5.2 Asymptotische Entwicklungen

Vorlesung 18: C5.2a

Im Folgenden: x sei dimensionslos (ansonsten sind x^m und x^n nicht vergleichbar) (1)

(C5.1d.6)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}_{\equiv R_{N+1}(x)} \equiv c_1 x^{N+1} + c_2 x^{N+2} + \dots \quad (2)$$

nur Potenzen mit n > N

Formel (C5.1n.3) sagt: wie schnell verschwindet Rest für festes x wenn $N \to \infty$? (3)

Bei "asymptotischer Entwicklung" ist die Fragestellung anders herum:

Wie schnell verschwindet der Rest für festes N wenn $x \to 0$? (4)

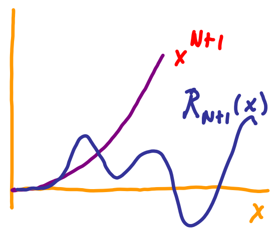
$$\frac{R_{N+1}(x)}{x^{N+1}} \overset{(2)}{=} \frac{c_1 x^{N+1}}{x^{N+1}} + \frac{c_2 x^{N+2}}{x^{N+1}} + \dots = c_1 + c_2 x + \dots \xrightarrow{x \to 0} c_1 \quad (5)$$

konstant

(5) impliziert folgendes "asymptotische Verhalten" für $x \to 0$:

" R_{N+1} verschwindet minestens so schnell wie x^{N+1} "

Man sagt: " R_{N+1} ist von Ordnung x^{N+1}" für $x \to 0$:



Übliche Notation: $R_{N+1}(x) = \mathcal{O}(x^{N+1})$ "Landau groß-O Symbol" (Edmund Landau, 1877-1938)

C5.2b

Man sagt: $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to x_0$ falls $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \text{const.}$ für $x \to x_0$ (1)

"f(x) ist von Ordnung g(x)" [$x_0 = \infty$ auch möglich]

In der Praxis: der früheste vernachlässigte Term bestimmt Ordnung des Rests:

(C5.1l.1)

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \dots \quad (1)$$

$$= x + \mathcal{O}(x^3) \quad (2)$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \quad (3)$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \mathcal{O}(x^7) \quad (4)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3 + \dots \quad (5)$$

$$= 1 + \mathcal{O}(x) \quad (6)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2) \quad (7)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad (8)$$

Verkettete Reihenentwicklungen

C5.2c

Entwicklung von tan(x) um x = 0, bis inklusive 3. Ordnung:

Lösungsweg 1: Taylor-Reihe (etwas mühsam): berechne $\tan'(x)\,,\ \tan''(x)\,,\ \tan'''(x)$ (1)

Lösungsweg 2: benutze bekannte Reihenentwicklungen von $\sin(x),\ \cos(x),\ \frac{1}{1-y}$ (2)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \underset{(C5.1l.2)}{\overset{(C5.1l.1)}{=}} \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5)}{1 - \underbrace{\tfrac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^4)}_{\equiv\, y\, =\, \mathcal{O}(x^2)}} \qquad (3)$$

Nebenrechnung:

Mit welcher Genauigkeit sollte Nenner entwickelt werden?

Nur inklusive $\mathcal{O}(x^2) = \mathcal{O}(y)$ (4)

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + \mathcal{O}(y^2) \qquad (5)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \qquad (6)$$

$$\overset{(6)}{=} \Big[\overset{a}{x} - \overset{b}{\tfrac{1}{6}x^3} + \overset{c}{\mathcal{O}(x^5)}\Big]\Big[\overset{d}{1} + \big(\overset{e}{\tfrac{1}{2}x^2} + \overset{f}{\mathcal{O}(x^4)}\big)\Big] \qquad (7)$$

$$= \overset{a\cdot d}{x} + x^3\big(\overset{a\cdot e}{\tfrac{1}{2}} - \overset{b\cdot d}{\tfrac{1}{6}}\big) + \overset{a\cdot f + b\cdot e + c\cdot d}{\mathcal{O}(x^5)} + \overset{b\cdot f + c\cdot e}{\mathcal{O}(x^7)} + \overset{c\cdot f}{\mathcal{O}(x^9)} \qquad (8)$$

(in der Praxis ist es unnötig, diese Terme hinzuschreiben)

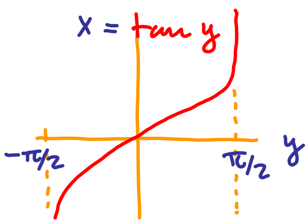
$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \qquad (9)$$

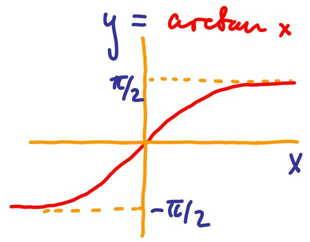
Wichtig: beachte das konsistente Abzählen der Ordnungen!

Reihenentwicklung einer Umkehrfunktion

C5.2d

Sei: $x = \tan y$ (1) Umkehrfunktion: $y \equiv \arctan x$ (2)





Aufgabe: Bestimme $\arctan(x) = y(x)$ für $x \to 0$, bis $\mathcal{O}(x^3)$ inklusive! (3)

Reihenansatz: $y(x) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ (4)

Achtung Indexkonvention:
Oben: Potenz (nicht Index!)
Unten: Koeffezientenindex

Antisymmetrie: $\tan(-y) = -\tan y$ (5)

$$y_n \equiv y^{(n)}(x)\big|_{x=0}$$

$$y(-x) = \arctan(-x) = -\arctan(x) = -y(x) \qquad (6)$$

Alle geraden Koeffizienten verschwinden: $c_{2n} = 0$ (7)

C5.2e

Somit vereinfacht sich der Ansatz zu: $y = c_1 x^1 + c_3 x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ (1)

Setze diese Ansatz ein in Ausgangsgleichung (c.1):

$$x \overset{(d.1)}{=} \tan y \overset{(c.9)}{=} y + \frac{1}{3} y^3 + \mathcal{O}(y^5) \quad (2)$$

$$\overset{(1)}{=} \left[c_1 x^1 + c_3 x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right] + \frac{1}{3} \underbrace{\left[c_1 x + c_3 x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right]^3}_{c_1^3 x^3 + \mathcal{O}(x^5)} + \mathcal{O}(x^5) \quad (3)$$

$$x = c_1 x + x^3 \underbrace{\left(c_3 + \frac{1}{3} c_1^3\right)}_{\equiv 0} + \mathcal{O}(x^5) \quad (4)$$

Linke und rechte Seite müssen in jeder Ordnung von x übereinstimmen!

'Koeffizientenvergleich': $\mathcal{O}(x)$: $c_1 = 1$ (5)

$\mathcal{O}(x^3)$: $c_3 = -\frac{1}{3} c_1^3 = -\frac{1}{3}$ (6)

Lösung: $\arctan x \overset{(d.2)}{=} y \overset{(1,5,6)}{=} 1 \cdot x - \frac{1}{3} x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ (7)

C5.2f

Iteratives Lösen einer Gleichung mittels Reihenentwicklung

Betrachte: $e^{y(x)-1} = x + \sqrt{y(x)}$ mit $0 < x \ll 1$ (1)

Finde $y(x)$ als Funktion v. x bis Ordnung $\mathcal{O}(x^2)$ inklusive, d.h. bestimme die Koeffizienten der ersten drei Terme in der Taylor-Entwicklung:

$$y(x) = y(0) + y^{(1)}(0)\, x + \frac{1}{2!} y^{(2)}(0)\, x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad (2)$$

$$= y_0 + y_1 x + \frac{1}{2!} y_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad (3)$$

$$\boxed{y_n \equiv y^{(n)}(x)\big|_{x=0}}$$

Strategie: Mache Reihenentwicklungen von (1) in Potenzen von x, bis $\mathcal{O}(x^2)$,

links = $\ell(x)$ = $r(x)$ = rechts (4)

$$\ell_0 + \ell_1 x^1 + \frac{1}{2!} \ell_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) = r_0 + r_1 x + \frac{1}{2!} r_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad (5)$$

und vergleiche Koeffizienten: von x^0: $(5)|_{x=0}$: $\ell_0 = r_0$ (6)

x^1: $(5)'|_{x=0}$: $\ell_1 = r_1$ (7)

x^2: $(5)''|_{x=0}$: $\ell_2 = r_2$ (8)

Kompaktnotation: $e^{y-1} \overset{(f.1)}{=} x + \sqrt{y}$ (1) C5.2g

$(1)\big|_{x=0}$: $e^{y_0-1} = 0 + \sqrt{y_0}$ (2) $\Rightarrow$ $y(0) \equiv y_0 = 1$ (3)

$\frac{d}{dx}(1)$: $y^{(1)} \cdot e^{y-1} = 1 + \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot y^{(1)}$ (4)

$\frac{d}{dx}(1)\big|_{x=0}$: $y_1 e^{y_0-1} = 1 + \frac{1}{2} y_0^{-1/2} \cdot y_1$ (5)

(3): $y_0 = 1$ $y_1 \underbrace{e^{1-1}}_{=1} \overset{(3)}{=} 1 + \frac{1}{2} 1 \cdot y_1$ $\Rightarrow$ $y^{(1)}(0) \equiv y_1 = 2$ (6)

$\frac{d^2}{dx^2}(1) = \frac{d}{dx}(4)$ $\left[y^{(2)} + y^{(1)} y^{(1)}\right] e^{y-1} = 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} y^{-3/2}\left(y^{(1)}\right)^2 + \frac{1}{2} y^{-1/2} y^{(2)}$ (7)

$\frac{d^2}{dx^2}(1)\big|_{x=0}$: $\left[y_2 + (y_1)^2\right] e^{y_0-1} = -\frac{1}{4} y_0^{-3/2} (y_1)^2 + \frac{1}{2} y_0^{-1/2} y_2$ (8)

(3),(6): $y_0 = 1$, $y_1 = 2$ $y_2 + 4 = -\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot y_2$ $y^{(2)}(0) \equiv y_2 = -10$ (9)

Endergebnis: $y(x) \overset{(f.3)}{=} 1 + 2 \cdot x + \frac{1}{2!}(-10)\, x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 1 + 2x - 5x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ (10)

C5.3 Extrema unter Nebenbedingungen

C5.3a

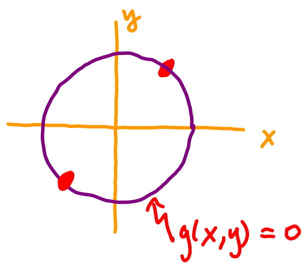
Problemstellung: Betrachte Funktionen $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Suche Extrema von $f(\vec{x})$ unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$ (1)

Beispiel 1: $f(x,y) = x + y$ (2)

Nebenbedingung: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ (3)

[besagt: (x,y) liegt auf Einheitskreis]



Lösungsstrategie A: Auflösung der Nebenbedingung

$y(x) \overset{(3)}{=} \pm\sqrt{1 - x^2}$ (4) und einsetzen in f: $f(x, y(x)) \equiv \tilde{f}(x)$ (4)

Suche nun Extrema von $\tilde{f}(x) \overset{(2,4)}{=} x \pm \sqrt{1 - x^2}$ (5)

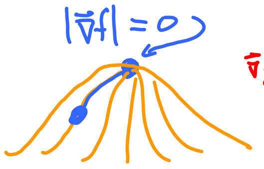
$0 \overset{!}{=} \partial_x \tilde{f}(x) = 1 \mp \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (6) Lösungen: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = y$ (7)

Lösungsstrategie A ist oft unpraktisch: Auflösen der Nebenbedingung von Hand ist häufig nicht möglich; oder, falls mehrere Lösungen existieren, wird es aufwendig...

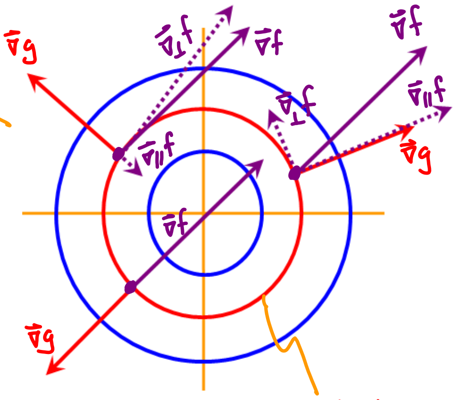
Lösungsstrategie B: Lagrange-Multiplikator

$\vec\nabla f = \hat{x} + \hat{y}$ (1)   C5.3b

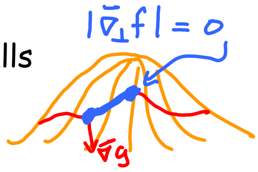
Geometrische Betrachtung:



Wie findet man Extremum von f(x,y) falls es keine Nebenbedingung gibt? Laufe in Richtung der maximalen Steigung, d.h. von $\vec\nabla f$, bis ein Punkt erreicht wird wo $|\vec\nabla f| = 0$ (2)



Nebenbedingung: $g(x,y) = 0$



Wie findet man Extremum von f(x,y) falls eine Nebenbedingung vorhanden ist? Wie oben, aber mit der Einschränkung, dass nur "entlang" oder "parallel zu" der (g=0)-Linie" gelaufen wird, d.h. senkrecht zu $\vec\nabla g$, d.h. in Richtung $\vec\nabla_\perp f$, wobei

$\vec\nabla g \perp$ (g=konstant)-Linien (3)

$$\vec\nabla f = \vec\nabla_\perp f + \vec\nabla_\parallel f \quad (4)$$

die Zerlegung von $\vec\nabla f$ in Komponenten $\perp$ und $\parallel$ zu $\vec\nabla g$ ist.

Ein Extremum v. f, unter der Nebenbedingung g=0, ist erreicht wenn $\vec\nabla_\perp f = 0$. (5)

An diesem Punkt gilt somit $\vec\nabla f \overset{(4)(5)}{=} \vec\nabla_\parallel f \Longrightarrow \vec\nabla f \parallel \vec\nabla g \Longrightarrow \vec\nabla f = \lambda \vec\nabla g$ (6)

C5.3c

Formale Formulierung: "Lagrange-Multiplikator"

Betrachte die Funktion $F(\vec{x};\lambda) = f(\vec{x}) - \lambda\, g(\vec{x})$ (1)

Notwendige Bedingungen für Extremum v. f mit g=0:

i) $\vec\nabla F(\vec{x};\lambda) \overset{!}{=} 0$ (2) äquivalent zu (b.6): $\vec\nabla f(\vec{x}) = \lambda \vec\nabla g(\vec{x})$

ii) $\frac{\partial}{\partial\lambda} F(\vec{x};\lambda) \overset{!}{=} 0$ (3) äquivalent zu $g(\vec{x}) = 0$

Beispiel 1 nochmal, mit Lösungsstrategie B: $f(\vec{x}) \overset{(a.2)}{=} x+y$, $g(\vec{x}) \overset{(a.3)}{=} x^2+y^2-1$

$$F(\vec{x},\lambda) = x + y - \lambda(x^2+y^2-1) \quad (4)$$

$\frac{\partial}{\partial x} F = 1 - 2\lambda x \underset{(2)}{\overset{!}{=}} 0$ (5)

$\frac{\partial}{\partial y} F = 1 - 2\lambda y \underset{(2)}{\overset{!}{=}} 0$ (6)

$\frac{\partial}{\partial \lambda} F = x^2+y^2-1 \underset{(3)}{\overset{!}{=}} 0$ (7)

Eliminiere λ: (5) - (6): $x = y$ (8)

(8) in (7): $2x^2 = 1 \Longrightarrow x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (9)

Beachte: es ist nicht nötig λ, explizit zu bestimmen!

Allgemeine Formulierung: Finde Extrema von $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

mit Nebenbedingungen $g_i(\vec{x}) = 0$, wobei $g_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, K$ (1)

Anzahl Nebenbedingungen

Lösungsstrategie: Führe K Lagrange-Multiplikatoren ein, λ_i, $i = 1, \dots, K$

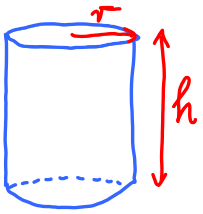
und betrachte $F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^{K} \lambda_i g_i(\vec{x})$ (2)

Kandidaten für Extrema müssen folgende Gl. erfüllen:

$$\vec{\nabla} F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, K \qquad (4)$$

<u>Beispiel 2: Was ist maximales Volumen eines Zylinders gegebener Oberfläche A?</u>



Volumen: $\pi r^2 h = V \equiv f(r,h)$ (5)

Oberfläche A = fest: $0 = (\underbrace{2\pi r^2}_{\text{Decke + Boden}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{Mantel}}) - A \equiv g(r,h)$ (6)

Nebenbedingung

Betrachte $F(r, h; \lambda) \overset{(d.2)}{=} \overbrace{\pi r^2 h}^{f(r,h)} - \lambda(\overbrace{2\pi r^2 + 2\pi r h - A}^{g(r,h)})$ (1)

$$\frac{\partial F}{\partial h} \overset{(d.3)}{=} \pi r^2 - \lambda 2\pi r \overset{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = r/2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} \overset{(d.3)}{=} 2\pi r h - \lambda(4\pi r + 2\pi h) \overset{!}{=} 0 \qquad (3)$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad 2\pi r h - (2\pi r^2 + \pi h r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad h = 2r \qquad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = (2\pi r^2 + 2\pi r h - A) \overset{!}{=} 0 \quad \overset{(4)}{\Longrightarrow} \quad 6\pi r^2 = A \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}} = \frac{h}{2} \qquad (5)$$

Maximales Volumen: $V \overset{(d.6)(5)}{=} 2\pi r^3 = 2\pi \left(\frac{A}{6\pi}\right)^{3/2}$ (6)

Check: Konventionell, eliminiere $h \overset{(d.6)}{=} \frac{A}{2\pi r} - r$ (7)

$$V = \pi r^2 h = r^2 \pi \left(\frac{A}{2\pi r} - r\right) = \frac{Ar}{2} - \pi r^3 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{2} - 3\pi r^2 \overset{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \quad ✓(5) \qquad (9)$$

C5.3 f

Anwendung aus d. Statistischen Physik: Entropiemaximierung

Ein Quantensystem mit N möglichen Zustanden, $i = 1, \dots, N$,

befinde sich mit Wahrscheinlichkeit p_i in Zustand i, wobei $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ (1)

Die "Entropie" des Systems ist: $S(p_1, \dots, p_N) \equiv -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i$ (2)

Aufgabe 1: bestimme die Wahrscheinlichkeiten p_i, für die S maximal ist!

Lösung: Betrachte

$$\tilde{S}(p_1, \dots, p_N; \lambda) \overset{(d.2)}{=} \overbrace{-\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i}^{S} - \lambda \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} p_i - 1\right)}^{\text{Nebenbedingung (1)}} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_j} \tilde{S} = -\ln p_j - 1 - \lambda \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \text{alle p's sind gleich: } p_1 = p_2 = \dots = p_N \qquad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{S} = \sum_{i=1}^{N} p_i - 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \frac{1}{N} \qquad (5)$$

Fazit: Entropie ist maximal falls alle Wahrscheinlichkeiten p_i gleich sind.

C5.3 g

Aufgabe 2: Weitere Nebenbedingung: vorgegebene Energie

Sei E_i die Energie des Quantensystems im Zustand i

Der Mittelwert der Energie ist dann: $E = \sum_{i=1}^{N} E_i p_i$ (1)

Für gegebenes E, bestimme die Wahrscheinlichkeiten, p_i für die S maximal ist!

Lösung: Betrachte

$$\tilde{S}(p_1, \dots, p_N; \lambda_1, \lambda_2) \overset{(30.2)}{=} \overbrace{-\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i}^{S} - \lambda_1 \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} p_i - 1\right)}^{\text{Nebenbedingung 1}} - \lambda_2 \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} E_i p_i - E\right)}^{\text{Nebenbedingung 2}} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_j} \tilde{S} = -\ln p_j - 1 - \lambda_1 - \lambda_2 E_j \overset{!}{=} 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \tilde{S} = \sum_{i=1}^{N} p_i - 1 \overset{!}{=} 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \tilde{S} = \sum_{i=1}^{N} E_i p_i - E \overset{!}{=} 0 \qquad (5)$$

(g.3) liefert: $$\ln p_j = -(1+\lambda_1) - \lambda_2 E_j \qquad (1)$$

C5.3h

$$p_j = \underbrace{e^{-(1+\lambda_1)}}_{\equiv Z^{-1}} \; \underbrace{e^{-\lambda_2 E_j}}_{\equiv e^{-E_j/k_B T}} \qquad (2)$$

'Boltzmann-Faktor'

Definiere: $\lambda_2 \equiv \frac{1}{k_B T}$, T = 'Temperatur', k_B = 'Boltzmann-Konstante'

(g.4) liefert: $$1 = \sum_{i=1}^{N} p_i \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{N} Z^{-1} e^{-E_j/k_B T} \qquad (3)$$

'Zustandsumme': $$Z = \sum_{i=1}^{N} e^{-E_j/k_B T} \qquad (4)$$

(g.5) liefert: $$E = \sum_{i=1}^{N} E_i p_i = Z^{-1} \sum_{i=1}^{N} E_i \, e^{-E_j/k_B T} \qquad (5)$$

Gl. (5) legt die Variable T so fest, dass mittlere Energie den gewünschten Wert E hat.
Die Zustandsumme Z in Gl. (4) ist dann ein Normierungsfaktor, so dass $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.

Die Form $p_i = \frac{1}{Z} e^{-E_i/k_B T}$ heisst Boltzmann-Verteilung.

Zusammenfassung: C5.2 Asymptotische Entwicklungen

Z C5.2,3

Reihenentwicklungen in Gleichungen: links = $\ell(x) = r(x)$ = rechts (1)

$$\ell_0 + \ell_1 x^1 + \frac{1}{2!}\ell_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) \qquad (2)$$

Koeffizientenvergleich: $\Longrightarrow$ $\ell_0 = r_0$, $\ell_1 = r_1$, $\ell_1 = r_2$, etc. (3)

Zusammenfassung: C5.3 Extrema mit Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikatoren

Finde Extrema von $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (4)

mit Nebenbedingungen $g_i(\vec{x}) = 0$, wobei $g_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, K$ (5)

Anzahl Nebenbedingungen

Lösungstrategie: Führe K Lagrange-Multiplikatoren ein, λ_i, $i = 1, \dots, K$ (6)

und betrachte $$F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^{K} \lambda_i g_i(\vec{x}) \qquad (7)$$

Kandidaten für Extrema müssen folgende Gl. erfüllen:

$$\vec{\nabla} F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, K \qquad (9)$$