L5.6 Symmetrische, hermitesche, orthogonale und unitäre Matrizen

(Abbildungen, die reelles bzw. komplexes Skalarprodukt invariant lassen)

In diesem Kapitel kommen Matrizen in Zusammenhang mit Skalarprodukt vor. In solchen Situationen ist es nützlich, alle Indizes unten zu schreiben.

Reelles inneres Produkt in $\mathbb{R}$-Vektorraum [siehe L3.1b]: 'reeller Vektorraum'

$$\langle \, , \, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (1)$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \qquad (2)$$

(i) Symmetrie: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (3)

(iii) Linearität bzgl. Skalarmultiplikation: $a \in \mathbb{R}$

$$\langle a\vec{u}, \vec{w} \rangle = a \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \qquad (4)$$

$$\langle \vec{u}, a\vec{w} \rangle = a \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \qquad (4')$$

(ii) Linearität bzgl. Vektoraddition: $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (5)

(iv) Positiv definit: $\vec{v} \neq \vec{0} \iff \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ (6)

'wenn, und nur wenn'

Reelles Skalarprodukt in Standardraum: $V = \mathbb{R}^n$, $\vec{v} = \hat{e}_j v_j$:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} \equiv \sum_j u_j v_j \qquad (7)$$

[Skalarprodukt: alle Indizes unten!]

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^{n} (u_j)^2 \geq 0 \qquad (8)$$

Skalarprodukt (reell) von transformierten Vektoren

Sei $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$, $(\underline{\underline{A}})_{ij} = a_{ij}$ $\qquad \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ mit $(A\vec{x})_i = a_{ij} x_j$ (1)

$\vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, $\qquad \vec{z} \longmapsto A\vec{z}$ mit $(A\vec{z})_i = a_{ij} z_j$ (2)

$$\langle \vec{z}, A\vec{x} \rangle = x_i (A\vec{x})_i = z_i a_{ij} x_j \equiv \vec{z} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \qquad (3)$$

$$\langle A\vec{z}, \vec{x} \rangle = (A\vec{z})_i x_i \overset{(2)}{=} a_{ij} z_j x_i = z_j a^T_{ji} x_i \equiv \vec{z} \cdot \underline{\underline{A}}^T \cdot \vec{x} \qquad (4)$$

Def: $a_{ij} \equiv a^T_{ji}$ (5) 'transponierte Matrix'

Def: "Transponierte v. A": $\underline{\underline{A}}^T \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$ (tausche von A die Zeilen und Spalten)

$$(\underline{\underline{A}}^T)_{ji} = a^T_{ji} \overset{!}{=} a_{ij} = (\underline{\underline{A}})_{ij} \qquad (6)$$

Beispiel: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

[sprich: A-transponiert]

Def: $\underline{\underline{A}} \in$ ist 'symmetrisch', falls $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$ (7) Beispiel: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Für symmetrische Matrizen gilt: $\langle \vec{z}, \underline{\underline{A}}\vec{x} \rangle \overset{(3,4)}{=} \langle \underline{\underline{A}}\vec{z}, \vec{x} \rangle$ (8)

Komplexes Skalarprodukt, in Standardraum: $\mathbb{C}^n$

L5.7c

$$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^T, \qquad u_i \in \mathbb{C} \tag{1}$$

Wie erreicht man Positivität? $u_i u_i \geq 0$ gilt nicht! (2)

Z.B: $\vec{u} = (1, 2i)^T$: $\quad 1\cdot 1 + (2i)(2i) = 1 - 4 = -3 < 0$ (3)

Definition: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{C}} \equiv \bar{u}_j v_j$ (4)

komplexe Konjugation, $i \to -i$
garantiert Positivität, siehe (5)

wird üblicherweise weggelassen

Positivität: $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathbb{C}} = \bar{u}_j u_j = \sum_{j=1}^{n} |u_j|^2 \geq 0$ (5)

Beispiel in $\mathbb{C}^2$:

$\vec{u} = (1, 2i)^T \qquad \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \bar{u}_1 u_1 + \bar{u}_2 u_2 = 1\cdot 1 + (-2i)(2i) = 5$ (7)

$\vec{v} = (3i, 1/2)^T \qquad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 = 1\cdot 3i + (-2i)\cdot 1/2 = 2i$ (8)

Verallgemeinerung für komplexe Vektorräume: komplexes inneres Produkt

L5.7d

Komplexes inneres Produkt
in $\mathbb{C}$ -Vektorraum:
'komplexer Vektorraum' [Anwendung: QM!]

$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ (1)

$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (2)

(i) Symmetrie (bis auf kompl. Konj.): $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$ (3)

$(i \to -i)$
komplexe Konjugation,

(iii) Linearität bzgl. Skalarmultiplikation: $\langle a\vec{u}, \vec{v} \rangle = \bar{a} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (4)

$a \in \mathbb{C}$ $\qquad \langle \vec{u}, a\vec{v} \rangle = a \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (4')

<u>keine</u> Konjugation

(ii) Linearität bzgl. Vektoraddition: $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (5)

(iv) Positiv definit: $\vec{v} \neq \vec{0} \iff \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ (6)

'wenn, und nur wenn'

Anmerkung: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \overset{(3)}{=} \overline{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \implies \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}$ (7)

Skalarprodukt (komplex) von transformierten Vektoren

[analog zu Seite 6b]

Sei $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)$, $(\underline{\underline{A}})_{ij} = a_{ij}$ $\quad \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ mit $(A\vec{x})_i = a_{ij} x_j$ (1)

$\vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{C}^n$, $\quad \vec{z} \mapsto A\vec{z}$ mit $(A\vec{z})_i = a_{ij} z_j$ (2)

$$\langle \vec{z}, A\vec{x} \rangle = \bar{z}_i (A\vec{x})_i = \bar{z}_i a_{ij} x_j \equiv \bar{\vec{z}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \quad (3)$$

$$\langle A\vec{z}, \vec{x} \rangle = \overline{(A\vec{z})_i} x_i \overset{(2)}{=} \overline{a_{ij}}\, \overline{z_j}\, x_i = \bar{z}_j a^{\dagger}_{ji} x_i \equiv \bar{\vec{z}} \cdot \underline{\underline{A}}^{\dagger} \cdot \vec{x} \quad (4)$$

Def: $\overline{a_{ij}} \equiv a^{\dagger}_{ji}$ (5) 'hermitesch konjugierte Matrix'

Def: "Hermitesch konjugierte v. A": (transponierte und komplex konjugierte version von A)

$$(\underline{\underline{A}}^{\dagger})_{ji} \equiv a^{\dagger}_{ji} \overset{!}{=} \bar{a}_{ij} = \overline{(\underline{\underline{A}})}_{ij} \quad (6)$$

[sprich: A-Kreuz, Englisch: A-dagger]

Beispiel: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & i2 & i3 \\ 4 & 5 & i6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{A}}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -i2 & 5 & 8 \\ -i3 & -i6 & 9 \end{pmatrix}$

Def: $\underline{\underline{A}} \in$ ist 'hermitesch', falls $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^{\dagger}$ (7) Beispiel: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & i2 & i3 \\ -i2 & 4 & 5 \\ -i3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Für hermitesche Matrizen gilt: $\langle \vec{z}, \underline{\underline{A}}\vec{x} \rangle \overset{(3,4)}{=} \langle \underline{\underline{A}}\vec{z}, \vec{x} \rangle$ (8)

und $\langle \vec{x}, \underline{\underline{A}}\vec{x} \rangle$ ist reell, denn $\overline{\langle \vec{x}, \underline{\underline{A}}\vec{x} \rangle} \overset{(d.3)}{=} \langle \underline{\underline{A}}\vec{x}, \vec{x} \rangle \overset{(8)}{=} \langle \vec{x}, \underline{\underline{A}}\vec{x} \rangle$ (9)

Verallgemeinerung für nicht-quadratische Matrizen:

Allgemeine komplexe Matrix: $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},m,n)$, $(\underline{\underline{A}})_{ij} = a_{ij}$ (1) Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & i5 & 6 \end{pmatrix}$

"Transponierte v. A":
(tausche Zeilen mit Spalten)

$$\underline{\underline{A}}^{T} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,m), \quad (\underline{\underline{A}}^{T})_{ji} = a^{T}_{ji} = a_{ij} = (\underline{\underline{A}})_{ij} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & i5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

"hermitesch konjugierte v. A":

$$\underline{\underline{A}}^{\dagger} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,m), \quad (\underline{\underline{A}}^{\dagger})_{ji} = \bar{a}^{T}_{ji} = \bar{a}_{ij} = (\bar{\underline{\underline{A}}})_{ij} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -i5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(transponiere und komplex konjugiere) (3)

[Falls $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{R},n,m)$: $A^{\dagger} = A^{T}$]

Eigenschaft:
[vergleiche (L5.6d)]

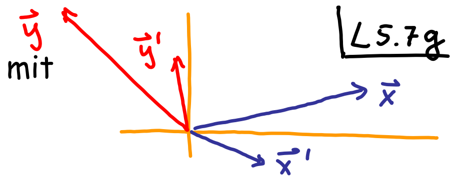
$$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{\dagger} = \underline{\underline{B}}^{\dagger} \cdot \underline{\underline{A}}^{\dagger} \quad (5)$$

Beweis: $\left(\sum_k a_{ik} b_{kj}\right)^{\dagger} = \left(\sum_k \bar{a}_{jk} \bar{b}_{ki}\right) = \left(\sum_k \bar{b}_{ki} \bar{a}_{jk}\right) = \left(\sum_k \bar{b}^{T}_{ik} \bar{a}^{T}_{kj}\right)$ (6)

Spezialisierung auf reelle Matrizen: $(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{T} = \underline{\underline{B}}^{T} \cdot \underline{\underline{A}}^{T}$ (7)

Unitäre und orthogonale Matrizen

Welche Abbildungen lassen das Skalarprodukt invariant?
(für diese sind auch Längen und Relativwinkel invariant)



Sei $\underline{\underline{A}} = \{a^i_{\ j}\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)$ $\quad \vec{x} = \{x\} \in \mathbb{C}^n \quad \vec{y} = \{y_i\} \in \mathbb{C}^n$ (1)

oder $\underline{\underline{A}} = \{a_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{R},n,n)$ [(2) ist Spezialfall von (1); wir betrachten somit zunächst (1), spezialisieren bei Bedarf später auf (2)] (2)

Sei $\vec{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}$ (3) explizit: $y_k \overset{(3)}{=} a_{ki}\, x_i$ (4)

$\vec{y}' = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}'$ (3') $\quad y'_k \overset{(3')}{=} a_{kj}\, x'_j$ (4')

Forderung: Skalarprodukt sei invariant: $\boxed{\langle \vec{y}, \vec{y}' \rangle \overset{!}{=} \langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle}$ (5)

$$\bar{y}_k\, y'_k \overset{(4,4')}{=} \bar{a}_{ki}\, \bar{x}_i\, a_{kj}\, x'_j = \bar{x}_i\, \underbrace{(\bar{a}^T_{ik}\, a_{kj})}\, x'_j \overset{!}{=} \bar{x}_i\, x'_i \quad (6)$$

Transposition: $a_{ki} = a^T_{ik}$ $\quad = (\underline{\underline{A}}^\dagger \cdot \underline{\underline{A}})_{ij} \overset{!}{=} \delta_{ij}$ (7)

Skalarprodukt ist invariant falls (7) ist erfüllt falls: $\boxed{\underline{\underline{A}}^\dagger \cdot \underline{\underline{A}} \overset{!}{=} \underline{\underline{\mathbb{1}}}}$ (8)

Kompaktversion des Arguments von Seite L5.6i: $\underline{\underline{A}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)$

Spaltenvektor: $\vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,1)$ $\quad$ Reihenvektor: $\vec{x}^\dagger \equiv (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ $\in \mathrm{mat}(\mathbb{C},1,n)$ (1)

Matrixmultiplikation

$$\langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\, x'_i \equiv \vec{x}^\dagger \cdot \vec{x}' = (\cdot\ \cdot\ \cdot)\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (2)$$

1xn Matrix $\quad$ nx1 Matrix

Analog: $\langle \vec{y}, \vec{y}' \rangle \overset{(2)}{=} \vec{y}^\dagger \cdot \vec{y}' = \underbrace{(\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x})^\dagger}_{(f.7):\ \vec{x}^\dagger \cdot \underline{\underline{A}}^\dagger} \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}') = \vec{x}^\dagger \cdot (\underline{\underline{A}}^\dagger \cdot \underline{\underline{A}}) \cdot \vec{x}'$ (3)

Forderung (i.5): $\langle \vec{y}, \vec{y}' \rangle \overset{!}{=} \langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle$ (4)

(3) $\quad$ (2)

$\Rightarrow \quad \vec{x}^\dagger \cdot (\underline{\underline{A}}^\dagger \cdot \underline{\underline{A}}) \cdot \vec{x} \overset{!}{=} \vec{x}^\dagger \cdot \vec{x}'$ (5)

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}}^\dagger \cdot \underline{\underline{A}} \overset{!}{=} \underline{\underline{\mathbb{1}}}$ [wie (g.6)] (6)

Für reelle Matrizen liefert (6):

$\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$ (7)

Verallgemeinerung: nicht-triviale Metrik [zur Kenntnisnahme]

L5.7b'

[also: unterscheide Indizes oben, unten!]

Sei $\langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle = \bar{x}^i g_{ij} x^j$ (1)

Sei $\vec{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}$ (2) explizit: $y^k = a^k{}_i x^i$ (3)

$\vec{y}' = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}'$ (2') $y'^\ell = a^\ell{}_j x'^j$ (3')

Forderung: Skalarprodukt sei invariant: $\langle \vec{y}, \vec{y}' \rangle \overset{!}{=} \langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle$ (4)

$\bar{y}^k g_{k\ell} y'^\ell = \bar{a}^k{}_i \bar{x}^i g_{k\ell} a^\ell{}_j x'^j = \bar{x}^i \left(a_i^{\dagger\,k} g_{k\ell} a^\ell{}_j \right) x'^j \overset{!}{=} \bar{x}^i g_{ij} x'^j$ (5)

Transposition:
vertausche Reihen/Spalten
linker/rechter Index

$\bar{a}^k{}_i \equiv a_i^{\dagger\,k}$ (6)

$(\underline{\underline{A}})^i{}_j = a^i{}_j$ (7) $(\underline{\underline{A}}^\dagger)_i{}^k \equiv a_i^{\dagger\,k} \equiv \bar{a}^k{}_i$ (8) $a_i^{\dagger\,k} g_{k\ell} a^\ell{}_j \overset{!}{=} g_{ij}$ (9)

Skalarprodukt ist invariant falls: $\boxed{\underline{\underline{A}}^\dagger \cdot \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{A}} \overset{!}{=} \underline{\underline{g}}}$ (10)

Für triviale Metrik, $g_{k\ell} = \delta_{k\ell}$, reduziert dies zu (g.8) $\underline{\underline{A}}^\dagger \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\mathbb{I}}}$ (11)

"Verstecke" Metrik durch runter/hochsetzen der Indizes [zur Kenntnisnahme]

L5.7b''

$\langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle \overset{(b'.1)}{=} \bar{x}^i g_{ij} x^j \equiv \bar{x}_j x^j$ (1) Inverse der Metrik: $g_{ij} (g^{-1})^{jm} = \delta_i{}^m$ (2)

mit $x_j \equiv x^i g_{ij}$ (3) $x_j (g^{-1})^{jm} = x^m$ (4)

"g zieht Index von oben nach unten" "g^{-1} zieht Index von unten nach oben"

Skalarprodukt ist
invariant falls: $a_i^{\dagger\,k} g_{k\ell} a^\ell{}_j \overset{(b'.9)}{=} g_{ij}$ (5)

$(5) \cdot (g^{-1})^{jm}$: $\underbrace{a_i^{\dagger\,k} g_{k\ell}}_{(6)\ \equiv\ a^\dagger_{i\ell}} \underbrace{a^\ell{}_j (g^{-1})^{jm}}_{(7)\ \equiv\ a^{\ell m}} = \underbrace{g_{ij} (g^{-1})^{jm}}_{(4)\ =\ \delta_i{}^m}$ (8) $\Rightarrow$ $\boxed{a^\dagger_{i\ell}\, a^{\ell m} = \delta_i{}^m}$ (9)

wobei wir die Metrik mittels runter/hochsetzen der Indizes von a " versteckt" haben:

$a_i^{\dagger\,k} g_{k\ell} = a^\dagger_{i\ell}$, (6) $a^\ell{}_j (g^{-1})^{jm} = a^{\ell m}$ (7)

"g zieht Index von oben nach unten" "g^{-1} zieht Index von unten nach oben"

Für triviale Metrik:

$g_{ij} = \delta_{ij}$: $x_j = x^j$, $a^\dagger_{i\ell} = a_i^{\dagger\,\ell} = \bar{a}^\ell{}_i = \bar{a}_{\ell i}$, $a^{\ell m} = a^\ell{}_m = a_{\ell m}$ (10)

Definition: Unitäre bzw. orthogonale Matrizen:

$\underline{\underline{D}} \in mat(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'unitär' falls $\quad \underline{\underline{D}}^{\dagger} \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (1) \overset{\text{(äquivalent)}}{\Longleftrightarrow} \quad \underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^{\dagger}$ (1)

$\equiv (\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_n)$, $\quad \vec{d}_j = \begin{bmatrix} D_{1j} \\ \vdots \\ D_{kj} \\ \vdots \\ D_{nj} \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{D}} \in mat(\mathbb{R}, n, n)$ ist 'orthogonal' falls $\quad \underline{\underline{D}}^{T} \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (1) \overset{\text{(äquivalent)}}{\Longleftrightarrow} \quad \underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^{T}$ (2)

$\equiv (\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_n)$

In Komponenten ausgeschrieben, für unitäre Matrix, Gl. (1):

$$(1)_{ij}: \quad \delta_{ij} = \mathbb{I}_{ij} \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} D^{\dagger}_{ik} D_{kj} \overset{(f.3)}{=} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\overline{D}_{ki}}_{\text{Spalte i v. } \overline{\underline{D}}} \underbrace{D_{kj}}_{\text{Spalte j v. } \underline{D}} \overset{(1)}{=} \vec{d}_i^{\,\dagger} \cdot \vec{d}_j = (\overline{\cdots}) \begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Matrixmultiplikation

Orthogonale Matrix (analog): $\quad \delta_{ij} = \vec{d}_i^{\,T} \cdot \vec{d}_j = (\cdots) \begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \end{pmatrix}$ (4)

Fazit: die Spaltenvektoren einer unitären oder orthogonalen Matrix bilden eine <u>orthonormierte Basis.</u> (Analog für Zeilenvektoren.)

Beispiele: $\quad c \equiv \cos\theta, \quad s \equiv \sin\theta, \quad c^2 + s^2 = 1$ (1)

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} c & is \\ is & c \end{bmatrix}$ ist unitär: $\quad \underline{\underline{A}}^{\dagger} = \begin{bmatrix} c & -is \\ -is & c \end{bmatrix}$ (2)

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{\dagger} = \begin{bmatrix} c & is \\ is & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -is \\ -is & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 + is(-is) & -cis + isc \\ isc + c(-is) & is(-is) + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ ist orthogonal: $\quad \underline{\underline{A}}^{T} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$ (4)

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{T} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 + (-s)^2 & cs - sc \\ sc + c(-s) & s^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Unitäre bzw. orthogonale Matrizen bilden Gruppen unter Matrixmultiplikation

'Unitäre Gruppe': $\mathcal{U}(n) = \{ \underline{\underline{D}} \in mat(\mathbb{C},n,n) \,;\; \underline{\underline{D}}^\dagger \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}} \}$ (1)

'Orthogonale Gruppe': $\mathcal{O}(n) = \{ \underline{\underline{D}} \in mat(\mathbb{R},n,n) \,;\; \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}} \}$ (2)

Gruppeneigenschaften (L1c) sind erfüllt: z.B. für unitäre Matrizen: (orthog. analog)

(i) Abgeschlossenheit:

Seien $\underline{\underline{D}}_1, \underline{\underline{D}}_2 \in mat(\mathbb{C},n,n)$ und unitär. Dann gilt dasselbe für $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_1 \cdot \underline{\underline{D}}_2$, denn:

$$\underline{\underline{D}}^\dagger \underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{D}}_1 \cdot \underline{\underline{D}}_2)^\dagger \cdot (\underline{\underline{D}}_1 \cdot \underline{\underline{D}}_2) \overset{(f.7)}{=} \underline{\underline{D}}_2^\dagger \cdot (\underline{\underline{D}}_1^\dagger \cdot \underline{\underline{D}}_1) \cdot \underline{\underline{D}}_2 \overset{(1)}{=} \underline{\underline{D}}_2^\dagger \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{D}}_2 \overset{(1)}{=} \underline{\underline{I}} \quad (3)$$

(i) Assoziativität: gilt für Matrixmultiplikation [siehe (L5o.1)]

(ii) Neutrales Element: $\underline{\underline{I}}$ ist unitär, $\underline{\underline{I}}^\dagger = \underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{I}}^\dagger \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}$ (4)

(iii) Inverse: Sei $\underline{\underline{D}} \in mat(\mathbb{C},n,n)$ und unitär. Dann gilt dasselbe für $\underline{\underline{D}}^{-1}$, denn:

$$(\underline{\underline{D}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{D}}^\dagger)^\dagger \overset{(i.1)}{=} (\underline{\underline{D}}^{-1})^T, \qquad \text{somit erfüllt } \underline{\underline{D}}^{-1} \text{ (i.1).} \quad (5)$$

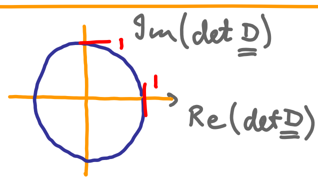
Determinanten von unitären und orthogonalen Matrizen

Allgemein:

$$\det \underline{\underline{D}}^T \overset{(L6i.2)}{=} \det \underline{\underline{D}} \quad (1)$$

$$\det \underline{\underline{D}}^\dagger = \det \overline{\underline{\underline{D}}}^T = \det \overline{\underline{\underline{D}}} = \overline{\det \underline{\underline{D}}} \quad (2)$$

Für unitäre Matrizen: $|\det \underline{\underline{D}}| = 1$ (3)



Beweis:

$$1 \overset{(L6h.5)}{=} \det(\underline{\underline{I}}) \overset{(1)}{=} \det(\underline{\underline{D}}^\dagger \underline{\underline{D}}) \overset{(L6p.6)}{=} (\underbrace{\det \underline{\underline{D}}^\dagger}_{\overset{(2)}{=}\ \overline{\det \underline{\underline{D}}}})(\det \underline{\underline{D}}) = |\det \underline{\underline{D}}|^2 \quad (4)$$

Beispiel: $\begin{vmatrix} c & is \\ is & c \end{vmatrix} = c^2 - (is)^2 = 1$ (6)

$$\Longrightarrow \quad |\det \underline{\underline{D}}| = 1 \quad (5)$$

Für orthogonale Matrizen: $\det \underline{\underline{D}} = \pm 1$ (7)

Beweis: analog zu (3), aber mit $\det \underline{\underline{D}} \in \mathbb{R}$ (8)

Beispiel: $\begin{vmatrix} c & -s \\ s & c \end{vmatrix} = c^2 - s(-s) = 1$ (9)

Orthogonale Matrizen mit $\det(\underline{\underline{D}}) = +1$ bilden eine Untergruppe von O(n): L5.7m

'spezielle orthogonale Gruppe': $SO(n) = \{ \underline{\underline{D}} \in mat(\mathbb{R},n,n) : \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}} ,\ \det \underline{\underline{D}} = 1 \}$ (1)

SO(n) ist 'Untergruppe' von O(n), also geschlossen:

denn falls $\left\{ \begin{array}{l} \det \underline{\underline{D}}_1 = 1 \\ \det \underline{\underline{D}}_2 = 1 \end{array} \right.$ gilt auch: $\det(\underline{\underline{D}}_1 \underline{\underline{D}}_2) = \underbrace{(\det \underline{\underline{D}}_1)}_{+1} \underbrace{(\det \underline{\underline{D}}_2)}_{+1} = 1$ (2)

SO(3)-Matrizen beschreiben '<u>Drehungen</u>' im Euklidischen Raum $\mathbb{E}^3$. Alle anderen Matrizen in O(3), d.h. alle mit $\det \underline{\underline{D}} = -1$, beinhalten auch <u>Spiegelungen.</u> (3)

Beispiel: Spiegelung in $\mathbb{R}^3$: $S = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$, $\det S = (-1)^3 = -1$ (4)

Unitäre Matrizen mit $\det(\underline{\underline{D}}) = +1$ bilden eine Untergruppe von U(n):

'spezielle unitäre Gruppe': $SU(n) = \{ \underline{\underline{D}} \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \underline{\underline{D}}^\dagger \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}} ,\ \det \underline{\underline{D}} = 1 \}$ (5)

Anwendung SU(2): QM-Theorie des Drehimpuls

L7.3 Diagonalisierung v. symmetrischen und hermiteschen Matrizen L7.2a

Def: (L5.6b.7) $\underline{\underline{A}} \in mat(\mathbb{C},n,n)$ oder $mat(\mathbb{R},n,n)$ ist 'symmetrisch', falls

$$\underline{\underline{A}}^T \stackrel{!}{=} \underline{\underline{A}} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (\underline{\underline{A}})_{ij} \equiv (\underline{\underline{A}}^T)_{ji} \stackrel{!}{=} (\underline{\underline{A}})_{ji} \qquad (2)$$

Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Def: (L5.6e.7) $\underline{\underline{A}} \in mat(\mathbb{C},n,n)$ ist 'hermitesch', falls

$$\underline{\underline{A}}^\dagger \stackrel{!}{=} \underline{\underline{A}} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \overline{(\underline{\underline{A}})}_{ij} \equiv (\underline{\underline{A}}^\dagger)_{ji} \stackrel{!}{=} (\underline{\underline{A}})_{ji} \qquad (5)$$

Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & +2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Eigenschaften von hermiteschen (also auch von symmetrischen reellen) Matrizen:
- immer diagonalisierbar;
- alle Eigenwerte sind reell;
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal
- diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation ist unitär (bzw. orthogonal)

Satz 1: Für hermitesche Matrizen sind alle EW reell. (1) L7.2b

Beweis: EW-Gleichung: $\underline{\underline{A}}\,\vec{v}_i = \vec{v}_i\,\lambda_i$ [hier keine ES !] (2)

$\langle \vec{v}_i, (1)\rangle$ $\underbrace{\langle \vec{v}_i, \underline{\underline{A}}\,\vec{v}_i\rangle}_{\text{(L5.6e.9)} \to \text{reell}} \overset{(1)}{=} \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i\lambda_i\rangle \underset{\text{(L5.6d.4')}}{=} \underbrace{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i\rangle}_{\text{reell (L5.6d.7)}}\lambda_i \Rightarrow \lambda_i = \bar{\lambda}_i$ auch reell !! (3) $\square$

Satz 2: Für hermitesche Matrizen sind die EV zu verschiedenen EW orthogonal. (4)

Beweis: Sei $\underline{\underline{A}}\,\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$, (5) $\underline{\underline{A}}\,\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j$, (6) mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ (7)

$\langle \vec{v}_j, (5)\rangle$: $\langle \vec{v}_j, \underline{\underline{A}}\,\vec{v}_i\rangle \overset{(5)}{=} \langle \vec{v}_j, \lambda_i\vec{v}_i\rangle \overset{\text{(L5.6d.4')}}{=} \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i\rangle\lambda_i$ (8)

(L5.6e.8)

$= \langle \underline{\underline{A}}\,\vec{v}_j, \vec{v}_i\rangle \overset{(6)}{=} \langle \lambda_j\vec{v}_j, \vec{v}_i\rangle \overset{\text{(L5.6d.4)}}{=} \bar{\lambda}_j\langle \vec{v}_j, \vec{v}_i\rangle \overset{(3)}{=} \lambda_j\langle \vec{v}_j, \vec{v}_i\rangle$ (9)

(8) − (9) = 0 : $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_i\rangle(\lambda_i - \lambda_j) = 0$ (10) $\Longrightarrow$ $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_i\rangle = 0$ (11)

Sätze 1 & 2 gelten insbesondere auch für symmetrische, reelle Matrizen; (12)
für die folgt aus (1) & (3) auch, dass EV rein reell sind, $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ (13)

Satz 3: Alle hermiteschen Matrizen sind diagonalisierbar (1) L7.2c
(gilt insbesondere auch für alle reelle, symmetrischen Matrizen)

Sei $\underline{\underline{A}}\cdot\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$ eine Lösung des EW-Problems für A (2)

Sei $V_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \langle \vec{x}, \vec{v}_1\rangle = 0\}$ der Unterraum orthogonal zu $\vec{v}_1$ (3)
$\dim(V_1) = n-1$

Sei $\vec{x} \in V_1$, dann ist auch $\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x} \in V_1$ (4) in diesem Unterraum,

denn: $\langle \underline{\underline{A}}\cdot\vec{x}, \vec{v}_1\rangle \overset{\text{(L5.6e.8)}}{=} \langle \vec{x}, \underline{\underline{A}}\,\vec{v}_1\rangle = \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{v}_1\rangle}_{(3)\,=0}\lambda_1$ (5)

Wähle als Basis für V: $\{\vec{v}_1, \underbrace{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-1}}\}$, mit $\langle \vec{v}_1, \vec{f}_j\rangle \overset{(3)}{=} 0$ (5)
sei Basis für V1

In dieser Basis
hat A die Form $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \underline{\underline{A}}_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$, (6)

denn wegen (4) werden
die Unterräume
$\mathrm{span}\{\vec{v}_1\}$ und $\mathrm{span}\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-1}\}$
von A 'nicht verbunden'.

mit Matrix-Elementen $\{a'_{ij}\}$, $i,j = 1,\dots,n-1$

L7.2d

Warum? Allgemein gilt: falls $\{\vec{w}_j\}$ eine Basis ist, und $\underline{\underline{A}}\,\vec{w}_j = \vec{w}_i\, a_{ij}$ (1)

dann hat A in dieser Basis die Darstellung

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \vdots & \boxed{a_{1j}} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nj} & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) \quad (2)$$

$\vec{a}_j$ = Bild von $\vec{w}_j$

Aktuell:

$$\underline{\underline{A}}\cdot\vec{v}_1 \overset{(c.2)}{=} \lambda_1 \vec{v}_1 = \vec{v}_i\,(\lambda_1 \delta_{i1}) \quad (3)$$

also erste Spalte v. A $\quad \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (4)

$$\underline{\underline{A}}\cdot\vec{f}_j = \vec{v}_1\cdot 0 + \sum_{i=1}^{n-1} \vec{f}_i\; a'_{ii} \quad (5)$$

$(j = 1, \dots, n-1)$

wegen (c.4), mit $\vec{v}_1 \in V_1$

also haben alle anderen Spalten die Form $\quad \vec{a}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{ij} \end{bmatrix}$ (6)

(4) & (6) $\Longrightarrow$ (c.6)

Iteriere: sei $\underline{\underline{A}}_1 \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$

eine Lösung des EW-Problems für A_1 $\xRightarrow[\text{Argumentation}]{\text{analoge}}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & \vdots\, 0 & \underline{\underline{A}}_2 & \end{bmatrix} \quad (8)$$

usw. usf. Auf diese Weise findet man eine Basis von n orthogonale EW, in der A diagonal ist:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

Normiere EW $\Longrightarrow$ liefert Orthonormalbasis v. EW ! $\square$

L7.2e

Fazit: für hermitesche Matrizen $\underline{\underline{A}} \in (\mathbb{C}, n, n)$ können die n EV, $\vec{v}_j,\ j = 1, \dots, n$ so gewählt werden, dass sie eine <u>Orthonormalbasis</u> für $\mathbb{C}^n$ bilden:

$$\delta_{ij} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle \quad (1)$$

Sei nun S die Matrix mit EV als <u>Spalten</u>vektoren:

$$\underline{\underline{S}} \equiv (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_n) = \begin{bmatrix} v_{11} & \vdots & \boxed{v_{1j}} & \vdots & v_{1n} \\ v_{k1} & \vdots & v_{kj} & \vdots & v_{kn} \\ v_{n1} & \vdots & v_{nj} & \vdots & v_{nn} \end{bmatrix} \equiv \{v_{kj}\} \quad (2)$$

Eigenvektor j

Dann ist S unitär, denn:

$$\delta_{ij} \overset{(1)}{=} \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{v}_{ki} v_{kj} = \sum_{k=1}^{n} v^{\dagger}{}_{ik} v^{k}{}_j = (S^\dagger \cdot S)_{ij} \quad (3) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S}}^\dagger \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (4)$$

Aber, es gilt auch:

$$\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} \overset{(L7.1e.1)}{=} \underline{\underline{\Lambda}} \quad (6) \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^{\dagger} \quad (5)$$

Folglich wird A durch <u>unitäre</u> Transf. diagonalisiert:

$$\underline{\underline{S}}^\dagger \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} \overset{(5,6)}{=} \underline{\underline{\Lambda}} \quad (7)$$

Analog: für reelle symmetrische Matrix sind EV rein reell, somit: $\underline{\underline{S}}^\dagger = \underline{\underline{S}}^T$ (8)

wird also durch <u>orthogonale</u> Transf. (<u>Drehungen</u>) diagonalisiert, $\underline{\underline{S}} \equiv \underline{\underline{D}}$:

$$\underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\Lambda}} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\mathbb{I}}} \quad (9)$$

(e.4) explizit:

$$\underline{\underline{S}} \equiv (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_n) = \begin{bmatrix} v_{11} & \vdots & \boxed{v_{1j}} & \vdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ v_{k1} & & v_{kj} & & v_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & & v_{nj} & & v_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Eigenvektor j

L7.2f

$$\underline{\underline{S}}^\dagger = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^{\,\dagger} \\ \vdots \\ \vec{v}_i^{\,\dagger} \\ \vdots \\ \vec{v}_n^{\,\dagger} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{11} \cdots \bar{v}_{k1} \cdots \bar{v}_{n1} \\ \hline \boxed{\bar{v}_{1i} \cdots \bar{v}_{ki} \cdots \bar{v}_{ki}} \\ \hline \bar{v}_{1n} \cdots \bar{v}_{kn} \cdots \bar{v}_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Eigenvektor i

$$\Big(\underset{(2)}{\underline{\underline{S}}^\dagger} \cdot \underset{(1)}{\underline{\underline{S}}}\Big)_{ij} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^{\,\dagger} \\ \vdots \\ \vec{v}_i^{\,\dagger} \\ \vdots \\ \vec{v}_n^{\,\dagger} \end{bmatrix} \cdot (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_n) = \begin{bmatrix} \bar{v}_{11} \cdots \bar{v}_{k1} \cdots \bar{v}_{n1} \\ \hline \boxed{\bar{v}_{1i} \cdots \bar{v}_{ki} \cdots \bar{v}_{ki}} \\ \hline \bar{v}_{1n} \cdots \bar{v}_{ki} \cdots \bar{v}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} & \vdots & \boxed{v_{1j}} & \vdots & v_{1n} \\ v_{k1} & & v_{kj} & & v_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & & v_{nj} & & v_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$= \begin{bmatrix} & & \vdots & & \\ \cdots & \Big(\sum_k \bar{v}_i^k v_j^k & & \cdots \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \overset{(e.1)}{=} (\delta_{ij}) = (\underline{\underline{I}})_{ij} \qquad (4)$$

Fazit: Diagonalisierung einer hermiteschen Matrix: $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sei ein Satz von orthonormierten EV der Matrix $\underline{\underline{A}}$, mit zugehörigen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

L7.2g

$\underline{\underline{A}}$ wird durch folgende "Ähnlichkeitstransformation" "diagonalisiert":

$$\underline{\underline{S}}^\dagger \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^{\,\dagger} \\ \vdots \\ \vec{v}_n^{\,\dagger} \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \overset{(e.7)}{=} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Lambda}} \qquad (1)$$

herm. konjugierte EV als Zeilenvektoren

EV als Spalten-vektoren

Analog für symmetrische, reelle Matrizen, mit $\underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\Lambda}}$ (2)

Transponierte EV als Zeilenvektoren

EV als Spalten-vektoren

Anmerkung: reelle symmetrische Matrizen und hermitesche Matrizen finden in der Physik sehr viele Anwendungen:

- kleine Schwingungen um Gleichgewichtslage: EV liefern "Normalmoden", EW deren charakteristische Frequenzen.

- Quantenmechanik: Observablen werden durch "hermitesche Operatoren", salopp gesagt, "hermitesche Matrizen", beschrieben. Eigenwerte des Hamilton-Operators (Energie-Operators) liefern die "Eigenenergien" eines Quantensystems.

Beispiel: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ (1)

Ch. Polynom: $P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$ (2)

Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$ (3)

EV 1: $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, (4) Check: $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + i\cdot i \\ -i\cdot 1 + 1\cdot i \end{pmatrix} = 0$ (5)

EV 2: $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, (6) Check: $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + i\cdot(-i) \\ -i\cdot 1 + 1\cdot(-i) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 2\vec{v}_2$ (7)

Ähnlichkeitstranformation: $\underline{\underline{S}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{cc} \scriptstyle \vec{v}_1\,(4) & \scriptstyle (6)\,\vec{v}_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{S}}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$, (8)

Check: $\underline{\underline{S}}^{\dagger} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$ (9)

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ✓ (10)

(7) $2\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$

(5) $0 \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$

Zusammenfassung: L5.6 Symmetrische und hermitesche Matrizen

Reelles Skalarprodukt: $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_i v^i, \quad u_i, v_i \in \mathbb{R}$ (1)

Komplexes Skalarprodukt: $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{u}_i v^i, \quad u_i, v_i \in \mathbb{C}$ (2)

Komplexe Matrix: $\underline{\underline{A}} = \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

Transponierte $\underline{\underline{A}}^T \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, m)$

hermitesch Konjugierte: $\underline{\underline{A}}^{\dagger} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, m)$, (3)

$(\underline{\underline{A}})_{ij} = a_{ij}$ $\quad (\underline{\underline{A}}^T)_{ji} = a^T_{ji} \equiv a_{ij} = (\underline{\underline{A}})_{ij}$ $\quad (\underline{\underline{A}}^{\dagger})_{ji} = \overline{a}^T_{ji} \equiv \overline{a}_{ij} = (\overline{\underline{\underline{A}}})_{ij}$ (4)

$\underline{\underline{A}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'symmetrisch', falls $\underline{\underline{A}}^T \stackrel{!}{=} \underline{\underline{A}} \Rightarrow (\underline{\underline{A}})_{ij} \equiv (\underline{\underline{A}}^T)_{ji} \stackrel{!}{=} (\underline{\underline{A}})_{ji}$ (5)

Für symmetrische Matrizen gilt: $\langle \vec{z}, \underline{\underline{A}}\vec{x} \rangle = \langle \underline{\underline{A}}\vec{z}, \vec{x} \rangle$ (6)

$\underline{\underline{A}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'hermitesch', falls $\underline{\underline{A}}^{\dagger} \stackrel{!}{=} \underline{\underline{A}} \Rightarrow (\overline{\underline{\underline{A}}})_{ij} \equiv (\underline{\underline{A}}^{\dagger})_{ji} \stackrel{!}{=} (\underline{\underline{A}})_{ji}$ (7)

Für <u>hermitesche</u> Matrizen gilt: $\langle \vec{z}, \underline{\underline{A}}\vec{x} \rangle = \langle \underline{\underline{A}}\vec{z}, \vec{x} \rangle$ und $\langle \vec{x}, \underline{\underline{A}}\,\vec{x} \rangle$ (8)

<u>Zusammenfassung: L5.6 Orthogonale und unitäre Matrizen</u> ZL5.7b

$mat(\mathbb{R},n,n) \ni \underline{\underline{D}}$ ist 'orthogonal' falls $\underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}} \stackrel{(\text{äquivalent})}{\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}} \underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^T$ (1)

Reelles Skalarprodukt invariant: $\langle \underline{\underline{D}} \cdot \vec{u}, \underline{\underline{D}}\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (2)

$mat(\mathbb{C},n,n) \ni \underline{\underline{U}}$ ist 'unitär' falls $\underline{\underline{D}}^\dagger \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}} \stackrel{(\text{äquivalent})}{\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}} \underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^\dagger$ (3)

Komplexes Skalarprodukt invariant: $\langle \underline{\underline{D}} \cdot \vec{u}, \underline{\underline{D}}\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (4)

Spalten (oder Zeilen-)vektoren einer unitären oder orthogonalen Matrix bilden eine <u>orthonormierte Basis.</u> $\underline{\underline{D}} = (\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_n)$ $\quad \vec{d}_i^{\,\dagger} \cdot \vec{d}_j = \delta_{ij}, \quad \vec{d}_i^{\,T} \cdot \vec{d}_j = \delta_{ij}$ (5)

'Unitäre Gruppe': $\mathcal{U}(n) = \{ \underline{\underline{D}} \in mat(\mathbb{C},n,n) ; \ \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^\dagger = \underline{\underline{I}} \}$ (6)

'Orthogonale Gruppe': $\mathcal{O}(n) = \{ \underline{\underline{D}} \in mat(\mathbb{R},n,n) ; \ \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}} \}$ (7)

'spezielle orthogonale Gruppe': $S\mathcal{O}(n) = \{ \underline{\underline{D}} \in mat(\mathbb{R},n,n) : \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}}, \ \det \underline{\underline{D}} = 1 \}$ (8)

'spezielle unitäre Gruppe': $S\mathcal{U}(n) = \{ \underline{\underline{D}} \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \underline{\underline{D}}^\dagger \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}}, \ \det \underline{\underline{D}} = 1 \}$ (9)

<u>Zusammenfassung: L7.2 Diagonalisierung v. symm. und hermiteschen Matrizen</u> ZL7.2

$\underline{\underline{A}} \in mat(\mathbb{C},n,n)$ (oder $\mathbb{R}$) ist 'symmetrisch', falls $\underline{\underline{A}}^T \stackrel{!}{=} \underline{\underline{A}} \Leftrightarrow (\underline{\underline{A}})_{ij} = (\underline{\underline{A}}^T)_{ji} \stackrel{!}{=} (\underline{\underline{A}})_{ji}$ (1)

$\underline{\underline{A}} \in mat(\mathbb{C},n,n)$ ist 'hermitesch', falls $\underline{\underline{A}}^\dagger \stackrel{!}{=} \underline{\underline{A}} \Leftrightarrow (\overline{\underline{\underline{A}}})_{ij} = (\underline{\underline{A}}^\dagger)_{ji} \stackrel{!}{=} (\underline{\underline{A}})_{ji}$ (2)

Für alle hermiteschen (insb. auch für alle reelle symmetrischen) Matrizen gilt:

- sie sind immer diagonalisierbar
- alle Eigenwerte sind reell: $\lambda = \bar{\lambda}$ (3)
- es lässt sich immer eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren finden
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal: $(\lambda_2 - \lambda_1) \langle \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 \rangle = 0$ (4)

Für $\left\{ \begin{array}{l} \text{hermitesche} \\ \text{reell symmetrische} \end{array} \right\}$ Matrizen ist $\underline{\underline{S}}$ $\left\{ \begin{array}{ll} \text{unitär:} & \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^\dagger \quad (5) \\ \text{orthogonal:} & \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^T \quad (6) \end{array} \right.$