# C5 Funktionen: Reihenentwicklungen

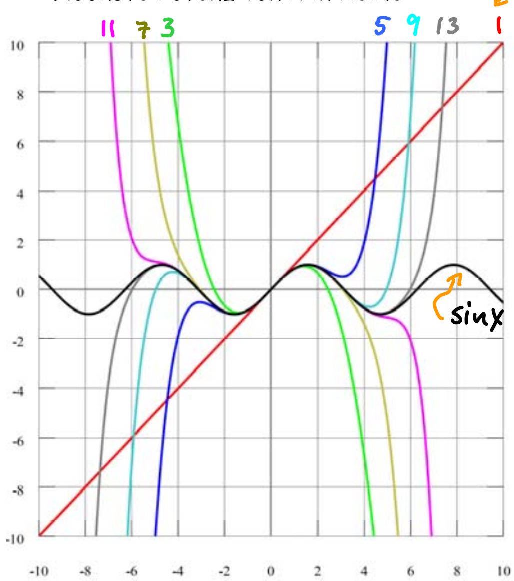
## C5.1 Taylor-Reihen

Brook Taylor
(1685-1731)

C5.1a

(Analysis-Vorlesung: Konvergenz von Reihen und Folgen)

Grundlegende Frage: Wann / unter welchen Voraussetzungen lässt sich eine gegebene Funktion durch eine Potenzreihe darstellen oder annähern?
Und wozu ist das nützlich?




### Beispiel 1: Geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{konvergent falls } |x| < 1 \qquad (1)$$

[Beweis: weiter unten]

### Beispiel 2: Sinus-Funktion

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad (2)$$

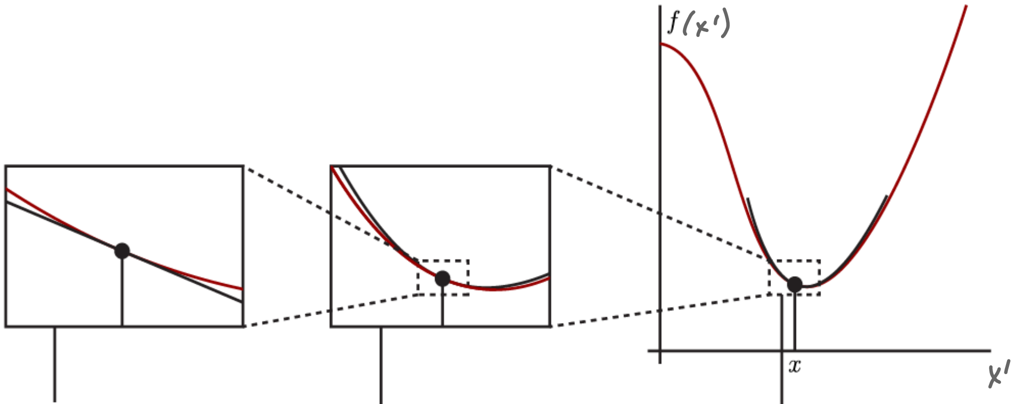
konvergent für alle $x \in \mathbb{C}$

C5.1b

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine allgemeine ("gutmütige") Funktion. Frage: kann man sie in der Nähe des Punktes $x$ darstellen mittels einer Potenzreihe in $\Delta x = x' - x$ ?

$$f(x') \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x'-x)^n \qquad (1)$$

Potenzen von (x'-x)
x'-unabhängige Koeffizienten




$f(x') \simeq f(x) + c_1(x - x')$

$f(x') \simeq f(x) + c_1(x - x') + c_2(x - x')^2$

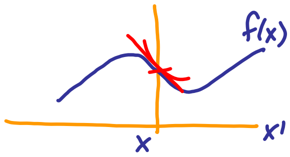
$f(x') \simeq f(x) + c_1(x - x') + c_2(x - x')^2 + c_3(x - x')^3$

Wir wissen bereits, aus Diskussion der 'Ableitung' einer Funktion: C5.1c

Für x genügend klein gilt: $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\, f'(x), \quad |\Delta x| \ll 1$ (1)

$x' \equiv x + \Delta x$ : $\quad f(x') = f(x) + (x'-x)\, f'(x), \quad |x'-x| \ll 1$ (2)

In (b.1) ist jedoch die Absicht / Hoffnung, einen Ausdruck für f(x') zu bekommen, der nicht nur für $|x'-x| \ll 1$ gilt!




Bestimmung der Koeffizienten $c_n$ :

Grundidee: wähle die $c_n$ so, dass sich $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x')^n$ möglichst eng an $f(x')$ "anschmiegt", d.h. dass alle Ableitungen beider Funktionen bei $x' = x$ gleich sind.

Bestimmung von $c_0$:

$$f(x') \overset{(b.1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x'-x)^n = c_0 \overbrace{(x'-x)^0}^{=1} + c_1(x'-x)^1 + c_2(x'-x)^2 + \dots \tag{3}$$

Setze $x'=x$ : $\Rightarrow$ $\quad f(x) \overset{(3)}{=} c_0 + \underbrace{c_1(x-x)^1}_{=0} + \underbrace{c_2(x-x)^2}_{=0} + \underbrace{\dots}_{=0}$ (4)

(nur n=0 trägt bei)

$$\Rightarrow \quad c_0 = f(x) \tag{5}$$

Bestimmung von $c_1$: C5.1c'

Gliedweises Differenzieren von f(x'): (!?! macht nur Sinn, falls Reihe (b.1) konvergiert!)

$$\frac{df(x')}{dx'} \equiv f'(x') \overset{(c.3)}{=} \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} n\, c_n (x'-x)^{n-1} = \cancel{c_0} + 1\cdot c_1 \cdot \underbrace{(x'-x)^{1-1}}_{=1} + 2\cdot c_2\cdot(x'-x)^{2-1} + \dots \tag{1}$$

(Beitrag mit n = 0 fällt weg)

$$= c_1 + 2c_2(x'-x) + 3c_3(x'-x)^2 + \dots \tag{2}$$

Setze $x'=x$ : $\Rightarrow$ $\quad f'(x) \overset{(2)}{=} c_1 + 2\cdot c_2\cdot \underbrace{(x-x)^1}_{=0} + 3c_3\underbrace{(x-x)^2}_{=0} + \dots = c_1$ (3)

(nur n=1 trägt bei)

Bestimmung von $c_2$: Gliedweises Differenzieren von f'(x'):

$$\frac{d^2 f(x')}{dx'^2} \equiv f''(x') \overset{(1)}{=} \sum_{n=\cancel{1}\,2}^{\infty} (n-1)\,n\, c_n (x'-x)^{n-1-1} \overset{(2)}{=} \cancel{c_1} + 1\cdot 2\cdot c_2 \underbrace{(x'-x)^{1-1}}_{=1} + 2\cdot 3\cdot c_3 (x'-x)^{2-1} + \dots \tag{4}$$

(Beitrag mit n = 1 fällt weg)

$$= 1\cdot 2\cdot c_2 + 2\cdot 3\cdot c_3 (x'-x)^1 + \tag{5}$$

Setze $x'=x$ : $\Rightarrow$ $\quad f''(x) = 1\cdot 2\cdot c_2 + 2\cdot 3\cdot c_3 \underbrace{(x-x)^1}_{=0} + \dots = 2\cdot c_2$

(nur n=2 trägt bei)

Zusammengefasst: C5.1 d

$$f(x')\Big|_{x'=x} = c_0 + c_1(\cancel{x'-x})^1 + c_2(\cancel{x'-x})^2 + c_3(\cancel{x'-x})^3 + \dots \qquad (1)$$

$$f'(x')\Big|_{x'=x} = \cancel{c_0} + 1\cdot c_1\underbrace{(x'-x)^{1-1}}_{=1} + 2\cdot c_2(\cancel{x'-x})^{2-1} + 3c_3(\cancel{x'-x})^{3-1} + \dots \qquad (2)$$

$$f''(x')\Big|_{x'=x} = \cancel{c_0} + \cancel{c_1(x'-x)^1} + 1\cdot 2\cdot c_2\underbrace{(x'-x)^{2-2}}_{=1} + 2\cdot 3\, c_3(\cancel{x'-x})^{3-2} + \dots \qquad (3)$$

Per Induktion gilt für allgemeines n:
$$\frac{d^n f(x')}{dx'^n}\Big|_{x'=x} = f^{(n)}(x) = 1\cdot\ldots(n-1)\cdot n\, c_n = n!\, c_n \qquad (4)$$

$$\Big[\ \text{n Fakultät:} \quad n! \equiv n(n-1)(n-2)\ldots 1 \ , \quad 0! \equiv 1 \ \Big] \qquad (5)$$
per Definition

$$\Longrightarrow \quad c_n \overset{(4)}{=} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \qquad (6)$$

'Taylor-Reihe' v. f(x') um den Punkt x, in Potenzen von (x'-x):
$$f(x') \overset{(b.1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x'-x)^n \overset{(6)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x'-x)^n f^{(n)}(x) \qquad (7)$$

---

<u>Beispiel: Exponentialfunktion</u> $\quad f(x) = \exp(x) \equiv e^x \qquad (1)$ C5.1e

Definierende Eigenschaften:
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \quad (1), \qquad e^0 = 1 \qquad (2)$$

$$f'(x) = e^x \quad (3),$$

$$f''(x) = e^x \quad (4),$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad (5),$$

(d.7):
$$f(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x'-x)^n f^{(n)}(x) \qquad (6)$$

(5) in (d.7):
$$e^{x'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x'-x)^n e^x \qquad (7)$$

für x = 0:
$$e^{x'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x'^n \qquad (8)$$
[ diese Reihe ist überall im Komplexen konvergent, d.h. für alle $x' \in \mathbb{C}$ ]

(8) kann als alternative <u>Definition</u> der Exp-Funktion aufgefasst werden.

(8) impliziert (1):
$$\frac{d}{dx'}e^{x'} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{n!}}_{=\frac{1}{(n-1)!}} x'^{n-1} \overset{n-1=m}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x'^m = e^x \ \Rightarrow (1) \qquad (9)$$

## Exponentialfunktion, genähert durch die ersten N+1 Terme der Taylor-Reihe:

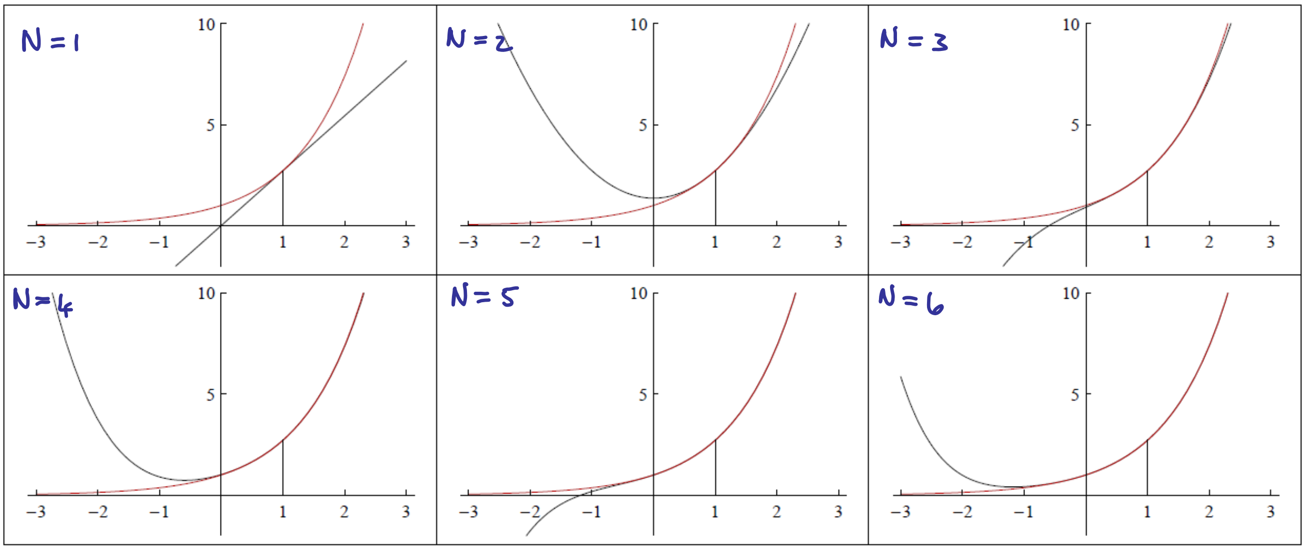
C5.1f

Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion um x = 1:

$$e^{x'} = e^{x'-1+1} = e^{x'-1}\cdot e^{1} \qquad (1)$$

$$= e^{1}\cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(x'-1)^n = e^{1}\left[1 + (x'-1) + \frac{1}{2!}(x'-1)^2 + \frac{1}{3!}(x'-1)^3 + \dots\right]$$

falls $N \neq \infty$ ist dies eine Näherung




## Nochmal Beispiel 1 v. Seite C5.1a: (jetzt explizit)

C5.1g

Sei: $$f(x) \equiv \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \qquad (1)$$

Für Taylor-Reihe um x = 0 benötigen wir laut (d.6):

$$f'(x) = \underbrace{-(-1)}_{1}(1-x)^{-1-1} = 1\cdot(1-x)^{-2} \Rightarrow \overset{x=0}{f'(0)} = 1 \qquad (2)$$

$$f''(x) = \underbrace{-(-2)\,1}_{2!}\cdot(1-x)^{-2-1} = 2!\,(1-x)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 2! \qquad (3)$$

$$f'''(x) = \underbrace{-(-3)\,2!}_{3!}\,(1-x)^{-3-1} = 3!\,(1-x)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = 3! \qquad (4)$$

$$f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n! \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} \overset{(d.7)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{\cancel{f^{(n)}(0)}}^{(5)\ =n!}}{\cancel{n!}}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (= a.1) \qquad (6)$$

diese Entwicklung heißt 'geometrische Reihe'

(6) gilt nur für $|x| < 1$ Man sagt, der 'Konvergenzradius' dieser Reihe ist 1

**Pathologisches Beispiel** (zur Kenntnisnahme)

C5.1h

$$f(x) = e^{-1/x^2} \qquad (1)$$

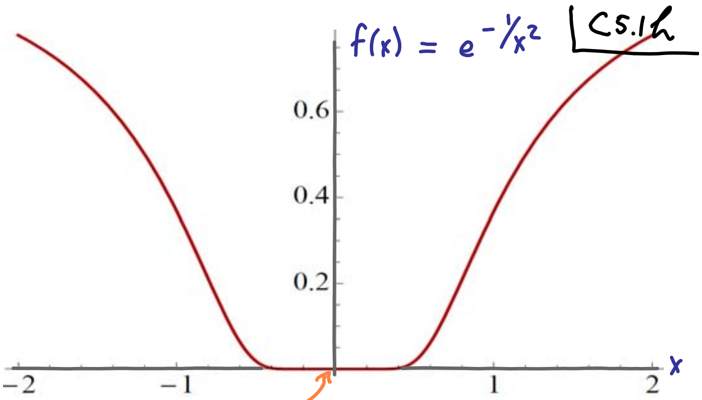
$$f(0) = e^{-\infty} = 0 \qquad (2)$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right) \qquad (3)$$

$$f'(0) = e^{-\infty}\left(\frac{2}{0}\right) = 0 \qquad (4)$$

Analog:

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad (5)$$




hier ist die Funktion 'unendlich flach', d.h., alle Ableitungen verschwinden: $f^{(n)}(0) = 0$

Folgt daraus, dass $f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \underbrace{f^{(n)}(0)}_{=0} = 0$ ?!! (6)

Antwort: nein, denn $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-1/z^2}$ betrachtet als Funktion einer <u>komplexen</u> Variable, $z = x+iy$ ist <u>nicht</u> differenzierbar bei z = 0 :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left[f(z+\Delta z) - f(z)\right] \qquad (7)$$

C5.1i

Für z= 0, betrachte einerseits,

i) $\Delta z = \delta$ , $\delta \in \mathbb{R}$ : (1)

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left[f(\Delta z) - \underbrace{f(0)}_{=0}\right] \qquad (2)$$

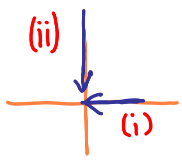
$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} e^{-\frac{1}{\delta^2}} \propto \underset{=0}{e^{-\infty}} \qquad (3)$$

andrerseits:

ii) $\Delta z = i\delta$ , $\delta \in \mathbb{R}$ (1')

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left[f(\Delta z) - \underbrace{f(0)}_{=0}\right] \qquad (2')$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{i\delta} e^{-\frac{1}{(i\delta)^2}} \propto \underset{=\infty}{e^{+\infty}} \qquad (3)$$



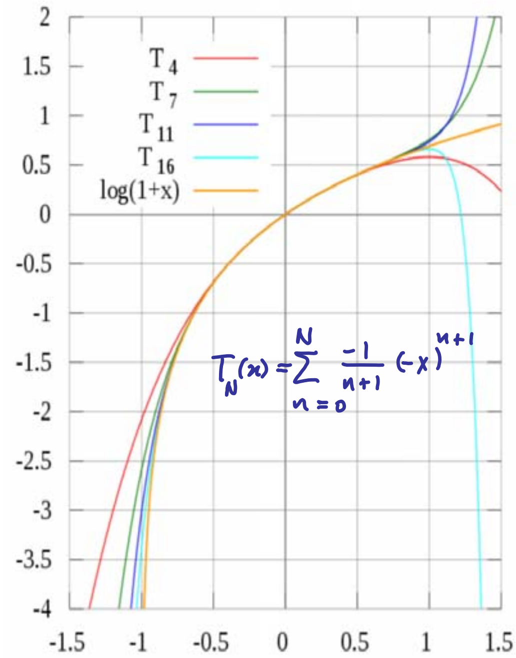

Da das Ergebnis davon abhängt, von welcher Richtung $\Delta z$ nach Null strebt, sagt man: 'der Grenzwert existiert nicht', und somit die Ableitung $f'(z)\big|_{z=0}$ auch nicht.

Deshalb gibt es für f(z') keine Taylor-Reihenentwicklung um den Punkt z = 0

Allgemein: systematische Diskussion der Konvergenz von Taylor-Reihen erfordert Funktionentheorie komplexer Funktionen (siehe fortgeschrittene Mathe-Vorlesungen). Für R-Vorlesung und typische Physik-Anwendungen brauchen wir jedoch nur Taylor-Entwicklung von gutmütigen Funktionen...

Falls Taylor-Reihe konvergiert, ist gliedweises Differenzieren / Integrieren innerhalb des Konvergenzradius erlaubt.

C5.1j




Beispiel 3:

$$\ln(1+x) = \int_0^x dx' \frac{d}{dx'} \ln(1+x')$$

$$= \int_0^x dx' \frac{1}{1+x'}$$

Nutze Taylor-Entwicklung (g.1):

gilt nur für $|x|<1$

$$\overset{(g.1)}{=} \int_0^x dx' \sum_{n=0}^{\infty} (-x')^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} (-x)^{n+1}$$

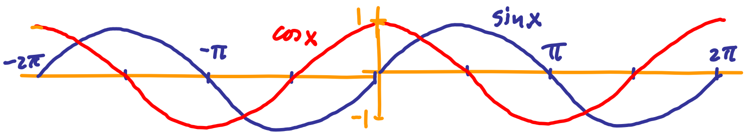
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

Beachte: da Taylor-Reihe für $|x| > 1$ nicht konvergiert, liefern höhere Taylor-Terme $T_N(x)$ dort eine zunehmend schlechtere Näherung!

---

Sinus und Cosinus:

C5.1k




Bekannte Eigenschaften:

Wert bei Null: $\sin(0) = 0$ (1) $\quad$ $\cos(0) = 1$ (2)

Ableitung: $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ (3) $\quad$ $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ (4)

Eigenschaften (1)-(4) bestimmen die Reihenentwicklungen v. sin und cos eindeutig:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) \equiv \sin x$, | $f(0) \overset{(1)}{=} 0$ | (5) | $g(x) \equiv \cos x$, | $g(0) \overset{(2)}{=} 1$ | (11) |
| $f'(x) \overset{(3)}{=} \cos x$, | $f'(0) \overset{(2)}{=} 1$ | (6) | $g'(x) \overset{(4)}{=} -\sin x$, | $g'(0) \overset{(1)}{=} 0$ | (12) |
| $f''(x) \overset{(4)}{=} -\sin x$, | $f''(0) \overset{(1)}{=} 0$ | (7) | $g''(x) \overset{(3)}{=} -\cos x$, | $g''(0) \overset{(2)}{=} -1$ | (13) |
| $f^{(3)}(x) \overset{(3)}{=} -\cos x$, | $f^{(3)}(0) \overset{(2)}{=} -1$ | (8) | $g^{(3)}(x) \overset{(4)}{=} \sin x$, | $g^{(3)}(0) \overset{(1)}{=} 0$ | (14) |
| $f^{(4)}(x) \overset{(4)}{=} \sin x$, | $f^{(4)}(0) \overset{(1)}{=} 0$ | (9) | $g^{(4)}(x) \overset{(3)}{=} \cos x$, | $g^{(4)}(0) \overset{(2)}{=} 1$ | (15) |

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \forall\ n = 2m \\ (-1)^m & \forall\ n = 2m+1 \end{cases} \qquad (10)$$

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^m & \forall\ n = 2m \\ 0 & \forall\ n = 2m+1 \end{cases} \qquad (16)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \underset{n=2m+1}{\overset{(d.7)}{=}} \left[ \sin x \overset{(k.10)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} \right] = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \qquad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n \underset{n=2m}{\overset{(d.7)}{=}} \left[ \cos x \overset{(k.16)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} \right] = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \qquad (2)$$

(1) und (2) können als alternative <u>Definitionen</u> der Trig-Funktionen aufgefasst werden.

(1) und (2) sind konvergent für alle $x \in \mathbb{C}$

Betrachte:

Taylor-Reihe für e-Funktion, mit komplexen Argument, x = $i\phi$

$i^2 = -1$

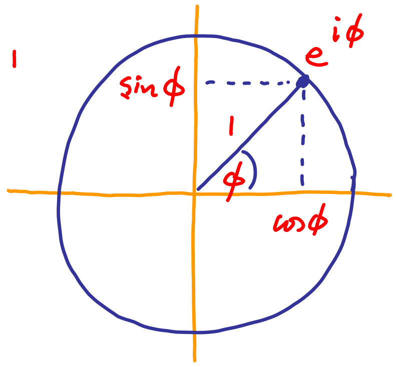
$$\exp(i\phi) \overset{(e.8)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} \qquad (3)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(i)^{2m}}^{(-1)^m}}{(2m)!} \phi^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(i)^{2m+1}}^{i(-1)^m}}{(2m+1)!} \phi^{2m+1} \qquad (4)$$

n = gerade $= 2m$ n = ungerade $= 2m+1$

$$\overset{(2),(1)}{=} \cos\phi + i \sin\phi \qquad (5)$$

Euler - de Moivre-Identität




'Einheitskreis'



<u>Euler-de Moivre-Identität:</u> $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$

Wir wissen aus geometrischer Definition der Trig-Funktionen:

$\cos(2\pi) = 1$, $\sin(2\pi) = 0$ (1) $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$ (2) $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$ (3)

$$\exp(i\,2\pi) \overset{(\ell.5),(1)}{=} 1 \qquad (4)$$

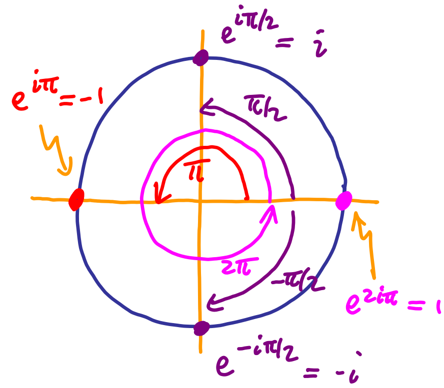
$$\exp(i\pi) \overset{(\ell.5),(2)}{=} -1 \qquad (5)$$

$$e^{\pi i} + 1 \overset{(5)}{=} 0 \qquad (6)$$

Euler-Formel

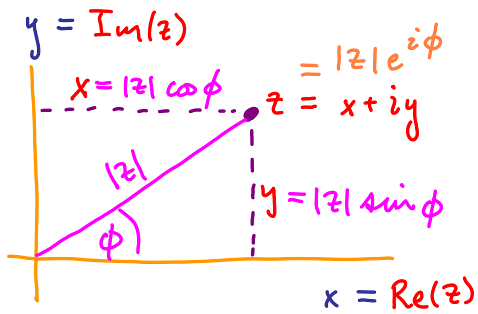
Vereint die 5 wichtigsten Zahlen,
$0,\ 1,\ \pi,\ e,\ i$
in einer Gleichung!

$$\exp(\pm i\pi/2) \overset{(\ell.5),(3)}{=} \pm i \qquad (7)$$




Polardarstellung v. komplexen Zahlen:

$$z \overset{(k.1\ell.5)}{=} |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$= |z|e^{i\phi}$$



## Exponential-Darstellungen von sin, cos, sinh, cosh

C5.1m'

$$e^{i\phi} \overset{(\ell.5)}{=} \cos\phi + i\sin\phi \qquad (1)$$

$$e^{-i\phi} \overset{(\ell.5)}{=} \cos(-\phi) + i\sin(-\phi) \qquad (2)$$

$$= +\cos\phi - i\sin\phi \qquad (2')$$

$$\tfrac{1}{2}\left[(1)+(2)\right]: \quad \boxed{\cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}} \qquad (3)$$

$$\tfrac{1}{2i}\left[(1)-(2)\right]: \quad \boxed{\sin\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{i2}} \qquad (4)$$

$$\cos(ix) \overset{(3)}{=} \frac{e^{i(ix)}+e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh x \qquad (5)$$

$$\sin(ix) \overset{(4)}{=} \frac{e^{i(ix)}-e^{-i(ix)}}{i2} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{i2} = \frac{-1}{i}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = i\sinh x \qquad (6)$$

$$\cosh x = \cos(ix) \overset{(\ell.2)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\overbrace{m+m}^{=1}}}{(2m)!}(\cancel{i}x)^{2m} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots \qquad (7)$$

$$\sinh x = \sin(ix) \overset{(\ell.1)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+m}}{(2m+1)!}(\cancel{i}x)^{2m+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots \qquad (8)$$

## Taylor-Entwicklung endlicher Ordnung

C5.1n

Taylor-Reihe, genähert durch endliche Anzahl Terme:

$$f(x') \overset{(d.7)}{\simeq} \sum_{n=0}^{\cancel{\infty}\, N} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x'-x)^n \equiv T_N(x') \qquad (1)$$

Fehlerabschätzung: Folgendes kann gezeigt werden:

Falls $\quad |f^{(n)}(x')| < \alpha\, C^n \quad \forall\ x' \in I \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \qquad (2)$

(d.h., falls alle Ableitungen beschränkt (endlich groß) sind auf einem Interval I)

dann ist eine obere Fehlerschranke auf I:

$$|f^{(n)}(x') - T_N(x')| < \alpha \frac{C^{N+1}}{(N+1)!}|x-x'|^{N+1} \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{N\to\infty} 0$$ (d.h. Reihe konvergiert)

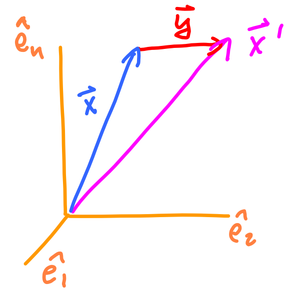
Übliche Notation, um Größe des Fehlers anzudeuten:

$$f(x') \overset{(1,3)}{\simeq} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x'-x)^n + \mathcal{O}\left(\alpha\frac{C^{N+1}}{(N+1)!}|x-x'|^{N+1}\right) \qquad (4)$$

man sagt, der Fehler ist 'von Ordnung' ( ... )

## Taylor-Reihe für Funktion von n Variablen

C5.1o




(d.7): $$f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n \, d_n f(x) \qquad (1)$$

n-fache Ableitung

Sei $$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) \qquad (2)$$

$(x_1, \ldots, x_n)$

Verallgemeinerung v. (d.7):
[vorausgesetzt, dass alle Ableitungen existieren und Reihe konvergiert ]

$$f(\vec{x}+\vec{y}) \overset{(3)}{=} f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i (\partial_i f)(\vec{x}) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} y_i \, y_j (\partial_i \partial_j f)(\vec{x}) + \ldots \qquad (3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{y} \cdot \vec{\nabla})^n f(\vec{x})$$

partielle Ableitung: $$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_{x_i} \qquad (4)$$

wobei $$\vec{y} \cdot \vec{\nabla} \equiv \sum_{i=1}^{m} y_i \, \partial_i \,, \qquad (5)$$

$$(\vec{y} \cdot \vec{\nabla})^n \equiv \sum_{i_1=1}^{m} \ldots \sum_{i_n=1}^{m} y_{i_1} \cdots y_{i_n} \, \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_n} \qquad (6)$$

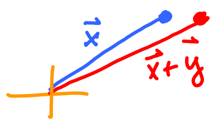
## Speziell in $\mathbb{R}^2$

$\vec{x} = (x_1, x_2), \quad \vec{y} = (y_1, y_2)$

C5.1p

$$f(x_1+y_1, x_2+y_2) \overset{(0.4)}{=} f(\vec{x}) + (y_1 \partial_1 + y_2 \partial_2) f(\vec{x})$$
$$+ \tfrac{1}{2}(y_1 \partial_1 + y_2 \partial_2)(y_1 \partial_1 + y_2 \partial_2) f(\vec{x}) + \mathcal{O}(y^3) \qquad (1)$$
$$= \left[\tfrac{1}{2} y_1^2 \partial_1^2 + y_1 y_2 \partial_1 \partial_2 + \tfrac{1}{2} y_2^2 \partial_2^2 \right] f(\vec{x}) + \mathcal{O}(y^3) \qquad (1)$$

Satz v.




(2)

**Beispiel 1: Coulomb-Potential**
(in CGS-Einheiten)

$$\varphi_c(\vec{x}) = \frac{Q}{|\vec{x}|}$$

$$\partial_i \frac{1}{|\vec{x}|^m} \overset{ES}{=} \partial_i \, (x_j x_j)^{-\frac{m}{2}} \overset{\text{Kettenregel}}{=} -\frac{m}{2} (x_j x_j)^{-\frac{m+2}{2}} \partial_i (x_j x_j) \qquad (3)$$

$$= -\frac{m}{2} \frac{1}{|\vec{x}|^{m+2}} (\delta_{ij} x_j + x_j \delta_{ij}) = -m \frac{x_i}{|\vec{x}|^{m+2}} \qquad (4)$$

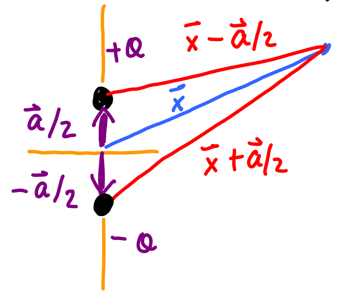
$$\varphi_c(\vec{x}+\vec{y}) \overset{(0.4)}{=} \left[1 + y_i \partial_i + \mathcal{O}(y^2)\right] \underbrace{Q \frac{1}{|\vec{x}|}}_{\varphi_c(\vec{x})} \qquad (5)$$

$$\overset{(4)}{=} Q \left[\frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{\vec{y} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \mathcal{O}(y^2)\right] \qquad (6)$$

## Beispiel 2: Potential eines Dipols

"Dipol" = Ladung +Q und -Q im Abstand a voneinander:

"Dipolmoment": $\vec{d} \equiv Q\vec{a}$ (1)




Was ist das Potential eines Dipols im Limes $\underbrace{|\vec{a}| \ll |\vec{x}|}_{\text{"Punktdipol"}}$ ?

$$\varphi_D(\vec{x}) = \varphi_c(\vec{x}-\vec{a}/2) - \varphi_c(\vec{x}+\vec{a}/2) \qquad (2)$$

$$\overset{(p.6)}{=} Q\left[\left(\cancel{\frac{1}{|\vec{x}|}} + \frac{1}{2}\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{|\vec{x}|}} - \frac{1}{2}\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right) + \mathcal{O}(a^2)\right] \qquad (3)$$

$$= \frac{\vec{d}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \qquad (4)$$

Elektrisches Feld eines Dipols für $|\vec{x}| \gg |\vec{a}|$ :

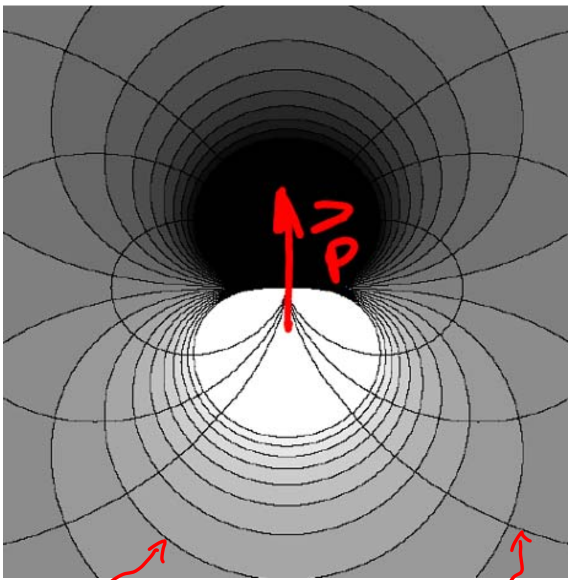
$$\partial_i \frac{1}{|\vec{x}|^3} \overset{(p.4)\; m=3}{=} -3\, x_i / |\vec{x}|^5 \qquad (5)$$

$$\vec{E}_D = -\vec{\nabla}\varphi_D \overset{(4,5)}{=} -\left[\frac{\vec{d}}{|\vec{x}|^3} - 3\frac{(\vec{d}\cdot\vec{x})\,\vec{x}}{|\vec{x}|^5}\right] \qquad (6)$$



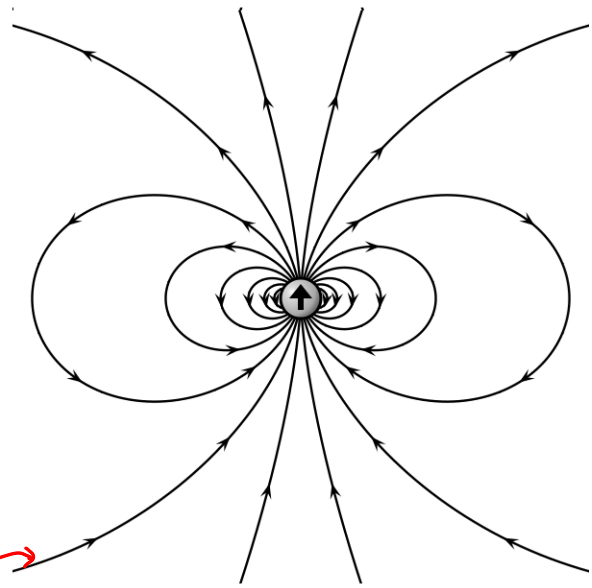
Potential eines Punktdipols

$$\varphi_D(\vec{x}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \qquad (1)$$




Elektrisches Feld eines Punktdipols

$$\vec{E}_D = -\left[\frac{\vec{d}}{|\vec{x}|^3} - 3\frac{(\vec{d}\cdot\vec{x})\,\vec{x}}{|\vec{x}|^5}\right] \qquad (2)$$



Äquipotentiallinien

Feldlinien ( $\perp$ zu Äquipotentiallinien)

# Zusammenfassung: C5.1 Taylor-Reihen

'Taylor-Reihe' v. f(x') um x'=x:
$$f(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x'-x)^n f^{(n)}(x) \qquad (1)$$

Wichtige Beispiele:

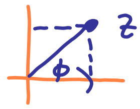
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (2) \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} (-x)^{n+1}, \qquad (3) \quad \text{für} \quad |x|<1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad (4) \qquad \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad (5) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{C}$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad (6)$$

Euler-de Moivre: $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ (7) Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$ (8)

Polardarstellung einer komplexen Zahl:
$$z = x+iy = |z|\, e^{i\phi} \qquad (9) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} |z|^2 = x^2+y^2, & (10) \\ \tan\phi = y/x & (11) \end{array} \right.$$




Multidimensionale Taylor-Reihe:
$$f(\vec{x}+\vec{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{y}\cdot\vec{\nabla})^n f(\vec{x}) \qquad (12)$$

$$(\vec{y}\cdot\vec{\nabla})^n = \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_n=1}^{m} y_{i_1} \cdots y_{i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \qquad (13)$$