Anwendung: gedämpfter harmonischer Oszillator (ohne Antrieb)

$$\dot{\vec{x}} \overset{(3g.5)}{=} \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \tag{1}$$

$$\vec{x} \overset{(3g.6)}{=} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{A}} \overset{(3g.7)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}, \tag{2}$$

Exponentialansatz: $$\vec{v}(t) \overset{(3o.4)}{=} \sum_j c_0^j \, \vec{v}_j \, e^{\lambda_j t}, \qquad \vec{v}_j = \begin{pmatrix} x_j \\ v_j \end{pmatrix} \tag{3}$$

Eigenwertproblem: $$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_j \overset{(3p.3)}{=} \lambda_j \vec{v}_j \tag{4}$$

Charakteristisches Polynom:

$$0 \overset{(L7g.2)\,!}{=} P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) \overset{(L7g.1)}{=} \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \mathbb{1}) \overset{(d.4)}{=} \det \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma-\lambda \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$= \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega^2 \tag{6}$$

Zwischenbemerkung:

(3q.6) folgt auch direkt, wenn ein exp-Ansatz für x(t), $x(t) = x_0 \, e^{\lambda t}$ (1)

eingesetzt wird in die homogene Bewegungsgl. (3g.1),

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(x_0 e^{\lambda t}\right) + 2\gamma \frac{d}{dt}\left(x_0 e^{\lambda t}\right) + \Omega^2\left(x_0 e^{\lambda t}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\underbrace{\left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega^2\right)} x_0 e^{\lambda t} = 0 \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = 0$$

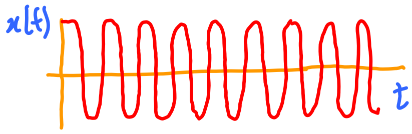
Aber bei so einem Zugang ist zugrundeliegende Struktur des Eigenwertproblems nicht ersichtlich.

Eigenwerte $\overset{(L7g.2)}{=}$ Nullstellen: $$P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda_j) = \lambda_j^2 + 2\gamma\lambda_j + \Omega^2 \overset{!}{=} 0 \tag{4}$$

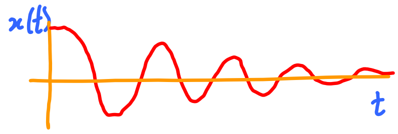
Lösungen von (6): $$\lambda_\pm \equiv \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \tag{5}$$

Qualitatives Verhalten der Lösung hängt vom Verhältnis γ/Ω ab:

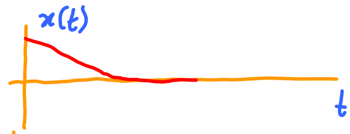
(a): $\gamma = 0$ "frei, ungedämpft": $\lambda_\pm = \pm i\Omega$, (1)



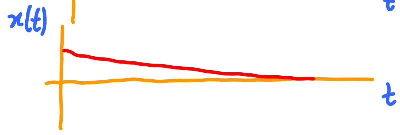
(b): $\gamma < \Omega$ "unterdämpft": $\lambda_\pm = -\gamma \pm i \underbrace{\sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}}_{\equiv \Omega_r}$ (2)



(c): $\gamma = \Omega$ "kritische Dämpfung": $\lambda = -\gamma$ (3)



(d): $\gamma > \Omega$ "überdämpft": $\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2}$ (4)



Reibung führt
- zu exponentiellem Zerfall der Amplitude: $\sim e^{-\gamma t}$ (5)

unterdämpft:
- zu einer Reduktion der Winkelfrequenz Ω (6)
  nach $\Omega_r \equiv \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}$ welche verschwindet für $\gamma = \Omega$ (7)

überdämpft:
- zu völligen Abwesendheit von Schwingungen! (8)

(b) Unterdämpfter Fall: $\gamma < \Omega$: (anderen Fälle: Übungen!)

$$\lambda_\pm \overset{(3s.2)}{=} -\gamma \pm i\Omega_r \quad \text{mit "reduzierter Frequenz"} \quad \Omega_r \equiv \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2} \quad (< \Omega) \qquad (1)$$

Dazugehörigen EV erfüllen:

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_\pm \mathbb{1}) \cdot \vec{v}_\pm \overset{(L7i.1),\ (C7.3p.3)}{=} \vec{0} \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0-\lambda_\pm & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma - \lambda_\pm \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_\pm \\ v_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Lösung v. (3) z.B.: $\begin{pmatrix} x_\pm \\ v_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{pmatrix}$ (4)

[Check: (4) in (3): $(-\lambda_\pm)\cdot 1 + 1 \cdot \lambda_\pm = 0$ ✓
$(-\Omega^2)\cdot 1 - (2\gamma + \lambda_\pm)\lambda_\pm \overset{(3r.5)}{=} 0$]

Allgemeine homogene Lösung:

$$\vec{x}(t) \overset{(3g.3)}{=} c_+ \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{bmatrix} e^{\lambda_+ t} + c_- \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{bmatrix} e^{\lambda_- t} \equiv \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} \qquad (4)$$

[Anmerkung: Die Struktur der EV gewährleistet, dass

$\dot{x}^1(t) \overset{\checkmark}{=} x^2(t)$ (5)

$\Rightarrow \dot{x}(t) \overset{(3g.2)}{=} v(t)$ ✓ (6)

d.h. (3g.1) ist erfüllt ✓]

(v) Komplexe Lösungen als Hilfsmittel zur Konstruktion reeller Lösungen

Betrachte zunächst nur Ortskomponente: $X \overset{(3q.2)}{\equiv} x'$

(3t.1) in (3t.4): $$x(t) \overset{(3t.4)}{=} \left(c_+ e^{+i\Omega_r t} + c_- e^{-i\Omega_r t}\right) e^{-\gamma t} \quad (1)$$

Damit $X(t)$ reell ist, brauchen wir <u>komplexe(!)</u> Amplituden: $c_\pm = |c| e^{\pm i\varphi}$ (2)

Dann
$$x(t) \overset{(1),(2)}{=} |c| \left[e^{i(\Omega_r t + \varphi)} + e^{-i(\Omega_r t + \varphi)} \right] e^{-\gamma t} \quad (3)$$

$\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$

$$= e^{-\gamma t} \, |c| \, 2\cos(\Omega_r t + \varphi) \quad (4)$$

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$$= e^{-\gamma t} \, 2|c| \left[\cos(\Omega_r t) \cos(\varphi) - \sin(\Omega_r t) \sin(\varphi) \right] \quad (5)$$

$$= e^{-\gamma t} \left[a \cos \Omega_r t + b \sin \Omega_r t \right] \quad (6)$$

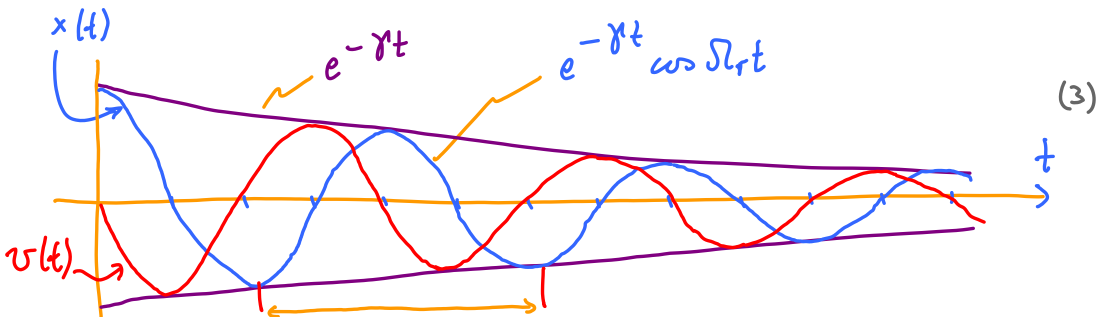
mit $a = 2|c| \cos\varphi \qquad b = -2|c| \sin\varphi$ (7)

$$v(t) \overset{(3t.6)}{=} \dot{x}(t) = e^{-\gamma t} \left\{ \cos(\Omega_r t)\left(b\Omega_r - a\gamma\right) + \sin(\Omega_r t)\left(-a\Omega_r - b\gamma\right) \right\} \quad (1)$$

Anpassen der Konstanten mittels Anfangsbedingung:

z.B.: $$\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \underset{(3v.1)}{\overset{(3u.6)}{=}} \begin{pmatrix} a \\ b\Omega_r - a\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a = x_0 \\ b = (v_0 + x_0\gamma)/\Omega_r \end{array} \quad (2)$$

Skizze für $v_0 = 0$:



(3)

Periode: $2\pi/\Omega_r$

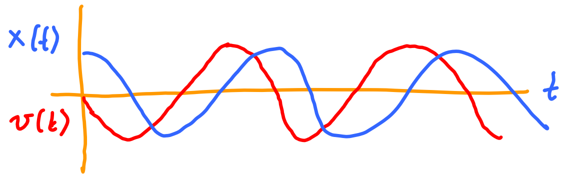
Dämpfungszeit

Amplitude $\frac{x(t)}{x(0)}$ zerfällt nach Zeit $1/\gamma$ auf $1/e$ (4)

Die anderen Fälle (qualitativ und in aller Kürze)

C7.3w

(a) Keine Dämpfung: $\gamma = 0$: $\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \pm i\Omega \Rightarrow e^{\lambda t} = e^{\pm i\Omega t}$ (1)



reine Oszillationen:

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi) \quad (2)$$

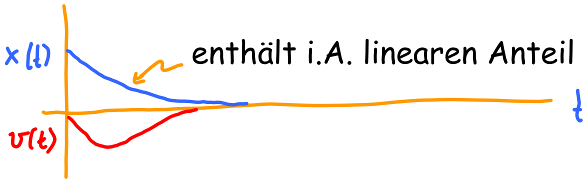
$$v(t) = -\Omega A \sin(\Omega t + \varphi) \quad (3)$$

(c) Kritisch gedämpft: $\gamma = \Omega$: $\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = -\gamma$

nur eine Lösung! $c(t)\, e^{-\gamma t}$

Finde andere mittels "Variation der Konstanten"

(siehe S. C7.4c)

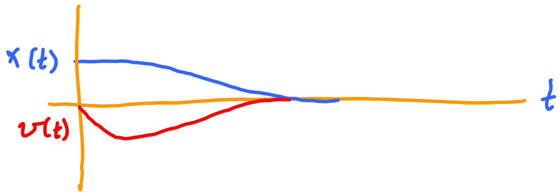


$$x(t) = (x_0 + v_1 t)\, e^{-\gamma t} \quad (4)$$

$$v(t) = (v_1 - \gamma x_0)\, e^{-\gamma t} \quad (5)$$

(d) Überdämpft: $\gamma > \Omega$:

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \underbrace{-\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\gamma^2 - \Omega^2}_{>0}}}_{<\gamma} \equiv -\tilde{\gamma}_{\pm} < 0 \quad (6)$$



gar keine Oszillationen: $e^{\lambda t} = e^{-\tilde{\gamma}_{\pm} t}$ (7)

C7.5 Inhomogene lineare DG 1.Ordnung

C7.4a

Inhomogene lineare DG 1. Ordnung hat folgende allgemeine Form:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t) \quad \text{'Inhomogenität'} \quad (1)$$

Satz: Lösung v. (1)

kann geschrieben werden als Summe $\quad \vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$ (2)

der allgemeinen <u>homogenen</u> Lösung $\quad \dot{\vec{x}}_h(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \vec{x}_h(t)$ (3)

und einer "speziellen" oder "partikulären" <u>inhomogenen</u> Lösung, $\quad \dot{\vec{x}}_p(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \vec{x}_p(t) + \vec{b}(t)$ (4)

<u>Check:</u> $\dot{\vec{x}}(t) \overset{(3)}{=} \dot{\vec{x}}_h(t) + \dot{\vec{x}}_p(t)$

$$\overset{(4,5)}{=} \underline{\underline{A}} \cdot \left(\vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)\right) + \vec{b}(t) \overset{(3)}{=} \underline{\underline{A}}(t) \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t) \checkmark \quad (5)$$

<u>Rezept zur Lösung einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung:</u>

(i) Finde allgemeine homogene Lösung

(ii) Finde eine partikuläre Lösung -- Methode hierzu: 'Variation der Konstanten'

(iii) Addiere (i) + (ii)

Homogene DG für n = 1

C7.4b

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = a(t)\, x(t) \quad \text{mit} \quad x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$

Trennung der Variablen liefert allgemeine Lösung:

Trennung und Integration:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}} = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, a(\tilde{t}) \qquad (2)$$

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \ln(x) - \ln(x_0) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, a(\tilde{t}) \qquad (3)$$

Umkehrfunktion liefert gesuchte Lösung:

$$x(t) = x_0 \exp \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, a(\tilde{t}) \qquad (4)$$

Check:

$$\dot{x}(t) = a(t)\, x_0 \exp \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, a(\tilde{t}) = a(t)\, x(t) \checkmark \qquad (5)$$

Beispiel 2:

$$\dot{x} = 2t\,x \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0 \qquad (6)$$

Lösung:

$$x(t) \overset{(4)}{=} x_0 \exp \int_0^t d\tilde{t} \cdot 2\tilde{t} = x_0\, e^{t^2} \qquad (7)$$

Inhomogene Lösung: Methode der 'Variation der Konstanten' (zunächst für n=1)

C7.4c

Angenommen, Lösung der homogenen Gleichung ist bekannt: $\dot{x}_h = a(t)\, x_h$ (1)

Gesucht: partikuläre Lösung der inhomogenen DGL: $\dot{x}_p = a(t)\, x_p + b(t)$ (2)

Ansatz: $x_p(t) = c(t)\, x_h(t)$ (der Vorfaktor c, normalerweise konstant, sei nun t-abhängig, d.h. "variabel") (3)

(3) eingesetzt in die inhomogene DGL (2):

$$\frac{d}{dt}\left[c(t)\, x_h(t)\right] - a(t)\left[c(t)\, x_h(t)\right] = b(t) \qquad (4)$$

Produktregel:

$$\dot{c}(t)\, x_h(t) + \underbrace{c(t)\, \dot{x}_h(t) - c(t)\, a(t)\, x_h(t)}_{(1)\; = 0} = b(t) \qquad (5)$$

Wir erhalten DGL für $c(t)$:

$$\dot{c}(t) = \frac{b(t)}{x_h(t)} \qquad (6)$$

Elementar zu lösen, siehe (C7h.3): $c(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, \frac{b(\tilde{t})}{x_h(\tilde{t})}$ (7)

erfüllt $c(t_0) = 0$:

Beispiel 3: (aufbauend auf Beispiel 2) $\dot{x} = 2tx + te^{t^2}$ (1)

Homogene Lösung bereits bekannt, (c.7): $x_h(t) = x_0 e^{t^2}$ (2)

Variation der Konstanten: $x_p(t) \overset{(h.3)}{=} c(t)\, e^{t^2}$ (3)

(3) eingesetzt in (1): $\frac{d}{dt}\left[c(t)\, e^{t^2}\right] - 2t\left[c(t)\, e^{t^2}\right] \overset{(1)}{=} t e^{t^2}$ (4)

$$\dot{c}(t)\, e^{t^2} + \cancel{c(t)} 2te^{t^2} - 2t\cancel{c(t)}\, e^{t^2} = te^{t^2} \quad (5)$$

$$\left.\dot{c}(t) = \frac{t\cancel{e^{t^2}}}{\cancel{e^{t^2}}}\right\} \text{ entspricht (4c.6): } \frac{b(t)}{x_h(t)} \quad (6)$$

$$c(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad (7)$$

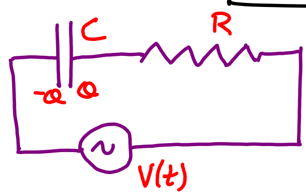
Gesuchte partikuläre Lösung: $x_p(t) \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}t^2 e^{t^2}$ (8)

Allgemeine Lösung: $x(t) \overset{(4a.2)}{=} x_h(t) + x_p(t) \overset{(2,3)}{=} \left(x_0 + \frac{1}{2}t^2\right) e^{t^2}$ (9)

durch Anfangsbedingung festgelegt

Check: $\frac{d}{dt}\left[\left(x_0 + \frac{1}{2}t^2\right)e^{t^2}\right] = 2t\left(x_0 + \frac{1}{2}t^2\right)e^{t^2} + te^{t^2} = 2t\,x(t) + te^{t^2} \overset{\checkmark}{=} (1)$ (10)

Beispiel 3: RC Schaltkreis



Spannung am Kondensator: $V_c(t) = \frac{Q(t)}{C}$ (1)

Spannung am Widerstand: $V_R(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t)$ (2)

Spannungsquelle: $V(t) = V_c(t) + V_R(t) \overset{(1),(2)}{=} \frac{Q(t)}{C} + R\dot{Q}(t)$ (3)

Lineare DGL: $\dot{Q} = -\frac{1}{RC}Q + \frac{1}{R}V(t)$ (4)

Bestimme zunächst homogene Lösung [d.h., setze V(t)=0] $\dot{Q}_h \overset{(4)}{=} -\frac{1}{RC}Q_h$ (5)

Lösung bereits bekannt: Exponentieller Zerfall [siehe (C7.1b)]: $Q_h(t) = \tilde{Q}\, e^{-t/\tau}$ (6)

mit $\tau \overset{(C7b.4)}{=} RC$ (hat Dimension einer Zeit, heißt "RC-Zeitkonstante")

Nächster Schritt: suche eine partikuläre Lösung von (4e.4): C7.4f

(4e.4):

$$\dot Q_p + \frac{1}{\tau} Q_p = \overbrace{\frac{1}{R} V(t)}^{b(t)} \qquad (1)$$

$\tau = RC$

Variation der Konstanten: Ansatz:

$$Q_p(t) \overset{(4.3)}{=} \underbrace{\tilde Q(t)}_{c(t)} \underbrace{e^{-t/\tau}}_{x_h(t)} \qquad (2)$$

(4c.6): $\dot c(t) = \frac{b(t)}{x_h(t)}$

$$\dot{\tilde Q}(t) \overset{(4c.6)}{=} \frac{V(t)}{R} \, e^{+t/\tau} \qquad (3)$$

Elementar zu lösen,
siehe (C7.3'a.5):

$$\tilde Q(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde t \, \frac{V(\tilde t)}{R} \, e^{+\tilde t/\tau} \qquad (4)$$

Partikuläre Lösung:
(4) in (2)

$$Q_p(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde t \, \frac{V(\tilde t)}{R} \, e^{-(t-\tilde t)/\tau} \qquad (5)$$

Allgemeine Lösung:
$Q \overset{(4a.2)}{=} Q_h + Q_p$

$$Q(t) = Q' \underbrace{e^{-t/\tau}}_{(4e.6)} + \int_{t_0}^{t} d\tilde t \, \frac{V(\tilde t)}{R} \, e^{-(t-\tilde t)/\tau} \qquad (6)$$

neue Konstante: Q'

Anpassen der Konstanten Q': C7.4g

$$Q_0 \overset{!}{=} Q(t_0) \overset{(2)}{\Longrightarrow} Q' = Q_0 \, e^{t_0/\tau} \qquad (1)$$

Gesuchte eindeutige Lösung:

$$Q(t) \overset{(4f.6)}{=} Q_0 \, e^{-(t-t_0)/\tau} + \int_{t_0}^{t} d\tilde t \, \frac{V(\tilde t)}{R} \, e^{-(t-\tilde t)/\tau} \qquad (2)$$

$\tau = RC$

homogen: freie Lösung inhomogen: getriebene Lösung

Spezialfall: zeit<u>un</u>abhängige Spannung: $V(t) = V_0$ (3)

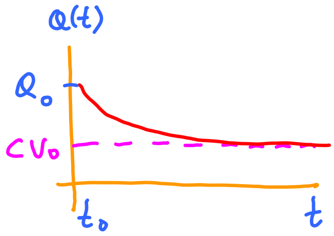
dann

$$\int_{t_0}^{t} d\tilde t \, \frac{\overset{V_0}{\cancel{V(\tilde t)}}}{R} \, e^{-(t-\tilde t)/\tau} = \tau \frac{V_0}{R} \, e^{-(t-\tilde t)/\tau} \Big|_{t_0}^{t} = V_0 C \left[1 - e^{-(t-t_0)/\tau} \right] \qquad (4)$$

$\tau = RC$

$$\Longrightarrow \quad Q(t) = (Q_0 - V_0 C) \, e^{-(t-t_0)/\tau} + V_0 C \qquad (5)$$

$$\xrightarrow{t-t_0 \to \infty} V_0 C \qquad (6)$$



C7.5 Inhomogenes System von linearen DG 1.Ordnung mit konst. Koeff.

Variation der Konstanten für $n > 1$ möglich, aber i.A. schwierig. Ausnahme: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\cancel{t})$

Also betrachten wir nun

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t) \quad (1) \qquad \begin{cases} \vec{A} \in mat(\mathbb{C}, n, n) & \text{zeitunabhängige Matrix} \\ \vec{b}(t) \in \mathbb{C}^n & \text{zeitabhängige Inhomogenität} \end{cases}$$

mit Anfangsbedingung: $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ (2)

(i) Lösung für homogene DG per Exponential-Ansatz (bereits bekannt)

$$\vec{x}_h(t) \overset{(C7.3p.4)}{=} \sum_{j=1}^{n} c_h^j \, \vec{v}_j \, e^{\lambda_j t} \quad (3) \qquad \text{mit} \qquad \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

durch Anfangsbedingungen bestimmt

Eigenwertproblem!

Diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation: $\vec{S} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ (4')

(ii) Partikuläre Lösung für inhomogene DG: per Variation der Konstanten

Ansatz:
[analog zu (4c.3)]

$$\vec{x}_p(t) \overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{n} c_p^j(t) \, \vec{v}_j \, e^{\lambda_j t} \quad (5)$$

Inhomogene DG (4h.1):

$$\vec{b}(t) = \left(\frac{d}{dt} - \underline{\underline{A}} \cdot \right) \vec{x}_p(t) \quad (1)$$

$$\overset{(4h.5)}{=} \sum_j \left(\frac{d}{dt} - \underline{\underline{A}} \cdot \right) c_p^j(t) \, \underbrace{\vec{v}_j}_{(1)} e^{\lambda_j t} \quad (2)$$

$$= \sum_j \left(\dot{c}_p^j(t) + \lambda_j \cancel{c_p^j(t)} - \cancel{c_p^j(t)} \lambda_j \right) \vec{v}_j \, e^{\lambda_j t} \quad (3)$$

$$\sum_j b^j(t) \, \vec{v}_j \overset{!}{=} \vec{b}(t) = \sum_j \dot{c}_p^j(t) \, \vec{v}_j \, e^{\lambda_j t} \quad (4)$$

Trick: Zerlege $\vec{b}(t)$ in Eigenbasis von $\underline{\underline{A}}$

Eigenvektoren sind linear unabhängig, also folgt aus (4):

$$\dot{c}_p^j \cancel{e^{\lambda_j t}} = b^j(t) \, e^{-\lambda_j t} \qquad \forall j = 1, \dots, n \quad (5)$$

(5) ist elementar lösbar, siehe (C7.3'a.5):

$$c_p^j(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t} \; b^j(\tilde{t}) \, e^{-\lambda_j \tilde{t}} \quad (6) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_p^j(t_0) = 0 \\ \vec{x}_p(t_0) = \vec{0} \end{cases} \quad (7)$$

(iii) Allgemeine Lösung von (4h.1): C7.4j

$$\vec{x}(t) \overset{(4a.2)}{=} \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t) \overset{(4h.3)}{=} \sum_j \vec{v}_j\, e^{\lambda_j t}\, c_h^j + \vec{x}_p(t) \qquad (1)$$

Bestimme Konstanten mittels Anfangsbedingung:

$$\vec{x}(t_0) = \sum_j \vec{v}_j\, \underbrace{e^{\lambda_j t_0}\, c_h^j}_{\equiv c^j_{h0}} + \overbrace{\vec{x}_p(t_0)}^{(4i.7)\ = \vec{0}} \qquad (2)$$

i-Komponente:

$$x^i(t_0) = \sum_j \underbrace{v^i_j}_{\overset{(4h.4')}{} S^i_j} c^j_{h0} \qquad (3)$$

Invertiert:

$$c_h^j e^{\lambda_j t_0} = c^j_{h0} = (S^{-1})^j{}_i\, x^i(t_0) \qquad \text{[vergleiche C7.3p.9)]} \qquad (4)$$

$$c^j_h = e^{-\lambda_j t_0} (S^{-1})^j{}_i\, x^i(t_0) \qquad (5)$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator mit Antrieb C7.4k

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \Omega^2 x = \cancel{0}\ f(t) \qquad (1)$$

Matrix-Form:

$$\dot{x} = v \qquad (2)$$

$$\dot{v} = -\Omega^2 x - 2\gamma v + f(t) \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \underbrace{f(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{} \qquad (4)$$

$$\dot{\vec{x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} + \vec{b} \qquad (5)$$

Unterdämpfter Fall:

$$\lambda_\pm \overset{(C7.3s.2)}{=} -\gamma \pm i\,\Omega_r \qquad (6)$$

(i) Homogene Lösung:

(bereits bekannt, siehe Seite C7.3t)

$$\vec{x}_h(t) \overset{(C7.3t.4)}{=} c_+ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{bmatrix}}_{\vec{v}_+} e^{\lambda_+ t} + c_- \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{bmatrix}}_{\vec{v}_-} e^{\lambda_- t} \qquad (7)$$

(ii) Konstruktion einer partikulären Lösung, mittels Var. d. Konstanten: C7.4k

Ansatz laut (4h.5):
$$\vec{x}_p(t) = c_+(t)\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ \lambda_+\end{bmatrix}}_{\vec{v}_+} e^{\lambda_+ t} + c_-(t)\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ \lambda_-\end{bmatrix}}_{\vec{v}_-} e^{\lambda_- t} \qquad (1)$$

Zerlegung v. Antrieb in Eigenbasis von A, laut (4i.4)

$$\vec{b} \overset{(4k.4)}{=} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} f(t) = \frac{1}{\underbrace{\lambda_+ - \lambda_-}_{\overset{(4k.6)}{=} 2i\Omega_r}}\left[\begin{pmatrix}1\\ \lambda_+\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ \lambda_-\end{pmatrix}\right] f(t) \equiv b_+(t)\,\vec{v}_+ + b_-(t)\,\vec{v}_- \qquad (2)$$

$$\Longrightarrow \quad b_\pm(t) = \pm\frac{f(t)}{2i\Omega_r} \qquad (3)$$

Lösung für $c_\pm(t)$ laut (4i.7):

$$c_\pm(t) \overset{(4i.7)}{=} \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; b_\pm(\tilde{t})\, e^{-\lambda_\pm \tilde{t}} \overset{(3)}{=} \pm\int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; \frac{f(\tilde{t})}{2i\Omega_r}\, e^{-\lambda_\pm \tilde{t}} \qquad (4)$$

Für partikuläre Lösung, setze (4k.4) in (4k.1): C7.4l

$$\begin{pmatrix}x_p(t)\\ v_p(t)\end{pmatrix} = \vec{x}_p(t) \overset{(4k.1)}{=} c_+(t)\begin{bmatrix}1\\ \lambda_+\end{bmatrix} e^{\lambda_+ t} + c_-(t)\begin{bmatrix}1\\ \lambda_-\end{bmatrix} e^{\lambda_- t} \qquad (1)$$

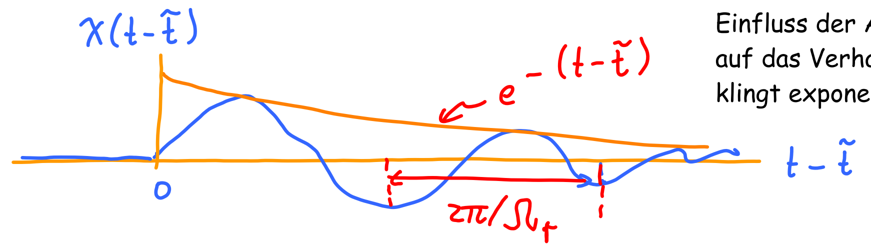
$$\overset{(4k.4)}{=} \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; \frac{f(\tilde{t})}{2i\Omega_r}\left[\begin{bmatrix}1\\ \lambda_+\end{bmatrix} e^{\underbrace{\lambda_+(t-\tilde{t})}} - \begin{bmatrix}1\\ \lambda_-\end{bmatrix} e^{\underbrace{\lambda_-(t-\tilde{t})}}\right] \qquad (2)$$

(k.1): $e^{(-\gamma + i\Omega_r)(t-\tilde{t})}$ $\qquad e^{(-\gamma - i\Omega_r)(t-\tilde{t})}$

Orts (1.)-Komponente hiervon liefert:

$$\sin A = \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i} \qquad (3)$$

$$x_p(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; f(\tilde{t})\; \underbrace{\frac{e^{-\gamma(t-\tilde{t})}}{\Omega_r}\sin\Omega_r(t-\tilde{t})}_{\equiv\, \chi(t-\tilde{t})} \qquad (4)$$



Einfluss der Antriebskraft zum Zeitpunkt $\tilde{t}$
auf das Verhalten der Lösung zum Zeitpunkt t
klingt exponentiell ab

(5)

Zusammenfassung: Inhomogene lineare DG 1. Ordnung

Lineare DG: $\underbrace{\dot{\vec{x}}(t)}_{\in \mathbb{C}^n} = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t)$ — falls $=0$: homogen; falls $\neq 0$: inhomogen (1)

$\underline{\underline{A}} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

Allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DG: $\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$ (2)

Allgemeine homogene Lösung: $\dot{\vec{x}}_h(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \vec{x}_h(t)$ (3)

(irgendeine) Partikuläre Lösung: $\dot{\vec{x}}_p(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \vec{x}_p(t) + \vec{b}(t)$ (4)

1D (n=1):

homogene Lösung (Trennung d. Variablen): $x_h(t) = X_0 \exp \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, a(\tilde{t})$ (5)

partikuläre Lösung (Variation d. Konstanten): $x_p(t) = c(t)\, x_h(t)$ (6)

mit: $c(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, \dfrac{b(\tilde{t})}{x_h(\tilde{t})}$ (7)

Zusammenfassung: Inhomegene lineare DG mit konstanten Koeffizienten

$\dot{\vec{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t)$, $\quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\cancel{t}) \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$, $\vec{b}(t) \in \mathbb{C}$ (1)

(i) Suche Lösung für homogene DGL per Exponential-Ansatz:

e-Ansatz: $\vec{x}_h(t) = \vec{v}\, e^{\lambda t}$ (2)

Zeitabhängigkeit nur im Exponenten!

zeitunabhängiger Vektor, $\in \mathbb{R}^n$

Ergebnis: Allg. Lösung der homogenen DGL ist Summe über alle Eigenlösungen:

$\vec{x}_h(t) = \sum_j c_h^j\, \vec{v}_j\, e^{\lambda_j t}$ mit $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j$, $j = 1, \dots, n$ (3)

durch Anfangsbedingungen bestimmt

Eigenwertproblem!

(ii) Partikuläre Lösung für inhomogene DGL: per Variation der Konstanten

$\vec{x}_p(t) = \sum_j c_p^j(t)\, \vec{v}_j\, e^{\lambda_j t}$, (4)

(zerlegt in Eigenbasis von $\underline{\underline{A}}$)

mit $c_p^j(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, b^j(\tilde{t})\, e^{-\lambda_j \tilde{t}}$ und $\vec{b}(t) = \sum_j b^j(t)\, \vec{v}_j$ (5)

(iii) Allgemeine Lösung: $\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$ (6)