L7 Diagonalisierung einer Matrix: Eigenwerte und Eigenvektoren

Viele Anwendungen in der Physik: z.B. Bestimmung der
- Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers durch Diagonalisierung des Trägheitstensors
- Normalmoden von gekoppelten harmonischen Oszillatoren durch Diag. der Hamilton-Funktion
- Eigenzustände und Eigenenergien eines Quantensystems durch Diag. des Hamilton-Operators

Gegeben $\underline{\underline{A}} = \{a^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

[analoge Diskussion in auch möglich für $\mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$]

$$\underline{\underline{A}}: \quad \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$\vec{x} \longmapsto \vec{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}$$

Gesucht: Diagonalform:

$$\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Finde $\underline{\underline{S}}$ und λ_j ! (2)

Definition: Eigenvektor, Eigenwert

Ein (nicht-Null) Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ heißt "Eigenvektor" (EV) von $\underline{\underline{A}}$, falls

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \lambda \, \vec{v} \qquad \text{(also } \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} \parallel \vec{v} \text{)} \qquad (3)$$

λ heißt der 'Eigenwert' (EW) von $\underline{\underline{A}}$ zugehörig zum 'Eigenvektor' $\vec{v}$ (4)

Eine Gleichung der Form (3) heißt "Eigenwertgleichung".

Oft wird Zusammenhang zwischen λ und $\vec{v}$ mit einem Index angedeutet, z.B. wird der Eigenvektor v. λ_j durch $\vec{v}_j$ gekennzeichnet.

Beispiel 1: Nullmatrix

$$\underline{\underline{0}} = (0^i{}_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\underline{\underline{0}} \cdot \vec{v} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{v} \qquad (2)$$

$\Longrightarrow$ Jeder beliebige Vektor $\vec{v}$ ist EV der Nullmatrix, mit EW 0 (3)

Beispiel 2: Einheitsmatrix

$$\underline{\underline{I}} = (\delta^i{}_j) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

$$\underline{\underline{I}} \cdot \vec{v} = \vec{v} = 1 \cdot \vec{v} \qquad (5)$$

$\Longrightarrow$ Jeder beliebige Vektor $\vec{v}$ ist EV der Einheitsmatrix, mit EW 1 (6)

Beispiel 3: Diagonalmatrix $\in \text{mat}(\mathbb{C},n,n)$ L7.1c

$$\underline{\underline{A}} = (\lambda_j \delta^i_j) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

(nur Diagonalmatrixelemente sind ungleich 0)

Betrachte Standardbasis von $\mathbb{C}^n$

Spaltenvektor: $$\hat{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{mat}(\mathbb{C},n,1) \quad (2)$$

j-te Stelle

Dann:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \hat{e}_j = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_j & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_j \hat{e}_j \quad (3)$$

j-te Stelle

Also: $\underline{\underline{A}} \cdot \hat{e}_j = \lambda_j \hat{e}_j$ [hier ist nicht Einstein-Summation gemeint!] (4)

$\Rightarrow$ Diagonalmatrizen haben kanonische Basisvektoren $\hat{e}_j$ als EV (5)
und Diagonalmatrixelemente λ_j als dazugehörige EW. (6)

Diagonalisieren einer Matrix $\underline{\underline{A}} \in \text{mat}(\mathbb{C},n,n)$ L7.1d

Angenommen, ein Satz von n linear unabhängigen EV (also eine Basis für $\mathbb{C}^n$) (1)

ist bekannt, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, (1) $\quad \vec{v}_j = \begin{bmatrix} v^1{}_j \\ \vdots \\ v^i{}_j \\ \vdots \\ v^n{}_j \end{bmatrix}$ (2)

Merkregel:
i: Koordinaten - Index oben
j: Name des Vektors - Index unten

mit EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (3)

also: $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_j \overset{(a.3)}{=} \lambda_j \vec{v}_j$ (4)

in Komponenten:

$$a^i{}_k v^k{}_j = \lambda_j v^i{}_j = v^i{}_k \underbrace{\delta^k{}_j \lambda_j}_{\equiv \underline{\underline{\Lambda}} \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_j & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}} \quad (5) \quad (6)$$

Dann gilt: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} \overset{(5)}{=} \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}$ (7)

mit $$\underline{\underline{S}} \equiv \{v^i{}_j\} = \begin{bmatrix} v^1{}_1 & \vdots & v^1{}_j & \vdots & v^1{}_n \\ v^2{}_1 & \vdots & v^2{}_j & \vdots & v^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v^n{}_1 & \vdots & v^n{}_j & \vdots & v^n{}_n \end{bmatrix} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j, \ldots \vec{v}_n) \quad (8)$$

eine Matrix, deren Spaltenvektoren durch die EV gegeben sind! (9)

Die Inverse $\underline{\underline{S}}^{-1}$ v. $\underline{\underline{S}}$ existiert, da $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ per Annahme eine Basis bilden

$$\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \text{(d.7)} \qquad \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}}}_{= \underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{\Lambda}} \overset{\text{(d.6)}}{=} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Man sagt: "$\underline{\underline{A}}$ ist ähnlich zu $\underline{\underline{\Lambda}}$" ("Äquivalenzrelation") falls derartiges $\underline{\underline{S}}$ existiert. (2)

$\underline{\underline{A}}$ ist 'diagonalisierbar', falls $\underline{\underline{A}}$ ähnlich einer Diagonalmatrix ist. (3)

(Bedingungen für Diagonalisierbarkeit: siehe Vorlesung Lineare Algebra)

Bestimmung der Eigenvektoren und Eigenwerte

Sei $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ mit EV $(\vec{0} \neq)\ \vec{v} \in \mathbb{C}^n$ und EW $\lambda \in \mathbb{C}$ (4)

Also: $$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} \overset{\text{(a.3)}}{=} \lambda\, \vec{v} = \lambda\, \underline{\underline{I}} \cdot \vec{v} \qquad (5)$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \qquad (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \qquad (6)$$

$\overset{\text{(e.6)}}{\Longrightarrow}$
Dann ist die Matrix $$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 - \lambda & a^1{}_2 & \cdots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 - \lambda & \cdots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 & \cdots & a^n{}_n - \lambda \end{bmatrix}$$ nicht invertierbar. (1)

Denn: wäre $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}$ invertierbar, dann würde aus (e.6) folgen:

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})^{-1} \cdot \text{(e.6)} \qquad \underbrace{(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})^{-1} (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \vec{v} = (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})^{-1} \cdot \vec{0} \qquad (2)$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{v} = \vec{0}$$ im Widerspruch zu (e.4) (3)

Laut (L6p.1) ist eine Matrix genau dann nicht invertierbar, wenn ihre Determinante Null ist:

$$\overset{(1),\,(L6p.1)}{\Longrightarrow} \qquad \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \overset{!}{=} 0 \qquad (4)$$

(4) ist eine notwendige und hinreichende Bedingung an alle EW λ von $\underline{\underline{A}}$, somit nützlich für deren Bestimmung!

Def: "charakteristisches Polynom der Matrix $\underline{\underline{A}}$":

$$P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) \equiv \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} a^1{}_1 - \lambda & a^1{}_2 & \cdots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 - \lambda & & a^2{}_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 & & a^n{}_n - \lambda \end{vmatrix} \quad (1)$$

$P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda)$ ist ein Polynom n-ten Grades [höchste Potenz v. λ ist λ^n, kommend von $(a^1{}_1 - \lambda)(a^2{}_2 - \lambda) \cdots (a^n{}_n - \lambda)$ beim Berechnen v. (1)] (3)

[siehe Gl. (4) unten]

Laut (f.4) liefern die n Nullstellen von $P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda)$ die n Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$:

$$P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = 0 \overset{(f.4)}{\Leftrightarrow} \lambda \text{ ist ein EW von } \underline{\underline{A}} \quad (2)$$

Fundamentalsatz der Algebra: (Doktorarbeit v. Gauss (1799)! Siehe Lin. Alg. Vorlesung)
Ein Polynom n-ten Grades hat genau n (möglicherweise komplexe) Nullstellen. (4)

Die Nullstellen müssen nicht alle verschieden sein. Sind zwei Nullstellen gleich, heißen sie "entartet".

Rezept zur Bestimmung von EW: Berechne $P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda)$, finde dessen Nullstellen! (5)

Beispiel 4: Finde EW und EV von $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (1)

Bestimme zunächst EW, via Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\underset{(g.2)}{0 \overset{!}{=}} P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) \underset{(g.1)}{=} \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 0-\lambda & -3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda)+3 \quad (2)$$

$$0 \overset{(2)}{=} \lambda^2 - 4\lambda + 3 \quad (3)$$

Die zwei EW sind durch die zwei Lösungen der quadratischen Gleichung (3) gegeben:

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix}\right\} \overset{(6)}{=} \frac{1}{2\cdot 1}\Big[4 \pm \underbrace{\sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}_{2}\Big] = \left\{\begin{matrix} 3 = \lambda_1 \\ 1 = \lambda_2 \end{matrix}\right. \quad (4)$$

Allgemein: die quadratischen Gleichung
$$a x^2 + b x + c = 0 \quad (5)$$

hat zwei Lösungen, gegeben durch die "Mitternachtsformel" :
$$\left.\begin{matrix}x_1 \\ x_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2a}\Big[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\Big] \quad (6)$$

Check:
$$a\left(\frac{1}{2a}\Big[-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\Big]\right)^2 + b\,\frac{1}{2a}\Big[-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\Big] + c \quad (7)$$

$$= \frac{1}{4a}\left(\cancel{b^2} \mp \cancel{2b\sqrt{}} + \cancel{b^2} - 4ac\right) - \cancel{\frac{b^2}{2a}} \pm \cancel{\frac{b}{2a}\sqrt{}} + c = 0 \checkmark \quad (8)$$

Fortsetzung Beispiel 4: Bestimmung der EV:

Eigenwertgleichung: $(\underline{\underline{A}} - \lambda_j \underline{\underline{I}})\vec{v}_j \overset{(f.4)}{=} 0 \qquad \forall\, j = 1,2$ (1)

Setze EW λ_j in EW-Gleichung (1) ein, löse resultierendes lineares Gl-System nach $\vec{v}_j$:

j=1: EV zu $\lambda_1 \overset{(h.4)}{=} 3$:

$(\underline{\underline{A}} - 3\underline{\underline{I}})\vec{v}_1 \overset{(1)}{=} \begin{bmatrix} 0-3 & -3 \\ 1 & 4-3 \end{bmatrix}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{v}_1 \overset{!}{\underset{(1)}{=}} \vec{0}$ (2)

(Zeilenvektoren sind offensichtlich linear abhängig)

Lösung von (2): z.B. (oder alle Vielfache) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (3)

Check: erfüllt (3) die EW-Gl. (1) ? $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \underset{(3)}{=} \lambda_1 \vec{v}_1$ ✓ (4)

j=2: EV zu $\lambda_2 \overset{(h.4)}{=} 1$:

$(\underline{\underline{A}} - 1\underline{\underline{I}})\vec{v}_2 \overset{(1)}{=} \begin{bmatrix} 0-1 & -3 \\ 1 & 4-1 \end{bmatrix}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\vec{v}_2 \overset{!}{\underset{(1)}{=}} \vec{0}$ (5)

(Zeilenvektoren sind offensichtlich linear abhängig)

Lösung von (4): z.B. (oder alle Vielfache) $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ (6)

Check: erfüllt (6) die EW-Gl. (1) ? $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \overset{(h.4)}{\underset{(6)}{=}} \lambda_2 \vec{v}_2$ ✓ (7)

Zusammenfassend: $\lambda_1 = 3$ hat EV $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, (1)

$\lambda_2 = 1$ hat EV $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. (2)

Konstruiere nun die Matrizen $\underline{\underline{S}}$ und $\underline{\underline{S}}^{-1}$, die $\underline{\underline{A}}$ diagonalisieren !

EV als Spalten: $\underline{\underline{S}} \overset{(d.4)}{=} \begin{array}{cc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ (3)

Inverse von $\underline{\underline{S}}$: $\underline{\underline{S}}^{-1} \overset{(5)}{=} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4)

Allgemein gilt für das Inverse einer 2x2-Matrix (siehe L5.4g.2):

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (5)

[alternativ: nutze Gauß-Verfahren!]

Check: $\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{I}}$ ✓ (6)

Check (e.1): $\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ (7)

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{(h.4)}{=} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Lambda}}$ ✓ (8)

Beispiel 5: 3x3 Matrix

Finde EW und EV der Matrix $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (1)

Charakteristisches Polynom:

$$P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \det\left[\underline{\underline{A}} - \lambda\,\underline{\underline{I}}\right] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) \quad (2)$$

Entwicklung nach Spalte 1 liefert sofort:

Nullstellen sind offensichtlich: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$ (3)

Eigenwertgleichung: $(\underline{\underline{A}} - \lambda_j \underline{\underline{I}})\,\vec{v}_j \overset{(e.6)}{=} 0 \qquad \forall\, j = 1, 2, 3$ (4)

Setze EW λ_j in EW-Gleichung (4) ein, löse resultierendes lineares Gl-System nach $\vec{v}_j$:

j=1: EV zu $\lambda_1 = 1$:

$$\vec{0} \overset{!}{=} (\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}})\,\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_1 \quad (5)$$

Lösung: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (oder Vielfache davon) (6)

j=2: EV zu $\lambda_2 = 3$:

$$\vec{0} \overset{!}{=} (\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{I}})\,\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{v}_2 \quad (1)$$

Lösung: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (oder Vielfache davon) (2)

j=3: EV zu $\lambda_3 = 2$:

$$\vec{0} \overset{!}{=} (\underline{\underline{A}} - \lambda_3 \underline{\underline{I}})\,\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_3 \quad (3)$$

Lösung: $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (oder Vielfache davon) (4)

EV als Spalten:

$$\underline{\underline{S}} \overset{(d.4)}{=} \begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5) \qquad \underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

via (L6n.2), oder Gauss-Verfahren, oder durch Ausprobieren!

Check: $\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (7)

Check (e.1):

$$\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Entarteter Unterraum

Def: hat das charakteristische Polynom eine m -fache Nullstelle bei λ_1 ,

$$P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) \propto (\lambda - \lambda_1)^m \times \ldots \qquad (1)$$

dann kommt derselbe Eigenwert λ_1 m mal vor und wird "m-fach entartet" genannt.

Falls m linear unabhängige EV mit demselben EW λ_1 existieren,

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \quad , \quad \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_j = \lambda_1 \vec{v}_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, m \qquad (2)$$

bilden sie eine Basis für einen m-dimensionalen "Eigenraum": $E_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ (3)

Jeder Vektor $\vec{v} = \sum_{k=1}^{m} \vec{v}_k a^k \in E_{\lambda_1}$ in diesem Eigenraum ist ebenfalls ein EV mit EW λ_1 (4)

Check: $$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} \overset{(4)}{=} \underline{\underline{A}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} \vec{v}_k a^k \right) = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_k}_{\overset{(2)}{=} \lambda_1 \vec{v}_k} a^k = \lambda_1 \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \vec{v}_k a^k}_{\overset{(4)}{=} \vec{v}} \qquad (5)$$

$\square$

Eine Orthonormalbasis für E_{λ_1} kann mittels Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, ausgehend von den Eigenvektoren $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$, konstruiert werden.
Alle Elemente dieser Basis sind selbst EV, mit EW λ_1 (6)

Bemerkung: Diagonalisieren nicht immer möglich:

Beispiel 6: $$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Charakt. Polynom: $$P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) \overset{(g.1)}{=} \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \underset{(g.2)}{\overset{!}{=}} 0 \qquad (2)$$

Nullstellen sind komplex: $\lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$ (3)

Diagonalisieren im Reellen nicht möglich (wohl aber im Komplexen).

Beispiel 7: $$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Charakt. Polynom: $$P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) \overset{(g.1)}{=} \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \underset{(g.2)}{\overset{!}{=}} 0 \qquad (5)$$

Doppelte Nullstelle: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ (6)

Nur ein Eigenvektor (statt zwei): $\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (7)

$\underline{\underline{A}}$ ist nicht diagonalisierbar, da das zwei linear unabhängige EW erfordern würde!

<u>Kriterien dafür, dass $\underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar ist:</u> siehe Lin. Algebra Vorlesung

Zur Kenntnisnahme: falls $\underline{\underline{A}}$ nicht diagonalisierbar ist, was kommt dem am nächsten?

Die "Jordan-Normalform":
Die einzigen nicht-Diagonalelemente liegen direkt über der Diagonale, und sind gleich 1. Die Diagonalelemente direkt links und direkt unter einer solchen 1 sind gleich.

z.B.:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Beispiel hierzu: siehe Altland-Delft-Text

<u>Zusammenfassung: L7.1 Diagonalisieren, Eigenwerte, Eigenvektoren</u>

Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$ Eigenwert Eigenvektor (1)

Bedingung an EW: $0 = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) := P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda)$ charakteristisches Polynom (2)

Für $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist $P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda)$ ein Polynom v. Grad n, mit n Nullstellen. (3)

diese entsprechen den n Eigenwerten v. $\underline{\underline{A}}$

Wenn EW λ_j bekannt ist, finde dazugehörigen EV $\vec{v}_j$ durch Lösen des linearen Gleichungsystems: $(\underline{\underline{A}} - \lambda_j \underline{\underline{I}}) \vec{v}_j = \vec{0}$ (4)

Falls n linear unabhängige EV existieren, wird $\underline{\underline{A}}$ diagonalisiert durch, $\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\Lambda}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (5)

wobei $\underline{\underline{S}}$ die EV als Spaltenvektoren hat: $\underline{\underline{S}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ (6)