C7 Differentgleichungen (DG) (enthalten Ableitungen der gesuchten Funktionen)

[Stoffgliederung im Skript für Kapitel C7 weicht ab vom Altland-Delft-Text]

C7.1 Was ist eine DG, wozu wird sie gebraucht?

Eine DG ist eine Gleichung, die Ableitungen der gesuchten Funktion enthält.

Beispiele:

$$\frac{df(t)}{dt} = c\, f(t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \qquad (2)$$

In der Physik treten solche Gleichungen immer dann auf, wenn es möglich ist, die Änderungen von physikalischen Größe bezüglich Ort und/oder Zeit (also ihre Ableitungen) in Bezug zu setzen zu anderen physikalischen Größen.

Eine DG zu 'lösen' bedeutet, eine Funktion zu finden, die die DG erfüllt.
Dafür gibt es viele verschiedene Strategien, je nach Form der DG.

Gelingt es, die DG zu 'lösen', ist das Verhalten der entsprechenden physikalischen Größen als Funktion von Ort und/oder Zeit vollständig bekannt. Damit ist in der Regel auch das zugrundeliegende physikalische Problem in der Regel 'gelöst'.

Beispiel 1: Radioaktiver Zerfall

$$\dot{N}(t) = -\lambda\, N(t) \qquad (1)$$

Zerfallsrate (proportional zur Zahl der Atome!)

Zahl der radioaktiven Atome

Zerfallskonstante [Dimension: 1/Zeit]

Anfangswert: N_0 = Atome zum Zeitpunkt t_0
Aufgabe: finde $N(t)$

Lösung: Schlau geraten: welche Funktion ist proportional zu ihrer Ableitung? Exponentialfunktion!

Also Ansatz: $$N(t) = a\, e^{-bt} \qquad (2)$$

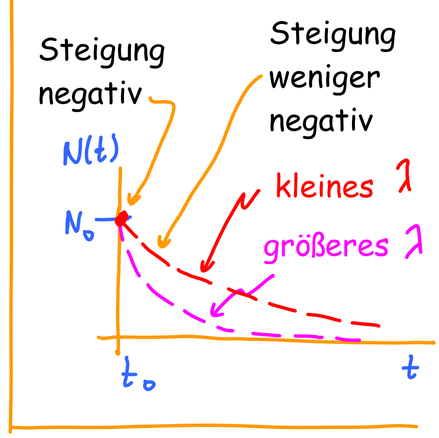
(3) in (1): $$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(a\, e^{-bt}\right)}_{-b\, a\, e^{-bt}} \overset{(1)}{=} -\lambda\left(a\, e^{-bt}\right) \qquad (3)$$

$$-b\, a\, e^{-bt} \quad \Longrightarrow \quad b = \lambda \qquad (4)$$

Anfangswert: $$N_0 = N(t_0) \overset{(2)}{=} a\, e^{-\lambda t_0} \quad \Rightarrow \quad a = N_0\, e^{\lambda t_0} \qquad (5)$$

Gesuchte Lösung: $$N(t) \overset{(2,4,5)}{=} N_0\, e^{-\lambda(t-t_0)} \qquad (6)$$

Grafische Analyse:



Nomenklatur:

Beispiel: C7.2a

Gewöhnliche DG: nur eine Variable $\qquad d_x f(x) = g(x)$ (1)

Partielle DG: mehrere Variablen $\qquad (\partial_x - \partial_t) f(x,t) = 0$ (2)

DG 1. Ordnung: nur Ableitungen 1. Ordnung $\qquad d_t f(t) = g(t, f(t))$ (3)

DG 2. Ordnung: Ableitungen bis zu 2. Ordnung $\qquad d_t^2 f(t) + d_t f(t) = g(t, f(t))$ (4)

System von DG: m > 1 gekoppelte Gleichungen:

$$d_t x(t) = v(t) \qquad (5)$$

$$d_t v(t) = f(x(t)) \qquad (6)$$

$(m=2)$

Lineare DG: linear in gesuchter Funktion $\qquad (d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2) x(t) = 0$ (7)

Nicht-lineare DG: nicht-linear in gesuchter Funktion $\qquad d_t^2 x(t) = c \sin(x(t))$ (8)

Beispiele: wichtige Differentialgleichungen in der Physik

C7.2a'

Mechanik: Newton 2 (gewöhnliche DG 2. Ordnung):

(gesuchte Funktion hängt nur von einer Variable ab, hier t) (Ableitungen 2. Ordnung kommen vor)

in 1. Dimension:

Masse, Ort, Kraft

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = F(x,t) \qquad (1)$$

in 3. Dimensionen:
(ein 'System' von DG)

Ortsvektor

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x},t) \qquad (2)$$

Elektrodynamik: Maxwell-Gleichungen (gekoppelte partielle DG 1. Ordnung)

(gesuchte Funktion hängt von mehreren Variablen ab, hier x,y,z,t) (nur Abl. 1. Ordnung kommen vor)

Ladungsdichte, Magnetfeld, Stromdichte, Elektrisches Feld

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{x},t) \qquad (3a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{x},t) \qquad (3b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x},t) = 0 \qquad (3c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x},t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x},t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{x},t) \qquad (3d)$$

C7.2b

Quantenmechanik: Schrödinger-Gleichung (partielle DG 2. Ordnung)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{x})\right]\psi(\vec{x},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) \qquad (1)$$

'Wellenfunktion'

Masse

Potential

Hydrodynamik: Navier-Stokes-Gleichung (nicht-lineare partielle DG 2. Ordnung)

(gesuchte Funktion kommt nicht nur linear vor)

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p + \eta\vec{\nabla}^2\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \vec{f} \qquad (2)$$

Dichte

Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x},t)$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer DG?

Ist in der Physik immer gewährleistet, falls Problem physikalisch sinnvoll gestellt ist! ☺

C7.3'a

C7.3' Allgemeine Lösungstrategien für Differentialgleichungen 1. Ordnung

(a) Trivialfall: rechte Seite der DG ist unabhängig von x

$$\dot{x}(t) = g(t) \qquad (1)$$

Integration:

$$\int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\,\frac{dx(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \overset{(1)}{=} \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, g(\tilde{t}) \qquad (2)$$

Substitution auf linker Seite: $x(\tilde{t}) \equiv \tilde{x}$, $x(t) \equiv x$, $x(t_0) \equiv x_0$ (3)

$$\int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\,\frac{dx(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} = x - x_0 = x(t) - x(t_0) \qquad (4)$$

Lösung:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, g(\tilde{t}) \qquad (5)$$

Fazit: Das Lösen von (1) entspricht dem Finden der Stammfunktion v. g(t)

(b) Separable DG: x- und t-Abhängigkeit auf rechter Seite faktorisiert

C7.3'b

WICHTIG!

$$\dot{x}(t) = \frac{g(t)}{h(x(t))} \qquad (1)$$

x-Abhängigkeit nach links:

$$\frac{dx(t)}{dt}\, h(x(t)) = g(t) \qquad (2)$$

Integration:

$$\int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, \frac{dx(\tilde{t})}{d\tilde{t}}\, h(x(\tilde{t})) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; g(\tilde{t}) \qquad (3)$$

Substitution:

$$\begin{bmatrix} x(\tilde{t}) \equiv \tilde{x} \\ x(t) \equiv x \\ x(t_0) \equiv x_0 \end{bmatrix} \quad (5) \qquad \int_{x_0}^{x} d\tilde{x}\; h(\tilde{x}) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; g(\tilde{t}) \qquad (4)$$

Eselsbrücke als Abkürzung der Substitution:

$$\text{'}\, dx\; h(x) = dt\; g(t)\, \text{'} \qquad (6)$$

'Trennung der Variablen'
x links t rechts

Ausgedrückt durch Stammfunktionen:

$$\underset{(4)\;\uparrow\; x(t)}{H(x)} - \underset{(4)\;\uparrow\; x(t_0)}{H(x_0)} = G(t) - G(t_0) \qquad (6)$$

gemeint ist:

Umkehrfunktion:

$$x(t) = H^{-1}\big(G(t) - G(t_0) + H(x_0)\big) \qquad (7)$$

Alternative zu (6):
(8)-(9) liefert (6).

$$\int^{x} d\tilde{x}\; h(\tilde{x}) = \int^{t} d\tilde{t}\; g(\tilde{t}) \;\Rightarrow\; \begin{cases} H(x) = G(t) + c & (8) \\ H(x_0) = G(t_0) + c & (9) \end{cases}$$

Beispiel 1:

$$\dot{x} = x^2 e^t \qquad (1)$$

mit $x_0 = x(0) = 1$ (2)

Trennen:

$$\frac{1}{x^2}\frac{dx}{\cancel{dt}} \overset{(1)}{=} \cancel{x^2}\, e^t\, dt \qquad (3)$$

Integrieren:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}^2} = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; e^{\tilde{t}} \qquad (4)$$

$$-\frac{1}{\tilde{x}}\Big|_{x_0=1}^{x} = e^{\tilde{t}}\Big|_{t_0=0}^{t} \qquad (5)$$

Anfangs-bedingung (2):

$$-\frac{1}{x} + 1 = e^t - 1 \qquad (6)$$

Umkehrfunktion = gesuchte Lösung:

$$x(t) = \left[2 - e^t\right]^{-1} \qquad (7)$$

[für $t > \ln(2)$ würde (7) die Lösung $x(t) < 0$, liefern, was nicht erlaubt ist, da $x(t) > x(0) = 1$]

Fazit: Lösung existiert nur $t \in \,]-\infty, \ln 2[$ (8)

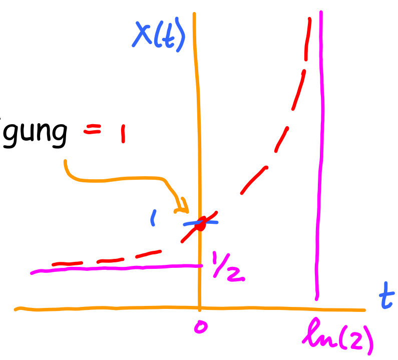
mit $x(t) \in \,]\tfrac{1}{2}, \infty[$ (9)

Grafische Analyse

C7.3'c

Bereich:	Steigung $\dot{x}$
$\forall t$	> 0
$t = 0$:	1
t groß positiv:	divergiert wie $e^t \to \infty$
t groß negativ:	verschwindet wie $e^{-\lvert t\rvert} \to 0$

Steigung = 1



7.3 Lineare Differentialgleichungen

Einstiegsbeispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator

[AD-Text C7.6]

Unendlich viele Anwendungen in der Physik, auch außerhalb der Mechanik!

Bewegungsgleichung: $$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = f_A(t) \qquad (1)$$

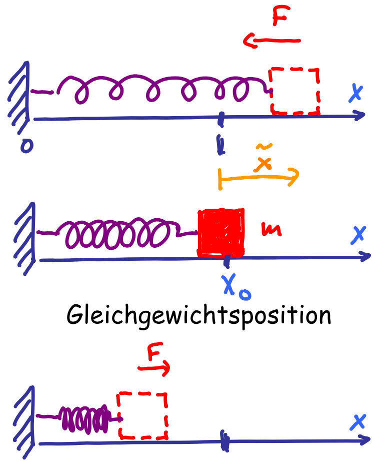
Dämpfungsrate: γ Einheit: s^{-1}

Kreisfrequenz des Oszillators: Ω Einheit: s^{-1}

Antriebskraft: $f_A(t) = \frac{1}{m} F_A(t)$

Wo kommt Gl. (1) her? Einige Beispiele aus der Physik

1. Beispiel: Feder



Rückstellkraft proportional zur Auslenkung:

Federkonstante >0

$$m\ddot{x} = F(x) = -K\,(x - x_0) \qquad (2)$$

Verschobene Koordinaten: $x - x_0 \equiv \tilde{x}$, $\ddot{x} = \ddot{\tilde{x}}$

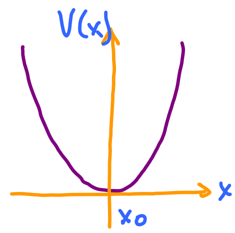
$$\ddot{\tilde{x}} + \frac{K}{m}\tilde{x} = 0 \qquad (3)$$

(4) hat HO-Form (1), mit $$\Omega = \sqrt{K/m}\,, \qquad (4)$$

$$\gamma = 0 \qquad (5)$$

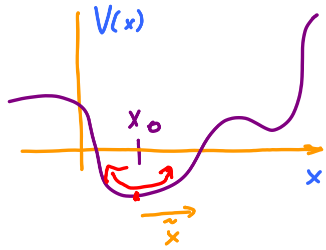
Die Rückstellkraft (a.2) $$F(x) = -K(x - x_0) \equiv -\frac{d}{dx}V(x) \qquad (1)$$

entspricht einem quadratischen Potential: $$V(x) = \frac{K}{2}(x - x_0)^2 \qquad (2)$$



Wichtig: Quadratisches Potenzial $\Longleftrightarrow$ HO

Allgemeiner: Oszillationen um Potentialminimum



$V(x)$ sei Potential mit lokalem Minimum bei x_0:

Def. eines Extremums: $$\partial_x V(x)\big|_{x_0} = V'(x_0) = 0 \qquad (3)$$

Taylor-Entwicklung um x_0: $x = x_0 + \tilde{x}$

$$V(x) = V(x_0 + \tilde{x}) = V(x_0) + \tilde{x}\underbrace{V'(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}\tilde{x}^2 V''(x_0) + \mathcal{O}(\tilde{x}^3) \qquad (4)$$

In $\tilde{x}$ Koordinaten: $$V(x) \equiv \tilde{V}(\tilde{x}) = V(x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x_0)}_{\equiv K}\tilde{x}^2 + \cancel{\mathcal{O}(\tilde{x}^3)} \qquad (5)$$

HO-Schwingungen um $\tilde{x} = 0$, mit Frequenz: $$\Omega = \sqrt{V''(x_0)/m} \qquad (6)$$

Beispiel für Dämpfung:

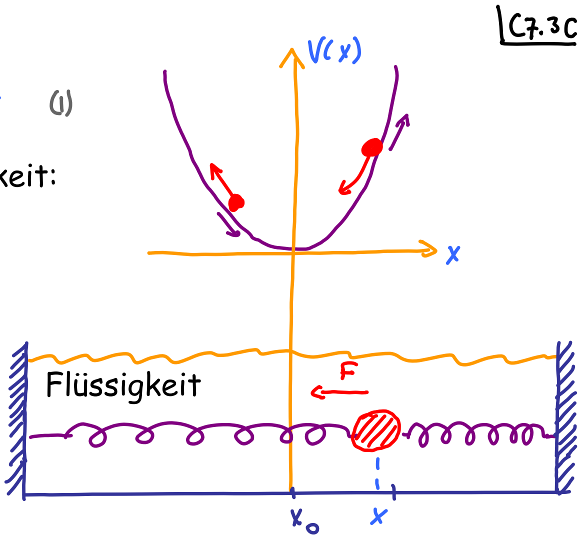
Definierende Gleichung: $\ddot{x} = -\Omega^2 x - 2\gamma \dot{x}$ (1)

Reibungskraft zeigt immer gegen die Geschwindigkeit:

$$F_{Reibung} = -m\,2\gamma\dot{x} \qquad (2)$$

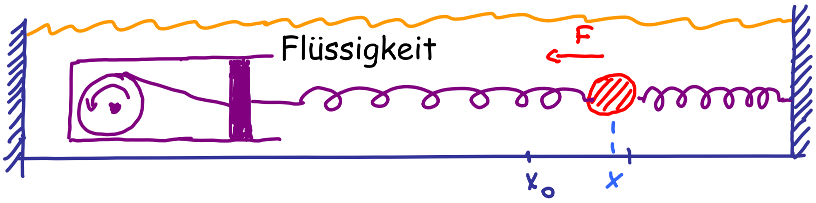
Reibungskonstante: $[\gamma] = \frac{1}{s}$ (3)

(hängt von Details des Reibungsmechanismus ab).



Beispiel für Antriebskraft:

Motor treibt Kolben, der an Feder befestigt ist:



$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = f_A(t) = \frac{1}{m} F_{Antrieb}(t) \qquad (4)$$

Vorschau auf HO Lösungen

Ohne Dämpfung, ohne Antrieb: $\gamma = 0$, $f(t) = 0$

$$\ddot{x}(t) \overset{(3a.1)}{=} -\Omega^2 x(t) \qquad (1)$$

Funktion ist proportional zu ihrer 2. Ableitung $\xRightarrow{\text{schlau geraten}}$ cos oder sin

Lösung 1: $x_a(t) = x_a \cos(\Omega t)$ (2)

Check: $\dot{x}_a(t) = -\Omega x_a \sin(\Omega t)$ (3)

$\ddot{x}_a(t) = -\Omega^2 x_a \cos(\Omega t)$ (4)

$= -\Omega^2 x_a(t)$ (5)

Lösung 2: $x_b(t) = x_b \sin(\Omega t)$ (6)

Check: $\dot{x}_b(t) = \Omega x_b \cos(\Omega t)$ (7)

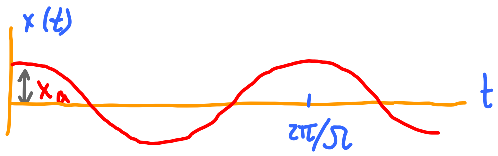
$\ddot{x}_b(t) = -\Omega^2 x_b \sin(\Omega t)$ (8)

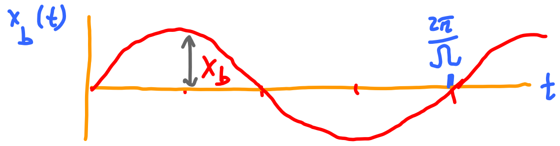
$= -\Omega^2 x_b(t)$ (9)

Die beiden Lösungen unterscheiden sich in ihren Anfangsbedingungen:

$x_a(0) = x_a$, $\dot{x}_a(0) = 0$ (10)

$x_b(0) = 0$, $\dot{x}_b(0) = \Omega x_b$ (11)





Eine Lösung mit vorgegebenen Anfangsbedingungen, **C7.3e**

Anfangsposition: $x(0) \equiv x_0$ (1) Anfangsgeschwindigkeit: $\dot{x}(0) \equiv v_0$ (2)

lässt sich konstruieren als Linearkombination der cos und sin Lösungen:
[Grund: "Superpositionsprinzip", siehe Seite C7.3k]

explizit: $$x(t) = x_0 \cos(\Omega t) + (v_0/\Omega)\sin(\Omega t) \quad (3)$$

mit $$\dot{x}(t) = -\Omega x_0 \sin(\Omega t) + (v_0/\Omega)\,\Omega \cos(\Omega t) \quad (4)$$

erfüllt (3) $$x(0) = x_0 \cos(0) + (v_0/\Omega)\cancel{\sin(0)} = x_0 \quad (5)$$

und (4): $$\dot{x}(0) = -\Omega \cancel{x_0 \sin(0)} + (v_0/\cancel{\Omega})\,\cancel{\Omega} \cos(0) = v_0 \quad (6)$$

Allgemeine Faustregel: für DG n. Ordnung ist Lösung erst dann eindeutig bestimmt, wenn man n 'Anfangsdaten' festgelegt hat, z.B. $f^{(j)}(0) = f_j \quad \forall\, j = 0, \dots, n-1$ (7)

Falls Dämpfung und/oder Antriebskraft vorhanden ist, läßt sich Lösung nicht so leicht erraten. Wir brauchen also eine systematische Lösungstrategie.
Betrachte zunächst Fall ohne Antrieb $f_A(t) = 0$ (8) [Mit Antrieb: nächstes Mal]

<u>Homogene lineare DG</u> **C7.3f**

Die HO-Gleichung (3.1) ohne Antrieb ist ein Beispiel einer homogenen, linearen DG.

'linear': x(t) und Ableitungen davon kommen <u>nur zur ersten Potenz</u> vor.

'homogen': <u>x-unabhängige</u> Terme kommen <u>nicht</u> vor

[HO mit Antriebskraft wäre eine 'inhomogene' DG: $$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \Omega^2 x \overset{(3a.1)}{=} f_A(t) \quad (1)$$ 'Inhomogenität']

Allgemeine Form einer homogenen, linearen DG: $$c_n(t)\underbrace{f^{(n)}(t)}_{\frac{d^n f(t)}{dt^n}} + \dots + c_1(t) f^{(1)}(t) + c_0(t) f(t) = 0 \quad (2)$$

n-fache Ableitung

Koeffizienten können zeitabhängig sein

homogen: kein x-<u>un</u>abhängiger Term

Lösung solcher Gleichungen ist möglich mittels Nutzung folgender Schritte/Prinzipien:
(i) Rückführung auf System v. DG 1. Ordnung
(ii) Superpositionsprinzip
(iii) Berücksichtigung v. Anfangsbedingungen
Falls Koeffizienten zeitunabhängig sind:
(iv) Exponentialansatz & Rückführung auf Eigenwertproblem
(v) Komplexe Lösungen als Hilfsmittel zur bequemen Konstruktion reeller Lösungen

(i) Rückführung auf System v. DG 1. Ordnung

HO-Gleichung $$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2 x \overset{(3c.1)}{=} 0 \qquad (1)$$

ist äquivalent zu:
$$\begin{cases} \dot{x} = v & (2) \\ \dot{v} \overset{(2)}{=} -\Omega^2 x - 2\gamma v & (3) \end{cases}$$

Matrixnotation:
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}}_{\equiv \underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Kompaktnotation:
$$\dot{\vec{x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \qquad (5)$$

$$\vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad (6) \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}, \quad (7)$$

Für HO sind die Koeffizienten der A-Matrix konstant (zeit-unabhängig)

Zwischenbemerkung 1:

Mit analoger Strategie lässt sich allgemeine homogene lineare DG (3f.2) von Ordnung n,

$$c_n f^{(n)} + c_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + c_1 f^{(1)} + c_0 f^{(0)} \overset{(3f.2)}{=} 0 \qquad (1)$$

umschreiben in ein System von n linearen DG von Ordnung 1:

Index oben für Komponenten eines Vektors (also keine Potenz!)

Führe für jede höhere Ableitung eine neue Variable ein,

$$f^{(0)}(t) \equiv x^1(t) \qquad (2)$$
$$f^{(1)}(t) \equiv x^2(t) = \dot{x}^1(t) \qquad (3)$$
$$f^{(2)}(t) \equiv x^3(t) = \dot{x}^2(t) \qquad (4)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n-1)}(t) \equiv x^n(t) = \dot{x}^{n-1}(t) \qquad (5)$$
$$f^{(n)}(t) = \dot{x}^n(t) \qquad (6)$$

dann lautet (3f.2):

$$\cancel{c_n}\, \dot{x}^n + \frac{c_{n-1}}{c_n} x^n + \dots + \frac{c_1}{c_n} x^2 + \frac{c_0}{c_n} x^1 = 0 \qquad (7)$$

(2-7) sind ein System v. DG 1. Ordnung: (mit zeitabhängigen Koeffizienten)

In Matrix-Notation: C7.3i

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \\ \vdots \\ \\ \dot{x}^{n-1} \\ \dot{x}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & & \vdots \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -\frac{c_0}{c_n} & -\frac{c_1}{c_n} & -\frac{c_2}{c_n} & & -\frac{c_{n-2}}{c_n} & -\frac{c_{n-1}}{c_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ x^n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \vec{x}(t) \qquad (2)$$

<u>Zwischenbemerkung 2:</u> C7.3j

Dieser Trick klappt sogar ganz allgemein (also auch für nicht-lineare, inhomegene DG):

Allgemeinste Form für DG n. Ordnung:

$$G\left(f^{(n)}(t), f^{(n-1)}(t), \ldots, \underbrace{f^{(0)}(t)}_{=f(t)}, t\right) = 0 \qquad (1)$$

ganz allgemeine Funktion

Führe für jede höhere Ableitung eine neue Variable ein,

$$f^{(0)}(t) \equiv x^1(t) \qquad (2)$$

$$f^{(1)}(t) \equiv x^2(t) = \dot{x}^1(t) \qquad (3)$$

$$f^{(2)}(t) \equiv x^3(t) = \dot{x}^2(t) \qquad (4)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n-1)}(t) \equiv x^n(t) = \dot{x}^{n-1}(t) \qquad (5)$$

$$f^{(n)}(t) = \dot{x}^n(t)$$

und erhalte so ein System v. DG 1. Ordnung:

$$G\left(\dot{x}^n(t), x^n(t), \ldots, x^1(t), t\right) = 0 \qquad (6)$$

Matrix-Form (3i.1) folgt allerdings nur, falls G eine linaere Funktion der Argumente ist.

(ii) Superpositionsprinzip: [für lineare, homogene DG der Form (3i.2)] C7.3k

Seien $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_2(t)$ zwei beliebige Lösungen der DG (3i.2), d.h.

$$\dot{\vec{x}}_j(t) \overset{(3e.5)}{=} \underline{\underline{A}}(t)\cdot\vec{x}_j(t) \qquad (j = 1, 2) \tag{1}$$

(j ist kein Komponentenindex, sondern unterscheidet zwei Lösungen!)

dann ist die 'Linearkombination' $\vec{x}(t) = c_1\,\vec{x}_1(t) + c_2\,\vec{x}_2(t)$ (2) ebenfalls eine Lösung!

Beweis:

$$\dot{\vec{x}}(t) \overset{(2)}{=} c_1\,\dot{\vec{x}}_1(t) + c_2\,\dot{\vec{x}}_2(t) \tag{3}$$

$$\overset{(1)}{=} c_1\,\underline{\underline{A}}(t)\,\vec{x}_1(t) + c_2\,\underline{\underline{A}}(t)\,\vec{x}_2(t) \tag{4}$$

$$= \underline{\underline{A}}(t)\cdot\left[c_1\,\vec{x}_1(t) + c_2\,\vec{x}_2(t)\right] = \underline{\underline{A}}\cdot\vec{x}(t) \qquad \square \tag{5}$$

Was war hierfür notwendig? Linearität und Homogenität der DG.

Konstante Koeffizienten sind nicht notwendig, d.h. Superpositionsprinzip gilt auch für zeitabhängige Koeffizienten, d.h. falls $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(t)$

(iii) Berücksichtigung v. Anfangsbedingungen C7.3ℓ

Gesucht: Lösungen von

$$\dot{\vec{x}} = \underline{\underline{A}}(t)\cdot\vec{x} \tag{1}$$

mit Anfangsbedingung:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix} = \sum_j x_0^j\,\hat{e}_j \qquad \hat{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{j-te Position} \tag{2}$$

Strategie:

Finde zunächst die Lösungen $\vec{x}_j(t)$ für die n unabhängigen Anfangswertprobleme:

$$\dot{\vec{x}}_j = \underline{\underline{A}}(t)\cdot\vec{x}_j \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad \vec{x}_j(t_0) = \hat{e}_j \quad \forall\, j = 1, \dots, n \tag{3}$$

Dann ist die Lösung für das homogene Anfangswertproblem (1), (2), gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} x_0^j\,\vec{x}_j(t) \tag{4}$$

Check:

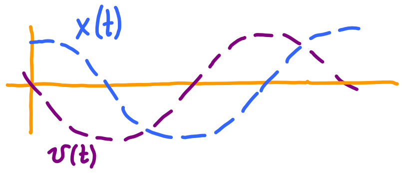
(4) löst die DG (1), laut (3) und Superpositionsprinzip! ✓

(4) erfüllt Anfangsbedingung (2):

$$\vec{x}(t_0) \overset{(4)}{=} \sum_{j=1}^{n} x_0^j\,\underbrace{\vec{x}_j(t_0)}_{(3):\ \hat{e}_j} \overset{(2)}{=} \vec{x}_0 \ ✓ \tag{5}$$

Konkret, für ungedämpften harmonischer Oszillator $(\gamma = 0)$

$$\vec{x}(t) \overset{(3g.7)}{=} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \overset{(3g.4)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$



$\vec{x}_1(t)$:
Lösung für $(j=1)$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \qquad x(t) = \cos(\Omega t) \qquad (3)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\Omega \sin(\Omega t) \qquad (4)$$

gut geratener Ansatz, siehe Seite 3d. (systematischer Lösungsweg für lineare DGL mit konstanten Koeff.: siehe Seite 3o.p-r)

$\vec{x}_2(t)$:
Lösung für $(j=2)$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \qquad x(t) = \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t) \qquad (5)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \cos(\Omega t) \qquad (6)$$

Allgemeine Lösung für

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} : \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \overset{(e.4)}{=} x_0 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ -\Omega \sin \Omega t \end{pmatrix}}_{\vec{x}_1(t)} + v_0 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{pmatrix}}_{\vec{x}_2(t)} \qquad (7)$$

Allgemeinere Aussage: die homogene lineare DG

$$\dot{\vec{x}} = \underline{\underline{A}}(t)\, \vec{x} \qquad \text{mit} \qquad \underline{\underline{A}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n), \quad \vec{x} \in \mathbb{C}^n \qquad (1)$$

hat i.A. n linear unabhängige Lösungen, $\vec{x}_j(t)$, $j = 1, \dots, n$

(Definitionsbereich der Lösungen)

[d.h. falls $\sum_{j=1}^{n} a^j \vec{x}_j(t) = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow a^j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ (2)

(analog zur Definition von "linearer Unabhängigkeit" von Vektoren).]

Für zeitabhängige A-Matrix erfordert die Konstruktion einer Lösung von (1) fortgeschrittene Methoden (Fourier-Analysis)

Im Folgenden betrachten wir als zeitunabhängige Koeffizienten: $\underline{\underline{A}}\cancel{(t)} = \underline{\underline{A}}$ (2)

(iv) Exponentialansatz und Eigenwertproblem

$$\dot{\vec{x}}(t) \overset{(i.2)}{=} \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}(t) \quad \text{mit} \quad \vec{A} \in \text{mat}(\mathbb{C},n,n) \quad \text{zeitunabhängige Matrix} \tag{1}$$

mit Anfangsbedingung: $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ (2)

Für n=1, lautet die homogene DGL, $\dot{x} = a\,x$ mit Lösung $x(t) = x_0 e^{at}$ (3)

Für allgemeines n machen wir analogen exp-Ansatz, aber mit Vektor-Vorfaktor:

exp-Ansatz: $\vec{x}(t) = \vec{v}\, e^{\lambda t}$ Zeitabhängigkeit nur im Exponenten! zeitunabhängiger Vektor, $\in \mathbb{C}^n$ (4)

(4) in (1): $\underline{\underline{A}} \cdot (\vec{v}\, \cancel{e^{\lambda t}}) \overset{(1)}{=} \dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\vec{v}\, e^{\lambda t}) = \lambda\, \vec{v}\, \cancel{e^{\lambda t}}$ (5)

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \lambda\, \vec{v} \tag{6}$$

Für nicht-triviale Lösung ($\vec{v} \neq 0$) muss $\vec{v}$ ein Eigenvektor von $\underline{\underline{A}}$ sein !
λ ein Eigenwert von $\underline{\underline{A}}$ sein ! (7)

Sei $\underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar (andere Fälle diskutieren wir hier nicht).

Dann existiert ein Satz von n linear unabhängigen Eigenvektoren (1)

$\vec{v}_j$, $j = 1, \dots, n$ mit dazugehörigen Eigenwerten λ_j (2)

d.h. $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_j = \lambda_j\, \vec{v}_j \qquad j = 1, \dots, n$ (3)

Allg. Lösung der homogenen DG ist Summe über alle Eigenlösungen:
(laut Superpositionsprinzip)
$\vec{x}(t) = \sum_j c^j\, \vec{v}_j\, e^{\lambda_j t}$ (4)
c^j durch Anfangsbed. bestimmt

Anfangsbedingung: $\vec{x}(0) \overset{(4)|_{t=0}}{=} \sum_j \vec{v}_j\, c^j$ (5) (analog zu Gl. (I.4), mit $\vec{v}_j$ statt $\hat{e}_j$)

i-Komponente: $x^i(0) \overset{(5)}{=} \sum_j \underbrace{v^i_j}_{\equiv S^i{}_j} c^j$ (6) sei $\underline{\underline{S}} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix}$ (7)

Kompaktnotation: $\vec{x}(0) = \underline{\underline{S}} \cdot \vec{c}$ (8) $\Rightarrow \vec{c} = \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{x}(0)$ (9)

Also ist Lösungstragie:
- Eigenwerte finden (Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden, usw.)
- Eigenvektoren finden
- Konstanten c^j so bestimmen, dass Anfangsbedingungen erfüllt sind.

Alternative Herleitung von Gl. (C7.3p4 & 9) C7.3p'

$$\dot{\vec{x}}(t) \overset{(i.2)}{=} \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}(t) \qquad (1)$$

explizit für n=3:

$$\dot{x}^1(t) = a^1{}_1 x^1(t) + a^1{}_2 x^2(t) + a^1{}_3 x^3(t)$$
$$\dot{x}^2(t) = a^2{}_1 x^1(t) + a^2{}_2 x^2(t) + a^2{}_3 x^3(t)$$
$$\dot{x}^3(t) = a^3{}_1 x^1(t) + a^3{}_2 x^2(t) + a^3{}_3 x^3(t)$$

Die Differentialgleichungen für $\dot{x}^i(t)$ sind durch die Matrix A "gekoppelt".
Falls A diagonalisierbar ist, lassen sich die Gleichungen "entkoppeln", durch eine Basistransformation in die Eigenbasis von A:

Sei $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ eine Eigenbasis von A: $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j$ (2)

Diagonalisierende Ähnlichkeitstransf.: $\underline{\underline{S}} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, (3) $\quad \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (3')

Basistransformation in die Eigenbasis:

$$\underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \dot{\vec{x}}(t)}_{= \dot{\vec{y}}(t)} \overset{(p'.1)}{=} \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{S}}}_{= \underline{\underline{D}}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{x}(t)}_{\equiv \vec{y}(t)} \quad (4) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{y}}(t) = \underline{\underline{D}} \cdot \vec{y}(t) \quad (6)$$

mit $\vec{y}(t) \equiv \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{x}(t)$, (5) $\qquad \vec{y}(0) \equiv \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{x}(0)$ (7)

und Rücktransformation: $\vec{x}(t) = \underline{\underline{S}} \cdot \vec{y}(t)$ (8)

(p'.6) in Komponenten: C7.3p''

$$\dot{y}^i(t) \overset{(p'.6)}{=} \underbrace{D^i{}_j}_{\lambda_i \delta^i{}_j} y^j(t) = \lambda_i\, y^i(t) \qquad (1)$$

explizit für n=3:

$$\dot{y}^1(t) = \lambda_1 y^1(t)$$
$$\dot{y}^2(t) = \lambda_2 y^2(t)$$
$$\dot{y}^3(t) = \lambda_3 y^3(t)$$

Gleichungen sind entkoppelt, also ist Lösung einfach:

$$y^i(t) \overset{(1)}{=} e^{\lambda_i t} y^i(0) = \underbrace{e^{\lambda_i t} \delta^i{}_j}_{\equiv (e^{\underline{\underline{D}} t})^i{}_j \ (3)} y^j(0) \qquad (2)$$

Kompaktnotation: $\vec{y}(t) = e^{\underline{\underline{D}} t} \cdot \vec{y}(0)$ (4)

Rücktransformation:

$$\vec{x}(t) \overset{(p'.8)}{=} \underline{\underline{S}} \cdot \vec{y}(t) = \underline{\underline{S}} \cdot e^{\underline{\underline{D}} t} \cdot \vec{y}(0) \overset{(p'.7)}{=} \underline{\underline{S}} \cdot e^{\underline{\underline{D}} t} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{x}(0) \qquad (5)$$

Explizit:

$$x^l(t) = \sum_{ij} \underbrace{(\underline{\underline{S}})^l{}_i}_{\overset{(p'.3)}{=} v^l_i} \underbrace{\left(e^{\lambda_i t} \delta^i{}_j\right)}_{(3)} \underbrace{\left(\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{x}(0)\right)^j}_{\equiv c^j \ (7)} \qquad (6)$$

Lösung: $\vec{x}(t) = \sum_j \vec{v}_j\, e^{\lambda_j t} c^j$ (8) $\quad$ mit $\vec{c} \overset{(7)}{=} \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{x}(0)$ (9)

reproduziert (p.4) ✓ $\qquad$ reproduziert (p.9) ✓

Zusammenfassung: C7.3' Separable Differentialgleichungen

Separable DG:
(x- und t-Abhängigkeit faktorisiert)

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = \frac{g(t)}{h(x(t))} \qquad (1)$$

Lösungsweg: Trennung der Variablen

Trennen: $$dx\, h(x) = g(t)\, dt \qquad (2)$$

Integrieren: $$\int_{(t_0)}^{(t)} d\tilde{x}\, h(\tilde{x}) = \int_{t_0}^{t} g(\tilde{t})\, d\tilde{t} \qquad (3)$$

Stammfunktionen: $$H(x) - H(x_0) = G(t) - G(t_0) \qquad (4)$$

Nach x auflösen: $$x(t) = H^{-1}\big(G(t) - G(t_0) + H(x_0)\big) \qquad (5)$$

Zusammenfassung: C7 Homogene lineare Differentialgleichungen

$$\underbrace{\dot{\vec{x}}(t)}_{\in \mathbb{C}^n} = \underbrace{\underline{\underline{A}}(t)}_{\mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)} \cdot \vec{x}(t) \qquad (1)$$

Superpositionsprinzip (SP) für lineare, homogene DG:

falls $\dot{\vec{x}}_j(t) = \underline{\underline{A}}(t)\cdot\vec{x}_j(t) \quad (j=1,2)$ dann $\vec{x}(t) = \lambda_1 \vec{x}_1(t) + \lambda_2 \vec{x}_2(t)$ (2)

SP ist nützlich für Lösung v. Anfangswertproblem mit $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$, (3)

nämlich: $\vec{x}(t) = \sum_{j=1} c_0^j\, \vec{x}_j(t)$ wobei $\vec{x}_j(t_0) = \hat{e}_j$ (4)

Für konstanten Koeffizienten:

exp-Ansatz: $\vec{x}(t) = \vec{v}\, e^{\lambda t}$ (5)

Zeitabhängigkeit nur im Exponenten!

zeitunabhängiger Vektor, $\in \mathbb{R}^n$

Ergebnis: Allg. Lösung der homogenen DGL ist Summe über alle Eigenlösungen:

$\vec{x}(t) = \sum_j \vec{v}_j\, e^{\lambda_j t}\, c^j$ mit $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \quad j = 1, \dots, n$ (6)

Eigenwertproblem!

$\vec{c} = \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{x}(0)$, (7) $\quad \underline{\underline{S}} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ (8)