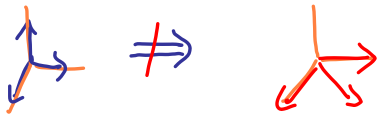
Kriterien für Invertierbarkeit einer Matrix

Eine lineare Abbildung $A : V \to V$ ist bijektiv, d.h. ihre Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist invertierbar,
falls und nur falls $(\Longleftrightarrow)$

(i) für jede Basis $\{\vec{v}_j\}$, die Bildvektoren $\vec{w}_j = \underline{\underline{A}}\,\vec{v}_j$ auch eine Basis, $\{\vec{w}_j\}$ bilden;

(intuitiv gesprochen: A darf nicht aus linear unabhängigen Vektoren linear abhängige machen.)



$\Updownarrow$

(ii) aus $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = 0$ folgt, dass $\vec{x} = \vec{0}$.

[d.h. der 'Kern' oder 'Nullraum' der Matrix, also die Menge aller Elemente, die auf Null abgebildet werden, ist 'trivial' (enthält nur den Nullvektor)]

Falls Standardbasis benutzt wird, $\{\vec{v}_i\} = \{\vec{e}_i\}$ folgt aus (i) ferner:

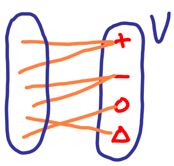
(iii) $\underline{\underline{A}}$ ist invertierbar, falls die Spaltenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ eine Basis bilden;

denn diese Spaltenvektoren sind die Bildvektoren der Standardbasis: $(\underline{\underline{A}})_j \overset{(j.5)}{=} A\,\hat{e}_j$

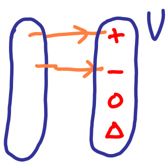
[Nächste Frage: wie wissen wir, ob Spaltenvektoren eine Basis bilden? Siehe L6.1]

Begründung für (i):

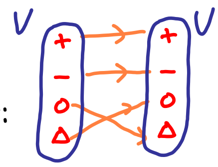
surjektiv:



injektiv:



bijektiv:



Begründung für (i) $\Leftarrow$: Annahme: $\{\vec{w}_i\}$ ist eine Basis. (1)

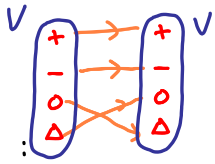
Dann ist A surjektiv [das ganze V liegt im Bild v. A, $A(V) = V$],
denn sein Bild, $A(V)$, enthält eine Basis v. V, nämlich $\{\vec{w}_i\}$ und somit das ganze V. (2)

Ferner ist A auch injektiv [jeder Bildvektor entspricht maximal einem Argument].
Denn ansonsten gäbe es zwei verschiedene Vektoren, $\vec{x} = \vec{v}_j x^j$ und $\vec{x}\,' = \vec{v}_j x'^j$ (3)
mit demselben Bild, d.h. $A\vec{x} = A\vec{x}\,'$ (4)

$$\Rightarrow \vec{0} \overset{(4)}{=} A(\vec{x} - \vec{x}\,') = A(\vec{v}_j x^j - \vec{v}_j x'^j) \overset{\text{Linearitität}}{=} A(\vec{v}_j)(x^j - x'^j) = \vec{w}_j (x^j - x'^j) \quad (5)$$

Letzte Gl. steht im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren $\{\vec{w}_i\}$

Fazit: A ist surjektiv und injektiv, somit bijektiv, somit invertierbar. $\Leftarrow \square$ (6)



L5.4m

<u>Begründung für (i) $\Rightarrow$:</u> <u>Annahme:</u> A ist bijektiv. (1)

Dann ist jeder Vektor $\vec{y} \in V$ das Bild eines Vektors $\vec{x} \in V$: (2)

$$\vec{y} = A(\vec{x}) = A(\vec{v}_j x^j) = A(\vec{v}_j) x^j = \vec{w}_j x^j \quad \Rightarrow \quad \{\vec{w}_j\} \text{ ist vollständig.} \qquad (3)$$

Ferner: $\{\vec{w}_i\}$ sind linear unabhängig. Ansonsten würde eine nicht-triviale Linearkombination existieren, die Null liefert,

$$\vec{0} = \vec{w}_j x^j = A(\vec{v}_j) x^j \overset{\text{Linearitität}}{=} A(\vec{v}_j x^j), \quad \text{also} \quad \overbrace{\vec{v}_i x^i}^{\neq \vec{0}} \xmapsto{A} \vec{0}. \qquad (4)$$

im Widerspruch zur Injektivität, denn es gilt auch $\vec{0} \mapsto \vec{0}$. (5)

<u>Fazit:</u> $\{\vec{w}_i\}$ ist vollständig und linear unabhängig, somit eine Basis. $\Rightarrow \square$

<u>Begründung für (ii):</u> analoge Argumente, Selbststudium!

L6 Determinanten

L6a

'Determinante' ist eine Abbildung der Form:

$$\det : \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \underline{\underline{A}} \longmapsto \det(\underline{\underline{A}}) \qquad (1)$$

Motivation:

1. Invertierbarkeit von A $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren von A bilden Basis $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

2. Diagonalisierung von A: Finde eine Transformation T, so dass

$$\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diagonal}$$

Startpunkt für Diagonalisierung: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{I}}}) = 0$

[3. Jakobi-Determinante bei Variablen-Transformation in Integralen: $\left| \frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(y^1, \ldots, y^n)} \right|$]

In allen Fällen spielt die 'Determinante' einer Matrix eine zentrale Rolle.

Vorschau: L6 Determinanten

L7 Diagonalisierung

Einfaches Kriterium dafür, ob Spaltenvektoren eine Basis bilden:

L6b

1 x 1 Systeme: trivial

Spaltenvektoren

2 x 2 Matrix: $$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{bmatrix} = (\vec{a}_1 , \vec{a}_2) \qquad (1)$$

$\vec{a}_1$ & $\vec{a}_2$ bilden eine Basis, falls $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$, und nicht $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ (2)

Vektoren sind parallel, falls

$$\begin{bmatrix} a^1{}_1 \\ a^2{}_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a^1{}_2 \\ a^2{}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^1{}_1 = \lambda a^1{}_2 \\ a^2{}_1 = \lambda a^2{}_2 \end{matrix} \Rightarrow \frac{a^1{}_1}{a^1{}_2} = \lambda = \frac{a^2{}_1}{a^2{}_2} \qquad (3)$$

$$\Longrightarrow \quad a^1{}_1 a^2{}_2 - a^2{}_1 a^1{}_2 = 0 \qquad (4)$$

Definition: "Determinante" einer 2x2 Matrix:

Merkregel:

$$\begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{vmatrix} \equiv \det \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{pmatrix} \equiv a^1{}_1 a^2{}_2 - a^2{}_1 a^1{}_2 \qquad \begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Fazit: $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert falls $\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0$ (6)

3x3 Matrizen: $$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{bmatrix} = (\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \vec{a}_3) \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, 3, 3) \qquad (1)$$

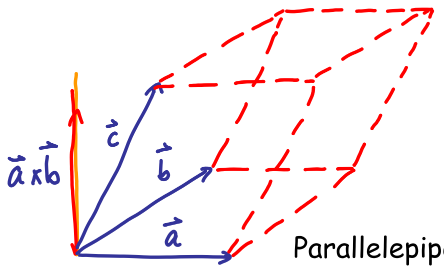
L6c

$$(\vec{a}_j)^i = a^i{}_j \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, 3, 1) \qquad (2)$$

Die Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$

sind linear unabhängig, falls sie nicht in einer Ebene liegen, d.h., falls ihr Spatprodukt ungleich 0 ist.

Spatprodukt = Volumen des Parallelepipeds



Parallelepiped

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \varepsilon_{ijk}\, a^i b^j c^k \qquad (3)$$

(L4m.2)

Definition: "Determinante" einer 3x3 Matrix:

Hier: $\vec{a} = \vec{a}_1$, $\vec{b} = \vec{a}_2$, $\vec{c} = \vec{a}_3$

$$\begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix} \equiv \det \underline{\underline{A}} \equiv \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \qquad (4)$$

$$= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, a^i{}_1\, a^j{}_2\, a^k{}_3 \qquad (5)$$

Levi-Civita

det A $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert (6)

Explizit: L6d

$$\det \underline{\underline{A}} \overset{(C.5)}{=} \varepsilon_{ijk}\, a^i{}_1 a^j{}_2 a^k{}_3 = \begin{aligned} &+ \underline{a^1{}_1\, a^2{}_2\, a^3{}_3} - \underline{a^1{}_1\, a^3{}_2\, a^2{}_3} \\ &+ \underline{a^2{}_1\, a^3{}_2\, a^1{}_3} - \underline{a^2{}_1\, a^1{}_2\, a^3{}_3} \\ &+ \underline{a^3{}_1\, a^1{}_2\, a^2{}_3} - \underline{a^3{}_1\, a^2{}_2\, a^1{}_3} \end{aligned} \qquad (1)$$

'Merkregel des Sarrus',
gilt nur für 3x3 Determinanten:

$$\begin{array}{ccccc} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 & a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 & a^2{}_1 & a^2{}_2 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 & a^3{}_1 & a^3{}_2 \end{array}$$

+ für Produktbildung links oben nach rechts unten: ╲

- für Produktbildung links unten nach rechts oben: ╱ (2)

Anmerkung: Indizes in (1) haben folgende Struktur:

- für feste Reihenfolge 123 der zweiten (unteren) Indizes,
- durchlaufen die ersten (oberen) Indizes alle möglichen Reihenfolgen ('alle Permutationen'),

  123, 231, 312 und 132, 213, 321

- mit Vorzeichen = $\left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}$ für $\left\{ \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \right\}$ Anzahl v. 'Transpositionen' relativ zu 123

<u>Permutationen</u> (Vertauschung der n Zahlen 1,2,3, ... , n) L6e

'Transposition': nur zwei Elemente werden vertauscht. (1)

Jede Permutation P lässt sich schreiben als Folge von 'Transpositionen' (2)

sign P $\equiv$ "Vorzeichen der Permutation" $\equiv \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}$ für $\left\{ \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \right\}$ Anzahl v. Transpositionen (3)

<u>Beispiel: Alle Permutationen von 123:</u>

Permutation P:	[1,2,3]	[1,3,2]	[2,1,3]	[3,2,1]	[2,3,1]	[3,1,2]	(4)
Anzahl Transpositionen:	0	1	1	1	2	2	(5)
sign P :	+1	−1	−1	−1	+1	+1	(6)

Allgemeine Notation:

$$P = [3,1,2,4] \text{ steht für } \left\{ \begin{matrix} 1 \longrightarrow 3 \\ 2 \longrightarrow 1 \\ 3 \longrightarrow 2 \\ 4 \longrightarrow 4 \end{matrix} \right. \qquad P = [p(1), p(2), \dots p(n)] \text{ steht für } \left\{ \begin{matrix} 1 \longrightarrow P(1) \\ 2 \longrightarrow P(2) \\ \vdots \\ n \longrightarrow P(n) \end{matrix} \right. \qquad (7)$$

Def: Determinante einer nxn Matrix: Sei $\underline{\underline{A}} = \{a^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$ L6f

$$\det \underline{\underline{A}} \equiv \sum_P (\operatorname{sign} P)\; a^{P(1)}{}_1\, a^{P(2)}{}_2 \cdot \ldots \cdot a^{P(n)}{}_n \qquad \text{'Leibniz-Regel'} \qquad (1)$$

Summe über alle n! Permutationen $P = [p(1), p(2), \ldots, p(n)]$ der natürlichen Folge $(1, 2, \ldots, n)$

'Laplace-Entwicklung' (ohne Beweis): Entwicklung einer Det. nach Zeile i oder Spalte j

Die Determinante von $\underline{\underline{A}}$ lässt sich auch wie folgt berechnen:

Entwicklung nach Spalte j: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}^k{}_j\, a^k{}_j$ (2)

Elemente von Spaltenvektor j, mit j = 1, ... , n beliebig, aber $\boxed{\text{fest}}$

(d.h. hier keine Summenkonvention!)

Entwicklung nach Zeile i: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}^i{}_k\, a^i{}_k$ (3)

Elemente von Reihenvektor i, mit i = 1, ... , n beliebig, aber $\boxed{\text{fest}}$

Def.: "Kofaktor" zu $a^i{}_j$: $\tilde{a}^i{}_j \equiv (-1)^{i+j} M^i{}_j$ (4)

Def: 'Unterdeterminante' oder 'Minor': $M^i{}_j$ =Determinante der (n-1)x(n-1) Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht

---

Beispiel: 3x3 Determinante, entwickelt nach Spalte j=1: L6g

$$\det \underline{\underline{A}} \overset{(f.2)}{=} \sum_{k=1}^{3} \tilde{a}^k{}_1\, a^k{}_1 \qquad (1)$$

[wir halten hier den Spaltenindex fest]

$$= +\overbrace{\begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix}}^{M^1{}_1} a^1{}_1 - \overbrace{\begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix}}^{M^2{}_1} a^2{}_1 - \overbrace{\begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix}}^{M^3{}_1} a^3{}_1 \qquad (2)$$

$$= a^1{}_1 \begin{vmatrix} a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix} - a^2{}_1 \begin{vmatrix} a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix} + a^3{}_1 \begin{vmatrix} a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_2 & a^2{}_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

$$= a^1{}_1 \big(\overset{(i)}{a^2{}_2 a^3{}_3} - \overset{(ii)}{a^3{}_2 a^2{}_3} \big) - a^2{}_1 \big(\overset{(iii)}{a^1{}_2 a^3{}_3} - \overset{(iv)}{a^3{}_2 a^1{}_3} \big) + a^3{}_1 \big(\overset{(v)}{a^1{}_2 a^2{}_3} - \overset{(vi)}{a^2{}_2 a^1{}_3} \big) \qquad (4)$$

$$\overset{(d.1)}{=} + \overset{(i)}{a^1{}_1 a^2{}_2 a^3{}_3} - \overset{(iii)}{a^1{}_1 a^3{}_2 a^2{}_3}$$
$$+ \overset{(iv)}{a^2{}_1 a^3{}_2 a^1{}_3} - \overset{(iii)}{a^2{}_1 a^1{}_2 a^3{}_3}$$
$$+ \overset{(v)}{a^3{}_1 a^1{}_2 a^2{}_3} - \overset{(vi)}{a^3{}_1 a^2{}_2 a^1{}_3}$$

Trick: wähle Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen, das beschleunigt die Berechnung der Determinanten erheblich!

Eigenschaften von Determinanten

Im Folgenden sei $\underline{A} = \{a^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$, $\quad \vec{a}_j = \begin{pmatrix} a^1{}_j \\ \vdots \\ a^n{}_j \end{pmatrix}$ = Spaltenvektor j $\in \mathbb{R}^n$ (1)

Notation:
$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 & & a^n{}_n \end{vmatrix} \equiv \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \qquad (2)$$

(i) Diagonalmatrix

Für
$$\underline{A} = \{\lambda_i \delta^i{}_j\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

gilt
$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad (4)$$
[nur der erste Term in Leibniz-Regel ist ungleich Null]

[vergleiche 2x2 Matrix, Gl. (b.5), 3x3 Matrix, Gl. (d.2)]

Für Einheitsmatrix: $\det(\mathbb{1}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots \cdot 1 = 1$ (5)

(ii) Transponierte

$$\underline{A} = \{a^i{}_j\}, \quad \underline{A}^T = \{a^{T\,i}{}_j\} \overset{(L5.6h)}{\equiv} \{a^j{}_i\} \qquad (1)$$

Beispiel: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\underline{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Es gilt:
$$\det \underline{A} = \det \underline{A}^T \qquad (2)$$

Beweisidee:

$$\det \underline{A} \overset{(f.1)}{=} \sum_P (\mathrm{sign}\, P)\, a^{P(1)}{}_1\, a^{P(2)}{}_2 \cdot \dots \cdot a^{P(n)}{}_n \qquad (3)$$

$$\det \underline{A}^T \overset{(f.1)}{=} \sum_P (\mathrm{sign}\, P)\, a^1{}_{P(1)}\, a^2{}_{P(2)} \dots a^{i_1}{}_{P(i_1)} \dots a^{i_2}{}_{P(i_2)} \dots a^n{}_{P(n)} \qquad (4)$$

umsortieren:
$$= \sum_P (\mathrm{sign}\, P)\, a^{P^{-1}(1)}{}_1\, a^{P^{-1}(2)}{}_2 \dots a^{P^{-1}(n)}{}_n \qquad (5)$$

Für gegebene Permutation P: sei

$P(i_1) = 1, \quad i_1 = P^{-1}(1)$

$P(i_2) = 2, \quad i_2 = P^{-1}(2)$

$\vdots$

$P(i_n) = n, \quad i_n = P^{-1}(n)$

(5) & (3) enthalten, nach Ausführen der Summe über alle Permutationen P, genau dieselben Terme mit denselben Vorzeichen, sind also gleich. [Selber nachrechnen für 3x3 Fall!]

Konsequenz: alle Aussagen für Determinanten, die im folgenden für <u>Spalten</u>vektoren einer Matrix gemacht werden, gelten auch für <u>Zeilen</u>vektoren einer Matrix. (6)

(iii) "Multilinearität": linear für jede Spalte [und für jede Zeile, wegen (i.6)] L6j

Sei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\lambda \vec{a}_j + \mu \vec{b}}_{\text{j-te Stelle}}, \ldots, \vec{a}_n) = \lambda \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) + \mu \det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{b}}_{\text{j-te Stelle}}, \ldots, \vec{a}_n) \qquad (1)$$

Beweisidee: nach (f.1) enthält jeder der n! Summanden in det A genau einen Faktor aus jeder Spalte [bzw. jeder Zeile] von A. Für jeden solchen Faktor gilt Linearität:

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \lambda \vec{a}_j + \mu \vec{b}, \ldots, \vec{a}_n) \overset{(f.1)}{=} \sum_P (\text{sign}\, P)\, a^{P(1)}{}_1\, a^{P(2)}{}_2 \cdot \ldots (\lambda a^{P(j)}{}_j + \mu b^{P(j)}) \ldots a^{P(n)}{}_n \qquad (2)$$

$$= \lambda \sum_P (\text{sign}\, P)\, a^{P(1)}{}_1\, a^{P(2)}{}_2 \cdot \ldots \cdot a^{P(j)}{}_j \cdot \ldots a^{P(n)}{}_n \qquad (3)$$

$$+ \mu \sum_P (\text{sign}\, P)\, a^{P(1)}{}_1\, a^{P(2)}{}_2 \cdot \ldots \cdot b^{P(j)} \cdot \ldots a^{P(n)}{}_n \qquad (4)$$

$$= \lambda \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) + \mu \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a}_n) \quad \square \qquad (5)$$

L6k

Explizit für 3x3:

$$\begin{aligned} \det(\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = {} & (\lambda a^1{}_1 + \mu b^1)\, a^2{}_2\, a^3{}_3 - (\lambda a^1{}_1 + \mu b^1)\, a^3{}_2\, a^2{}_3 \\ & + (\lambda a^2{}_1 + \mu b^2)\, a^3{}_2\, a^1{}_3 - (\lambda a^2{}_1 + \mu b^2)\, a^1{}_2\, a^3{}_3 \qquad (1) \\ & + (\lambda a^3{}_1 + \mu b^3)\, a^1{}_2\, a^2{}_3 - (\lambda a^3{}_1 + \mu b^3)\, a^2{}_2\, a^1{}_3 \end{aligned}$$

$$= \lambda \left(\begin{array}{l} + a^1{}_1 a^2{}_2 a^3{}_3 - a^1{}_1 a^3{}_2 a^2{}_3 \\ + a^2{}_1 a^3{}_2 a^1{}_3 - a^2{}_1 a^1{}_2 a^3{}_3 \\ + a^3{}_1 a^1{}_2 a^2{}_3 - a^3{}_1 a^2{}_2 a^1{}_3 \end{array} \right) + \mu \left(\begin{array}{l} + b^1 a^2{}_2 a^3{}_3 - b^1 a^3{}_2 a^2{}_3 \\ + b^2 a^3{}_2 a^1{}_3 - b^2 a^1{}_2 a^3{}_3 \\ + b^3 a^1{}_2 a^2{}_3 - b^3 a^2{}_2 a^1{}_3 \end{array} \right) \qquad (2)$$

$$= \lambda \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) + \mu \det(\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \qquad (3)$$

Multilinearität impliziert: $\det(\lambda \underline{\underline{A}}) = \lambda^n \det \underline{\underline{A}}$ 'Homogenität' (4)

da jede der n Spalten einen Faktor λ liefert.

(iv) Antisymmetrie (Vorzeichenwechsel) bei Vertauschen von Spalten:

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) = -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) \quad (1)$$

Beweisidee: die rechte Seite liefert genau dieselben n! Terme wie die Linke, aber benötigt für jeden Term eine ungerade Anzahl Transposition mehr oder weniger, sodass sign(P) in jedem Term ein umkehrtes Vorzeichen hat.

Explizit für 3x3:

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} +a^1{}_1 a^2{}_2 a^3{}_3 - a^1{}_1 a^3{}_2 a^2{}_3 \\ +a^2{}_1 a^3{}_2 a^1{}_3 - a^2{}_1 a^1{}_2 a^3{}_3 \\ +a^3{}_1 a^1{}_2 a^2{}_3 - a^3{}_1 a^2{}_2 a^1{}_3 \end{pmatrix}, \quad \det(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} +a^1{}_1 a^2{}_3 a^3{}_2 - a^1{}_1 a^3{}_3 a^2{}_2 \\ +a^2{}_1 a^3{}_3 a^1{}_2 - a^2{}_1 a^1{}_3 a^3{}_2 \\ +a^3{}_1 a^1{}_3 a^2{}_2 - a^3{}_1 a^2{}_3 a^1{}_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Antisymmetrie impliziert: sind zwei Spalten oder zwei Zeilen gleich, ist $\det \underline{A} = 0$ (3)

Beweis: (1) mit i = j:

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) \overset{(1)}{=} -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) \quad (4)$$

[Anwendung in QM:
Pauli-Prinzip für Fermionen!]

$$\det \underline{A} = -\det \underline{A} \quad \Rightarrow \quad \det \underline{A} = 0 \quad \square \quad (5)$$

Konsequenz von (iii,iv): addiert man zu einer Spalte (Zeile) die mit einer Zahl μ multiplizierten Glieder einer anderen Spalte (Zeile), ändert sich die Determinante nicht:

Also ändern die beim Gauß-Algorithmus benutzten Manipulationen die Det. nicht !

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i + \mu\vec{a}_j, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) \overset{(j.1)}{=} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) \quad (1)$$

$$+ \mu \underbrace{\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n)}_{\text{zwei gleiche Spalten: } (l.3) \; = 0} \quad \square$$

(v): Falls Spaltenvektoren von A linear abhängig sind, dann gilt $\det(\underline{A}) = 0$ (2)
(oder Zeilenvektoren...)

Beweis: falls Spaltenvektoren linear abhänig sind, gilt: $\sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i c^i = \vec{0}$ (3)

wobei nicht alle c^i gleich 0 sind. Sei z.B. $c^n \neq 0$ dann $\vec{a}_n = -\frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^{n-1} \vec{a}_i c^i$ (4)

Eingesetzt in

$$\det(\underline{A}) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n) \quad (5)$$

$$\overset{(4)}{=} \det\left(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, -\frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^{n-1} \vec{a}_i c^i\right) \quad (6)$$

Multilinearität: $\overset{(j.1)}{=} -\frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^{n-1} c^i \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_i) = 0$ (7)

Da in jedem Term zwei Spaltenvektoren gleich sind (weil $i \in [1, n-1]$) gilt (l.4)

(vi) Konstruktion der Inversen:

Laplace-Regel, Entwicklung nach Spalte i:

L6n

$$\det \underline{\underline{A}} = \det(\vec a_1, \dots, \vec a_i, \dots, \vec a_j, \dots, \vec a_n) \overset{(f.2)}{=} \sum_k \tilde a^k{}_i \underbrace{a^k{}_i}_{} \qquad (1)$$

Spalte i, Spalte j $(\neq i)$

Spaltenvektor an Position i

Betrachte nun $\underline{\underline{B}} = (\vec a_1, \dots, \vec a_j, \dots, \vec a_j, \dots, \vec a_n)$ ($\underline{\underline{B}}$ hat zwei gleiche Spalten !) (2)

$$\left[0 \overset{(\ell.3)}{=} \det \underline{\underline{B}} = \det(\vec a_1, \dots, \vec a_j, \dots, \vec a_j, \dots, \vec a_n) \overset{(2)}{=} \sum_k \tilde a^k{}_i \underbrace{a^k{}_j}_{} \quad \forall\ i \neq j \right] \qquad (3)$$

Spaltenvektor an Position i

Betrachte nun folgende Matrix: $\underline{\underline{C}} = (C^i{}_k) \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$, $\quad C^i{}_k \equiv \dfrac{\tilde a^k{}_i}{\det \underline{\underline{A}}}$ (4)

$$(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{A}})^i{}_j \overset{(L5m.1)}{=} \sum_{k=1}^n c^i{}_k a^k{}_j \overset{(3)}{=} \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \underbrace{\sum_{k=1}^n \tilde a^k{}_i \, a^k{}_j}_{\begin{cases} \det \underline{\underline{A}} & \text{falls } i=j \ \text{(n.2)} \\ 0 & \text{falls } i\neq j \ \text{(n.4)} \end{cases}} \overset{(5,6)}{=} \delta^i{}_j \qquad (5)\ (6)$$

Fazit: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$ (7)

Satz: die Inverse der Matrix $\underline{\underline{A}}$ existiert genau dann, wenn $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$ (8)

und ist gegeben durch $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{C}}$ mit $c^i{}_k \overset{(4)}{=} \dfrac{\tilde a^k{}_i}{\det \underline{\underline{A}}}$ (9)

(vi) Konsequenzen von det(A) = 0:

L6p

$$\det(\underline{\underline{A}}) = 0 \qquad (1)$$

$\overset{(n.8)}{\Longleftrightarrow}$ $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert nicht (2)

$\overset{L5.4k(i)}{\Longleftrightarrow}$ Spaltenvektoren v. $\underline{\underline{A}}$ sind nicht linear unabhängig und bilden keine Basis f. $\mathbb{R}^n$ (3)

$\overset{(i.6)}{\Longleftrightarrow}$ Reihenvektoren " " " " " " " " " "

$\overset{L5.4k(ii)}{\Longleftrightarrow}$ Nullraum v. $\underline{\underline{A}}$ ist nicht-trivial, d.h. es exitiert ein $\vec v \neq \vec 0$ mit $\underline{\underline{A}} \cdot \vec v = \vec 0$ (5)

(vi) Multiplikationstheorem:

für nxn-Matrizen
(Beweis: siehe Lineare Algebra Vorlesung)

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = (\det \underline{\underline{A}})(\det \underline{\underline{B}}) \qquad (6)$$

(vii) Determinante der Inversen:

$$\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = (\det \underline{\underline{A}})^{-1} \qquad (7)$$

Beweis: $(\det \underline{\underline{A}})(\det \underline{\underline{A}}^{-1}) \overset{(6)}{=} \det(\underbrace{\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}}_{= \underline{\underline{I}}}) = \det(\underline{\underline{I}}) \overset{(h.5)}{=} 1$ $\square$ (8)

Zusammenfassung: L6 Determinanten

ZL6a

Determinante: diagnostiziert lin. Unabhängigkeit d. Spaltenvektoren einer nxn-Matrix

Leibniz-Regel: $\det \underline{\underline{A}} \equiv \sum_P (\text{sign } P)\, a^{P(1)}{}_1\, a^{P(2)}{}_2 \cdot \ldots \cdot a^{P(n)}{}_n$ (1)

Laplace-Regel: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}^k{}_j\, a^k{}_j$ (j fest) $= \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}^i{}_k\, a^i{}_k$ (i fest) (hier keine Summenkonvention!) (2)

2x2: $\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = a^1 b^2 - a^2 b^1$ 3x3: $\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\, a^i b^j c^k$ (3)

Kofaktor: $\tilde{a}^i{}_j \equiv (-1)^{i+j} M^i{}_j$ Unterdeterminante: (streiche Zeile i, Spalte j aus A, bilde dann die Determinante) (4)

Diagonalmatrix: $\det(\lambda_i \delta^i{}_j) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\det \mathbb{1} = 1$ (5)

Transponierte: $\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}}^T$ (6)

ZL6b

Multilinearität: $\det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\lambda \vec{a}_j + \mu \vec{b}}_{\text{j-te Stelle}}, \ldots, \vec{a}_n) = \lambda \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) + \mu \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a}_n)$ j-te Stelle (1)

Antisymmetrie: Vorzeichenwechsel beim Vertauschen v. zwei Zeilen oder zwei Spalten.

$$\det(\ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots) = -\det(\ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_i, \ldots) \quad (2)$$

Zwei gleiche Spalten oder Zeilen: $\det(\ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_i, \ldots) = 0$ (3)

Konstruktion des Inversen: $\underline{\underline{A}} = \{a^i{}_j\} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \equiv \underline{\underline{C}} = \{c^i{}_k\}$, $c^i{}_k = \dfrac{\tilde{a}^k{}_i}{\det \underline{\underline{A}}}$ (4)

$\det \underline{\underline{A}} \neq 0 \iff$ A invertierbar $\iff$ Spaltenvektoren v. A sind lin. unabhängig

Multiplikationstheorem: $\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = (\det \underline{\underline{A}})(\det \underline{\underline{B}})$ (5)

Det. des Inversen $\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = (\det \underline{\underline{A}})^{-1}$ (6)