } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d^1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d^2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & d^n \end{array}\right) \qquad (1)$$

Beispiel: finde Lösung des Systems:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{3} x^1 & + & \frac{1}{3} x^2 & + & \frac{1}{3} x^3 & = & 1 \\ x^1 & + & 2x^2 & + & 3x^3 & = & 2 \\ 2x^1 & + & 3x^2 & + & x^3 & = & 1 \end{array} \qquad (2)$$

Ratschlag: Falls Brüche auftauchen, Zeile mit Hauptnenner durchmultiplizieren!

Zeile: ↓ Erweiterte Matrix:

$$\begin{array}{c} [1]: \\ [2]: \\ [3]: \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad (3) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 3[1]: \\ [2]-3[1]: \\ [3]-6[1]: \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \quad (4)$$

$$
\begin{array}{lccc|c}
[1]-[2]: & 1 & 0 & -1 & 4 \\
[2]+2[3]: & 0 & 3 & 0 & -11 \\
[2]-[3]: & 0 & 0 & 3 & 4
\end{array}
\quad (1) \quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{lccc|c}
[1]+\tfrac{1}{3}[3]: & 1 & 0 & 0 & 16/3 \\
\tfrac{1}{3}[2]: & 0 & 1 & 0 & -11/3 \\
\tfrac{1}{3}[3] & 0 & 0 & 1 & 4/3
\end{array}
\quad (2)
$$

LS.4c

Lösung: $x_1 = 16/3, \quad x_2 = -11/3, \quad x_3 = 4/3$ (3)

konsistent mit z1 ✓

Check durch einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^1}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{3} &= \frac{16}{9} + -\frac{11}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} \overset{4}{=} 1 \quad ✓ \\
x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= \frac{16}{3} - 2\cdot\frac{11}{3} + 3\cdot\frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad ✓ \qquad (4) \\
2x^1 + 3x^2 + x^3 &= 2\cdot\frac{16}{3} - 3\cdot\frac{11}{3} + \frac{4}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad ✓
\end{aligned}
$$

Falls das Gauss-Verfahren eine Zeile der Form $\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \; d \neq 0$
liefert, hat das LSG keine Lösung.

Falls das Gauss-Verfahren eine "Nullzeile" der Form $\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \; 0$
liefert, kann eine der Variablen x^i frei gewählt werden. Setze diese Variable gleich einem Parameter, z.B. $x^4 = t$. Lösung ist dann eine "Parameterschar".
(bei m Nulzeilen, sind m der Variablen frei wählbar, $\Rightarrow$ m unabhängige Parameter.)

Betrachte nun analoges Gleichungsystem, aber mit anderem Vektor rechts, $\vec{b}'$
Um es zu lösen, müssten wir Gauß-Verfahren wiederholen. Umständlich!
Es geht aber auch kompakter, mittels Matrix-Notation:

LS.4d

Kompakte Notation für (a.1): $\quad a^i{}_j \, x^j = b^i$ (1)

Schreibe $\quad \underline{\underline{A}} = \{a^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$, (quadratisch) $\qquad \vec{x} = \{x^j\}, \; \vec{b} = \{b^i\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, 1)$ (2)

Matrix-Notation (1): $\quad \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \overset{(1)}{=} \vec{b}$ (3)

Angenommen, es gibt eine 'inverse Matrix' zu A, mit: $\quad \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\mathbb{I}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}$ (4)

dann:

$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot$ (3) $\qquad \underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{A}}}_{(4):\ \underline{\underline{\mathbb{I}}}} \cdot \vec{x}) \overset{(3)}{=} \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \vec{b}$ (5)

Gesuchte Lösung: $\quad \vec{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \vec{b}$ (6)
(funktioniert für alle $\vec{b}$!)

Eine quadratische Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$ heisst 'invertierbar',

falls eine 'inverse Matrix' $\underline{\underline{A}}^{-1} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$ existiert, mit

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (2)$$

wobei
$$\underline{\underline{\mathbb{I}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \text{Einheitsmatrix.} \quad (3)$$

(1) impliziert (2):

$$\underbrace{\underline{\underline{A}}}_{} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{I}}} \overset{(1)}{=} \underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}) \overset{\text{Assoziativität}}{=} \underbrace{(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1})} \cdot \underline{\underline{A}} \quad (4)$$

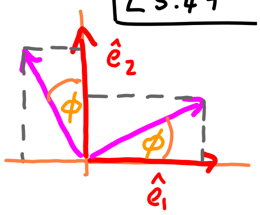
$$\Longrightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbb{I}}} \Rightarrow (2) \quad (5)$$

[Analog: (2) impliziert (1).]

Wie findet man Inverse? Seite L5.4h. Kriterien für Invertierbarkeit: später...

Beispiel: 2x2-Rotationsmatrix

Rotation: $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{R(\phi)}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{R(\phi)}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$ (1)



Rotationsmatrix:

[laut (i.5) sind Spalten v. R die Abbilder v. $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$]

$$\underline{\underline{R}}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (2)$$

Inverse v. R = Rotation um $-\phi$:

$$\underline{\underline{R}}^{-1}(\phi) = \underline{\underline{R}}(-\phi) = \begin{bmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Check:

$\cos \equiv c$

$\sin \equiv s$

$$\underline{\underline{R}}^{-1}(\phi)\,\underline{\underline{R}}(\phi) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 + s^2 & -cs + sc \\ -sc + cs & (-s)^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Übrigens:

$\cos\phi_1 = c_1$

$\sin\phi_1 = s_1$

$\cos\phi_2 = c_2$

$\sin\phi_2 = c_2$

$$\underline{\underline{R}}(\phi_1)\,\underline{\underline{R}}(\phi_2) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_2 - s_1s_2 & -c_1s_2 - s_1c_2 \\ s_1c_2 + c_1s_2 & -s_1s_2 + c_1c_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\phi_1+\phi_2) & -\sin(\phi_1+\phi_2) \\ \sin(\phi_1+\phi_2) & \cos(\phi_1+\phi_2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Beispiel: Allgemeine 2x2-Matrix

Sei $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (1) dann $\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (2) [Inverse existiert nur falls $ad-bc \neq 0$] (3)

Check:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Eigenschaften der Inversen

1) $$(\lambda \underline{\underline{A}})^{-1} = \lambda^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1} \quad (5)$$

Check: $$(\lambda^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1}) \cdot (\lambda \underline{\underline{A}}) \overset{(g.4)}{=} \lambda^{-1} \lambda \, (\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}) = 1 . \underline{\underline{I}} \quad (6)$$

2) $$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \quad (7)$$

Check: $$(\underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1}) (\underline{\underline{A}}}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{I}} \quad \square \quad (8)$$

Warnung: $$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^{-1} \neq \underline{\underline{A}}^{-1} + \underline{\underline{B}}^{-1}$$ [wie auch in $\mathbb{R}$: $(a+b)^{-1} \neq a^{-1} + b^{-1}$] (9)

Bestimmung der Inversen: Rückführung auf Lösung v. n linearen Gleichungssystemen

1) Sei $\underline{\underline{A}} = \{a^i{}_j\} \in mat(\mathbb{R}, n, n)$ (1)

und

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \equiv \underline{\underline{C}} \equiv \{c^j{}_k\} = \begin{bmatrix} c^1{}_1 \cdots & c^1{}_k \cdots & c^1{}_n \\ c^j{}_1 \cdots & c^j{}_k \cdots & c^j{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c^n{}_1 \cdots & c^n{}_k \cdots & c^n{}_n \end{bmatrix} \equiv (\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_k, \dots, \vec{C}_n) \quad (2)$$

n Spaltenvektoren, mit Komponenten: $(\vec{C}_k)^j \equiv c^j{}_k$ (3)

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \overset{(t.4)}{=} \underline{\underline{I}} \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a^i{}_j \, c^j{}_k \overset{(m.1)}{=} \delta^i{}_k \quad (5)$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{c}_k = \hat{e}_k \quad (6)$$

k-te Stelle

$$\begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_j & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^i{}_1 & \dots & a^i{}_j & \dots & a^i{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n{}_1 & \dots & a^n{}_j & \dots & a^n{}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^1{}_k \\ \vdots \\ c^j{}_k \\ \vdots \\ c^n{}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{e}_k \quad (7)$$

[spielt die Rolle von b in (d.3)]

Für jeden Wert von k = 1, ... , n liefert (6) ein anderes LGS (wegen anderem $\hat{e}_k$), zu lösen für den Spaltenvektor $\vec{C}_k$. [(h.6) hat dieselbe Form wie (d.3)] (8)

Die aus diesen Spaltenvektoren gebildete Matrix (2) ist dann die gesuchte Inverse, $\underline{\underline{A}}^{-1}$

Die n Gl.systeme der Form (h.7) lassen sich gleichzeitig lösen, mit Gauß-Verfahren: L5.4i

$$\underbrace{\begin{matrix} a^1_1 & \cdots & a^1_j & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^i_1 & \cdots & a^i_j & \cdots & a^i_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_j & \cdots & a^n_n \end{matrix}}_{\underline{\underline{A}}} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{matrix} \right. \quad (1) \quad \xrightarrow[\text{Verfahren}]{\text{Gauß-}} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{matrix} \left| \underbrace{\begin{matrix} c^1_1 & \cdots & c^1_k & \cdots & c^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c^j_1 & \cdots & c^j_k & \cdots & c^j_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c^n_1 & \cdots & c^n_k & \cdots & c^n_n \end{matrix}}_{(h.8):\ \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}^{-1}} \right. \quad (2)$$

<u>Beispiel (vergleiche Seite 10):</u>

Zeile:

Erweiterte Matrix:

$$\begin{array}{l} [1]: \\ [2]: \\ [3]: \end{array} \underbrace{\begin{matrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}}_{\underline{\underline{A}}} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right. \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} 3[1]: \\ [2]-3[1]: \\ [3]-6[1]: \end{array} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{matrix} \right. \quad (4)$$

L5.4j

$$\begin{array}{l} [1]\ \ [2]: \\ [2]+2[3]: \\ [2]-[3]: \end{array} \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 6 & -1 & 0 \\ -15 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{matrix} \right. \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} [1]+\frac{1}{3}[3]: \\ \frac{1}{3}[2]: \\ \frac{1}{3}[3] \end{array} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \underbrace{\begin{matrix} 7 & -2/3 & -1/3 \\ -5 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \end{matrix}}_{= A^{-1}} \right. \quad (2)$$

Check:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \overset{(i.3)}{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}} \ \overset{(j.2)}{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 21 & -2 & -1 \\ -15 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} (21-15+3) & (-2+1+1) & (-1+2-1) \\ (63-90+27) & (-6+6+9) & (-3+12-9) \\ (126-135+9) & (-12+9+3) & (-6+18-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

L5.5 Allgemeine lineare Abbildungen und Matrizen

V sei ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis $\quad V \equiv \text{span}\{\hat{v}_j\},\ j = 1, \dots, n \leftarrow \dim(V)$ (1)

W sei ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis $\quad W \equiv \text{span}\{\hat{w}_i\},\ i = 1, \dots, m \leftarrow \dim(W)$ (2)

[$\hat{\ }$ Hut bedeutet hier: allgemein/abstrakt, im Gegensatz zu bisherigen Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$

Betrachte lineare Abbildung: $\quad \hat{A} : V \longrightarrow W$ (3)

Wirkung auf Basis sei:
(durch diese Information ist A eindeutig festgelegt) $\quad \hat{v}_j \longmapsto \hat{A}(\hat{v}_j) \equiv \hat{w}_i\, a^i{}_j$ (4)

Bild von v-Basisvektor j ist
Linearkombination von w-Basisvektoren

Wirkung von A auf
beliebigen Vektor in V : $\quad \hat{v}_j x^j \equiv \hat{x} \longmapsto \hat{A}(\hat{x}) = \hat{y} \equiv \hat{w}_i\, y^i$ (5)

(dargestellt in jeweiliger Basis):

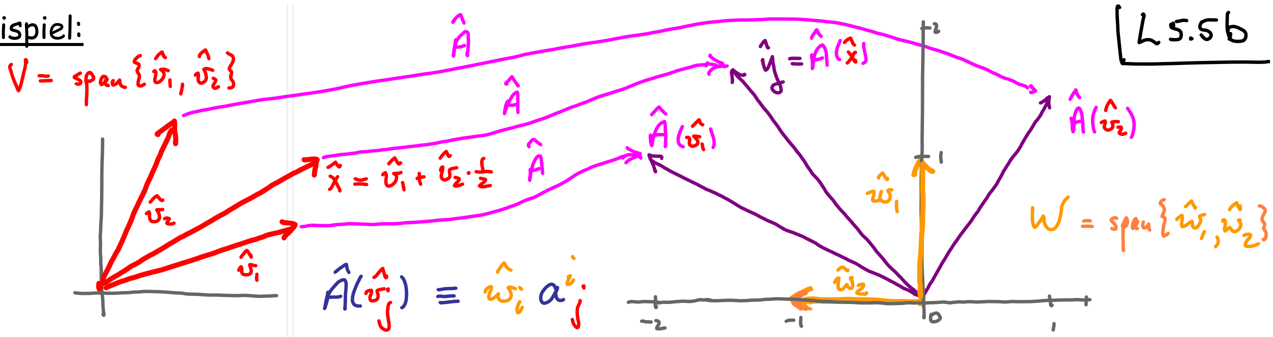
$$\hat{y} = \hat{w}_i\, y^i \overset{(5)}{=} \hat{A}(\hat{v}_j\, x^j) = \hat{A}(\hat{v}_j)\, x^j \overset{(4)}{=} \hat{w}_i \underbrace{a^i{}_j\, x^j}_{\equiv\, y^i} \quad (6) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y^i = a^i{}_j\, x^j} \quad (7)$$

A ist linear, (L5b.2)

Entspricht einer Abbildung
zwischen Standardvektorräumen: $\quad A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$(x^1, \dots, x^n)^T = \vec{x} \longmapsto \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{y} = (y^1, \dots, y^n)^T \quad (8)$$

Beispiel:



Laut
Skizze:

$$\hat{A}(\hat{v}_1) = \hat{z}_1 = \hat{w}_1 \cdot 1 + \hat{w}_2 \cdot 2 = \hat{w}_i\, a^i{}_1 \Longrightarrow a^1{}_1 = 1,\ a^2{}_1 = 2 \quad (1)$$

$$\hat{A}(\hat{v}_2) = \hat{z}_2 = \hat{w}_1 \cdot \tfrac{3}{2} + \hat{w}_2 \cdot (-1) = \hat{w}_i\, a^i{}_2 \Longrightarrow a^1{}_2 = \tfrac{3}{2},\ a^2{}_2 = -1 \quad (2)$$

Können wir hieraus die Wirkung v. A auf einen anderen Vektor, $\vec{x}$ bestimmen? Ja!

$$\hat{y} \equiv \hat{A}(\hat{x}) = \hat{A}(\hat{v}_1 + \hat{v}_2 \cdot \tfrac{1}{2}) = \hat{A}(\hat{v}_1) \cdot 1 + A(\hat{v}_2) \cdot \tfrac{1}{2} \quad (3)$$

$$\overset{(1),(2)}{=} (\hat{w}_1 \cdot 1 + \hat{w}_2 \cdot 2) \cdot 1 + (\hat{w}_1 \cdot \tfrac{3}{2} + \hat{w}_2 \cdot (-1)) \cdot \tfrac{1}{2} = \hat{w}_1\, \tfrac{7}{4} + \hat{w}_2 \cdot \tfrac{3}{2} \quad (4)$$

$1 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $\qquad$ $2 \cdot 1 + (-1) \cdot \frac{1}{2}$

Kompaktversion in
Matrixnotation:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3/2 \cdot 1/2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

L5.5c

Schematisch: Für Basisvektoren:

diese Gl. definiert die Abbildung

$$
\begin{array}{lcccccc}
V \ni & \hat{v}_j & \longmapsto & \hat{A}\,\hat{v}_j = \hat{w}_i\, a^i{}_j & & \in W & (1) \\
& \downarrow \phi_V & & \downarrow \phi_W & & & \\
\mathbb{R}^n \ni & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_j & \longmapsto & \hat{A}\,\hat{e}_j = \hat{e}_i\, a^i{}_j & = \begin{pmatrix} a^1{}_j \\ a^i{}_j \\ a^m{}_j \end{pmatrix} = (\underline{\underline{A}}_j) & \in \mathbb{R}^m & (2)
\end{array}
$$

Position j (in $\hat e_j$); Position i (in $\hat e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$) (3)

$(\underline{\underline{A}})_j$ = Spalte j der Matrix $\underline{\underline{A}}$, ist Bild des Basisvektors $\hat{e}_j$ unter Abbildung A. (4)

Für allgemeine Vektoren:

$$
\begin{array}{lcccccc}
V \ni & \hat{v}_j x^j = \hat{x} & \longmapsto & \hat{A}\,\hat{x} & = \hat{y} = \hat{w}_i\, y^i & \in W & (5) \\
& \downarrow \phi_V & & \downarrow & \downarrow \phi_W & & \\
\mathbb{R}^n \ni & \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \vec{x} & \longmapsto & \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} & = \vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} & \in \mathbb{R}^m & (6)
\end{array}
$$

L5.5d

Verknüpfung von zwei linearen Abbildungen: Matrixmultiplikation

Betrachte drei Vektorräume, je mit einer Basis:

$V = \mathrm{span}\{\hat{v}_i\}$, Dimension = n ,
$W = \mathrm{span}\{\hat{w}_j\}$, Dimension = m ,
$U = \mathrm{span}\{u_k\}$, Dimension = ℓ

Betrachte Verknüpfung v. zwei Abbildungen:

$$
\begin{array}{lcccccc}
V & \xrightarrow{A} & W & \xrightarrow{B} & U & & \\
\hat{x} = & \xmapsto{A} & \hat{y} = A\,\hat{x} & \xmapsto{B} & \hat{z} & = B\,\hat{y} = B A\,\hat{x} \equiv C\,\hat{x} & (1) \\
\downarrow \phi_V & & \downarrow \phi_W & & \downarrow \phi_U & & \\
\vec{x} & \xmapsto{A} & \vec{y} \overset{(C.6)}{=} \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} & \xmapsto{B} & \vec{z} & \overset{(C.6)}{=} \underline{\underline{B}} \cdot \vec{y} = \underbrace{\underline{\underline{B}} \cdot (\underline{\underline{A}}}_{\underline{\underline{C}}} \cdot \vec{x}) = \underline{\underline{C}} \cdot \vec{x} & (2)
\end{array}
$$

$$
\mathbb{R}^n \xrightarrow{\underline{\underline{A}}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\underline{\underline{B}}} \mathbb{R}^\ell
$$

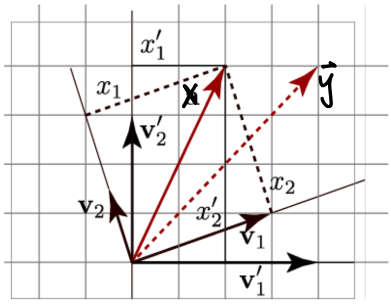
$$
\mathbb{R}^n \xrightarrow{\underline{\underline{C}} \,=\, \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}} \mathbb{R}^\ell
$$

Fazit: Verknüpfung v. linearen Abbildungen kann immer durch Matrixmultiplikation in Standardvektorräumen dargestellt werden.

L5.6 Basistransformation [vergleiche Seite L2.6g,h] [wie L5.5, nun mit W=V]

$\{\hat v_j\}$, $\{\hat v'_i\}$ seien zwei Basen für V, $\dim(V) = n$ mit $\hat v_j = \hat v'_i \, t^i{}_j$ (1)

$j, i = 1, \dots, n$



In $\{\hat v_j\}$-Basis, $\hat x = \hat v_j x^j \xmapsto{\phi_v} \vec x \in \mathbb{R}^n$ (2)

In $\{\hat v'_i\}$-Basis, $\hat x = \hat v'_i x'^i \xmapsto{\phi_{v'}} \vec x' \in \mathbb{R}^n$ (3)

$$\hat v'_i x'^i \overset{(3)}{=} \hat x \overset{(2)}{=} \hat v_j x^j \overset{(1)}{=} \hat v'_i t^i{}_j x^j \qquad (4)$$

Fazit: $x'^i = t^i{}_j x^j$ (5)

Matrixnotation: $\vec x' = \underline{\underline{T}}\,\vec x$ (6)

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^i \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} t^1{}_1 & \cdots & t^1{}_j & \cdots & t^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ t^i{}_1 & \cdots & t^i{}_j & \cdots & t^i{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ t^n{}_1 & \cdots & t^n{}_j & \cdots & t^n{}_n \end{pmatrix}}^{=\underline{\underline{T}}} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^j \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Neue Koordinaten lassen sich durch Matrixmultiplikation von T mit den Alten berechnen!

Rücktransformation mittels Inverser Matrix: $\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \vec x' \overset{(6)}{=} \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}}}_{=\underline{\underline{\mathbb{1}}}} \cdot \vec x = \vec x$ (8)

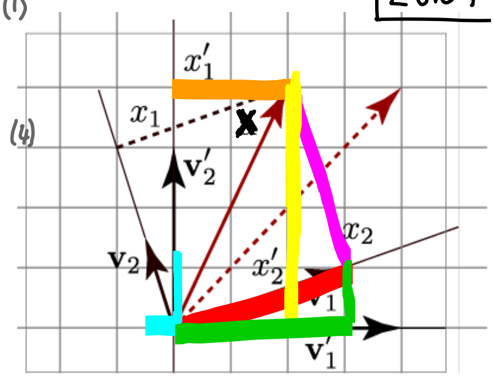
Beispiel:

$\hat v_j = \hat v'_i \, t^i{}_j$ (1)

$\hat v_1 = \hat v'_1 \overset{t^1{}_1}{\frac{3}{4}} + \hat v'_2 \overset{t^2{}_1}{\frac{1}{3}}$ (2)

$\hat v_2 = \hat v'_1 \overset{t^1{}_2}{\left(-\frac{1}{8}\right)} + \hat v'_2 \overset{t^2{}_2}{\frac{1}{2}}$ (3)

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} t^1{}_1 & t^1{}_2 \\ t^2{}_1 & t^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (4)$$



Der Vektor $\hat x$ hat zwei Darstellungen:

Einerseits, in $\{\hat v_j\}$-Basis: $\hat x = \hat v_1 \cdot 1 + \hat v_2 \cdot 2 \xmapsto{\phi_v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \vec x$ (5)

Andrerseits, in $\{\hat v'_i\}$-Basis: $\hat x = \hat v'_1 \frac{1}{2} + \hat v'_2 \, 4/3 \xmapsto{\phi_{v'}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4/3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \vec x'$ (6)

(5) & (6) sind konsistent mit Skizze und (5.5e.7):

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} \overset{(5.5e.7)}{=} \overbrace{\begin{pmatrix} t^1{}_1 & t^1{}_2 \\ t^2{}_1 & t^2{}_2 \end{pmatrix}}^{\underline{\underline{T}}} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 3/4 & -1/8 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}}^{(4)} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}^{(5)} \overset{\checkmark}{=} \overbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 4/3 \end{pmatrix}}^{(6)} \qquad (7)$$

Transformation einer Matrix-Darstellung von einer Basis in eine andere

$A: V \to V$, sei eine lineare Abbildung, mit $\hat{A}: \hat{x} \mapsto \hat{y}$.

In $\{\hat{v}_j\}$-Basis, $\hat{x} \overset{(e.2)}{=} \hat{v}_j x^j \xrightarrow{\phi_v} \vec{x}$ (1) | In $\{\hat{v}'_i\}$-Basis, $\hat{x} \overset{(e.3)}{=} \hat{v}'_i x'^i \xrightarrow{\phi_{v'}} \vec{x}'$ (1')

$\hat{y} = \hat{v}_j y^j \xrightarrow{\phi_v} \vec{y}$ (2) | $\hat{y} = \hat{v}'_i y'^i \xrightarrow{\phi_{v'}} \vec{y}'$ (2')

habe A die Darstellung: $\vec{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}$ (3) [siehe (a.8,c.6)] | habe A die Darstellung: $\vec{y}' = \underline{\underline{A}}' \cdot \vec{x}'$ (3') [siehe (a.8,c.6)]

Die zwei Basen seien Verknüpft durch die Transformation $\hat{T}$: $\hat{v}_j = \hat{v}'_i \, t^i{}_j$ (4)

Dann sind Koordinaten verknüpft durch:

$\vec{x}' \overset{(e.6)}{=} \underline{\underline{T}} \cdot \vec{x}$ (5), $\quad \vec{y}' \overset{(e.6)}{=} \underline{\underline{T}} \cdot \vec{y}$ (5')

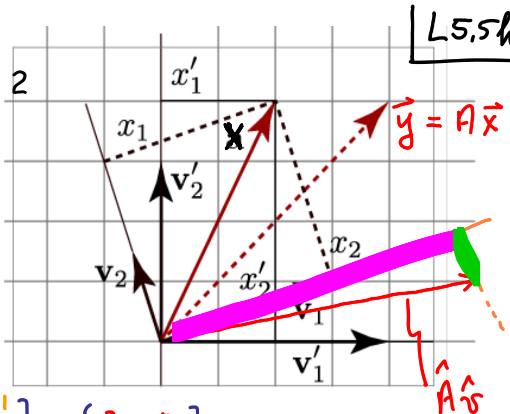
$\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \vec{x}' \overset{(5)}{=} \vec{x}$ (6), $\quad \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \vec{y}' \overset{(5')}{=} \vec{y}$ (6')

Und A mit A' durch: $\vec{y}' \overset{(5')}{=} \underline{\underline{T}} \cdot \vec{y} \overset{(3)}{=} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \overset{(6)}{=} \underbrace{\underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1}}_{=\underline{\underline{A}}'} \cdot \vec{x}'$ (7)

$$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1} \quad (8)$$

Beispiel:

A: sei Streckung in horizontale Richtung um Faktor 2



Finde Darstellung v. A in der $\{\hat{v}'_j\}$-Basis:

(5a.4): $\hat{A}(\hat{v}'_j) = \hat{v}'_i \, a'^i{}_j$ (1)

$\hat{A}(\hat{v}'_1) = \hat{v}'_1 \cdot \underbrace{2}_{a'^1{}_1} + \hat{v}'_2 \cdot \underbrace{0}_{a'^2{}_1}$ (2)

$\hat{A}(\hat{v}'_2) = \hat{v}'_1 \cdot \underbrace{0}_{a'^1{}_2} + \hat{v}'_2 \cdot \underbrace{1}_{a'^2{}_2}$ (3)

$\Rightarrow \underline{\underline{A}}' = \begin{bmatrix} a'^1{}_1 & a'^1{}_2 \\ a'^2{}_1 & a'^2{}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (4)

Berechne nun Darstellung v. A in der $\{\hat{v}_j\}$-Basis:

$$\underline{\underline{A}} \overset{(5i.8)}{=} \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\tilde{A}}} \cdot \underline{\underline{T}} = \underbrace{\frac{12}{5}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ -1/3 & 3/4 \end{bmatrix}}_{(L5.4g.2)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(4)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{(5f.4)} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 38 & -3 \\ -12 & 22 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Wie wirkt A auf den Basis-Vektor $\hat{v}_1 \xrightarrow{\phi_v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

$$\underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\underline{\underline{A}})_1 = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 38 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/10 \\ -3/5 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Zusammenfassung: L5.5-6 Basistransformationen

ZL5c

Zwei Vektorräume: $V = \text{span}\{\hat{v}_j\}$, $W = \text{span}\{\hat{w}_i\}$ (1)

Allgemeine lineare Abbildung: $\hat{A}: V \to W$ $\quad$ $\vec{x} = \hat{v}_j x^j \longmapsto \vec{y} = \hat{w}_i y^i$ (2)

Matrixdarstellung v. A: $\hat{A}(\hat{v}_j) = \hat{w}_i \, a^i{}_j$ $\quad$ $\vec{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}$, $\underline{\underline{A}} = \{a^i{}_j\}$ (3)

In Standardbasis: A bildet Basisvektor $\hat{e}_j$ ab auf: $(\underline{\underline{A}})_j$ = Spalte j von A (4)

Zwei Basen für denselben Raum: $V = \text{span}\{\hat{v}_j\} = \text{span}\{\hat{v}'_i\}$ (5)

Basistransformation: $T : V \longrightarrow V$ $\quad$ $\hat{v}_j = \hat{v}'_i \, t^i{}_j$ (6)

Matrixdarstellung v. T: $\underline{\underline{T}} = \{t^i{}_j\}$ $\quad$ $x'^i = t^i{}_j \, x^j$, $\vec{x}' = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{x}$ (7)

Darstellung v. altem Basisvektor $\hat{v}_j$ in neuer Basis: $(\underline{\underline{T}})_j$ = Spalte j von T (8)

Inverse Transformation: $\underline{\underline{T}}^{-1} = \{t^{-1\,j}{}_i\}$ $\quad$ $\hat{v}'_i = \hat{v}_j \, t^{-1\,j}{}_i$, $x^j = t^{-1\,j}{}_i \, x'^i$ (9)

Darstellung v. neuem Basisvektor $\hat{v}'_i$ in alter Basis: $(\underline{\underline{T}}^{-1})_i$ = Spalte i von T^{-1} (10)

Bezug zwischen $\vec{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}$ (11) und $\vec{y}' = \underline{\underline{A}}' \cdot \vec{x}'$ (12) : $\quad$ $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1}$ (13)