C6 Fourier-Kalkulus

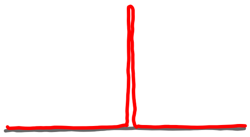
Ziel: geschickte Darstellungen für Funktionen

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

zu finden, und zwar als Linearkombinationen von 'Basis-Funktionen' im Funktionenraum.

Jean Baptiste Joseph Fourier 1768-1839

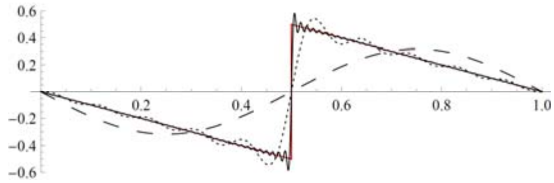
6.2 delta-Funktion: unendlich scharf gepeakte Funktion



6.1 Fourier-Reihen: $f: [0,L] \to \mathbb{C}$

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_k \underbrace{e^{ikx}}_{\psi_k(x)} \tilde{f}_k$$

Linearkombination v. periodischen Funktionen



6.3 Fourier-Reihen für periodische Funktionen: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = f(x+L)$

6.4 Fourier-Integrale: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k)$

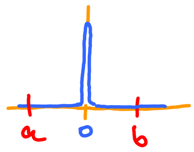
6.5 Allgemeine Struktur:
Basis für Funktionenraum $\quad f = \frac{1}{L} \sum_k \psi_k \tilde{f}_k \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \sum_i \vec{w}_i v_i$

Vielfältigste Anwendungen in der Physik: Schwingungen, Wellen, Hydrodynamik, Optik, Signalverarbeitung, Elektromagnetismus, Quantenmechanik, Feldtheorie, ...

6.2 Dirac - $\delta(x)$ Funktion:

(Hilfsmittel zur Beschreibung scharfer Peaks)

$\delta(x)$ ist ein unendlich hoher, infinitesimal scharfer Peak bei x = 0 :

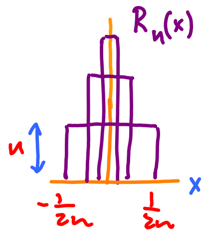


Werte: $$\delta(x) \text{ "="} \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

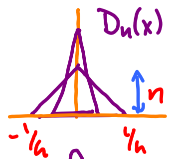
Normierung: $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1 \quad (2)$$

Aufzufassen als Limes einer Folge immer schärferer, normierter Peaks.

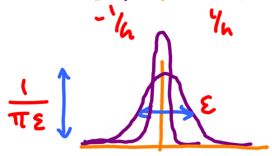
<u>Beispiele:</u>



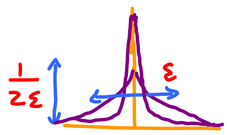
Rechtecke: $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} R_n(x) \quad (3)$ $\quad$ Fläche $= n \frac{1}{n} = 1$



Dreiecke: $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} D_n(x) \quad (4)$ $\quad$ Fläche $= \frac{1}{2} n \frac{2}{n} = 1$



Lorentz-Peaks: $\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2+\varepsilon^2} \quad (5)$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\varepsilon/\pi}{x^2+\varepsilon^2} = 1$

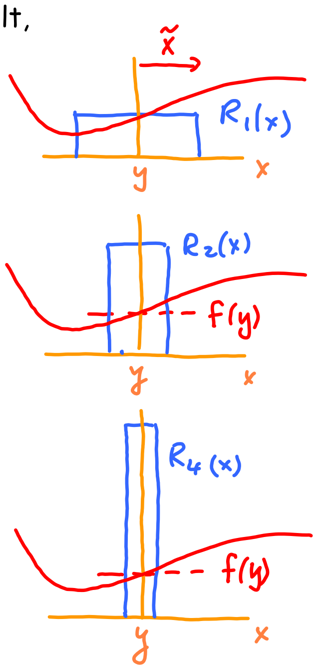


Exp.-Peaks: $\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon} e^{-|x|/\varepsilon} \quad (6)$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|x|/\varepsilon} = 1$

Wird $\delta(x)$ für sich allein betrachtet, existiert der Limes nicht, denn $\delta(0) = \infty$ (1) C6.2c

Allerdings ist der Limes wohldefiniert, wenn $\delta(x)$ unter einem (verallgemeinerten) Integral vorkommt, für das die Konvention festgelegt wird, das Integral zu berechnen, <u>bevor</u> der Limes gebildet wird. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dann gilt,

z.B. für (b.3):



$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-y) f(x) \overset{x-y \equiv \tilde{x}}{\equiv} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}\, R_n(\tilde{x})\, f(y+\tilde{x}) \qquad (2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} d\tilde{x}\, n\, \underbrace{f(y+\tilde{x})}_{\simeq f(y)} = \lim_{n\to\infty} f(y)\, n \cdot \underbrace{\tilde{x}\Big|_{-1/2n}^{1/2n}}_{1/n} = f(y) \qquad (3)$$

Weil $R_n(\tilde{x})$ nur im Bereich $-\frac{1}{2n} \le \tilde{x} \le \frac{1}{2n}$ Gewicht hat, können wir im Limes $n \to \infty$ unter dem Integral $f(y+\tilde{x}) \simeq f(y)$ ersetzen! Annahme dabei: bei y ist $f(x)$ hinreichend glatt.

<u>'delta-Funktion'</u>: C6.2d

$\delta_y(x) \equiv \delta(x-y)$ ist eine "verallgemeinerte Funktion" oder "Distribution", (definiert über Folgen), d.h. eine Abbildung v. Funktionen auf Zahlen mittels Integration:

$$\delta_y : \left\{ \begin{array}{l} \text{Vektorraum v. Funktionen} \\ f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto f(x) \end{array} \right\} \to \mathbb{C}, \qquad (1)$$

$$f \mapsto \int_I dx\, \delta_y(x) f(x) = f(y) \qquad \forall\, y \in I \qquad (2)$$

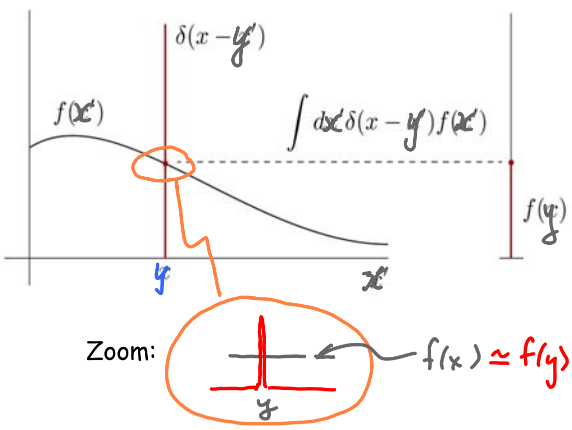
Definierende Eigenschaft:
für <u>alle</u> f(x), und <u>alle</u> $y \in I$, gilt:

(i) $\int_I dx\, \delta_y(x)\, f(x) \overset{(2)}{=} f(y)$ (3)

Hieraus folgt:

(ii) [(3), mit f(x) = 1] $1 = \int_I dx\, \delta_y(x)$ (4)

'Gewicht' der delta-Funktion = 1



(iii) laut (3) muss delta-Funktion überall $= 0$ sein,
ausser bei $x = y$;
aber laut (4) muss Gewicht = 1 sein.

Also muss sie 'unendlich scharf gepeakt' sein:

$$\delta_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq y \qquad (5) \\ \infty & \text{für } x = y \qquad (6) \end{cases}$$

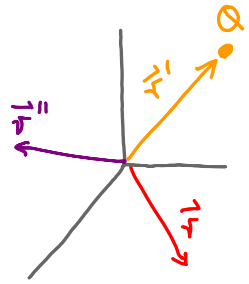
Beispiel: Anwendung von $\delta^{(3)}(\vec{r})$ in der Physik

C6.2e

3-dimensionale delta-Funktion der Position: $\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') := \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$ (1)

mit $\underbrace{\int dx \int dy \int dz}_{\equiv \int d\vec{r}}\ \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')\, f(\vec{r}) = f(\vec{r}\,')$ (2)

Dimension: $[\delta^{(3)}(\vec{x})] = (\text{Länge})^{-3} = (\text{Volumen})^{-1}$



Eine "Punktladung" Q bei $\vec{r}\,'$
hat folgende Ladungsdichte bei $\vec{r}$: $\rho(\vec{r}) = Q\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')$ (3)

(mathematische Idealisierung einer Ladungsverteilung,
deren Ausdehnung kleiner ist als anderen Lägenskalen des Problems)

Gesamtladung: $\int d\vec{r}\,\rho(\vec{r}) \overset{(3)}{=} \int d\vec{r}\, Q\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') \overset{(2)}{=} Q$ ✓ (4)

Potential einer Punktladung: $V(\vec{r}\,'') = \int d\vec{r}\, \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}\,''-\vec{r}|} \overset{(3)}{=} \int d\vec{r}\, \frac{Q\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}\,''-\vec{r}|} \overset{(2)}{=} \frac{Q}{|\vec{r}\,''-\vec{r}\,'|}$ ✓ (5)

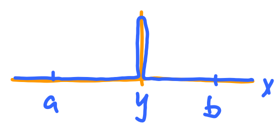
Eigenschaften der delta-Funktion:

[Annahme: f(x) ist hinreichend glatt!]

C6.2f

(können im Rahmen der "Distributionstheorie" (L. Schwartz) sauber bewiesen werden)

1. $\int_a^b dx\, \delta(x-y)\, f(x) = \begin{cases} f(y) & \text{falls } a < y < b \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$ (1)



für alle stetigen oder differenzierbaren Funktionen $f(x)$

Beispiel: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-y)\, x^3 = y^3$ (2)

2. Konsequenz v. 1: $\delta(x-y)\, f(x) \overset{(1)}{=} \delta(x-y)\, f(y)$ (3)

3. Insbesondere: $\delta(x)\, x \overset{(3)}{=} 0$ (4)

Aber: Produktbildung mit singulären Funktionen, insbesondere $\delta^2(x)$, ist nicht möglich!

4. $\delta(x) = \delta(-x)$ (eine gerade Funktion) (5)

denn: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(y-x)\, f(x) \overset{y-x=x'}{=} \underbrace{-\int_{\infty}^{-\infty} dx'}_{=\int_{-\infty}^{\infty} dx'}\, \delta(x')\, f(y-x') \overset{(1)}{=} f(y)$ (6)

$\overset{(1)}{=} \int dx\, \delta(x-y)\, f(x)$ (7)

C 6.2g

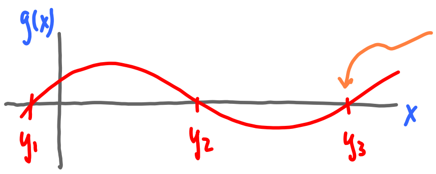
5. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ (1)

denn: $\int dx \; \delta(ax)\, f(x) \overset{x = \frac{1}{|a|}x'}{=} \int \frac{dx'}{|a|} \; \delta(\pm x')\, f\left(\frac{x'}{|a|}\right) \overset{(f.6)}{=} \frac{1}{|a|} f(0)$ (2)

für $a \gtrless 0$

6. $\delta(g(x)) \overset{(2)}{=} \sum_i \frac{1}{|g'(y_i)|}\delta(x-y_i)$ (3) wobei y_i die einfachen Nullstellen von $g(x)$ sind:

(Verallgemeinerung von 5.)



Taylor

$g(x) \simeq 0 + (x-y_i)\, g'(y_i)$ für $x \simeq y_i$ (4)

$\delta(g(x)) = \delta\big((x-y_i)\, g'(y_i)\big) \overset{(3)}{=} \frac{\delta(x-y_i)}{|g'(y_i)|}$ (5)

denn delta( ) $= 0$ falls Argument $\neq 0$

<u>Beispiel für 5:</u>

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \delta(\underbrace{x^2+3x-10}_{g(x)}) \cdot (\underbrace{2x+1}_{f(x)}) \overset{(3)}{=} \frac{1}{|7|}[2\cdot 2+1] + \frac{1}{|-7|}[2\cdot(-5)+1] = -\frac{4}{7}$ (6)

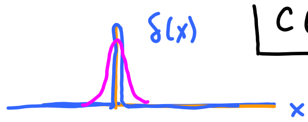
$g(x) = x^2+3x-10 = (x-2)(x+5)$ hat Nullstellen bei: $y_1 = 2$, $g'(y_1) = 7$

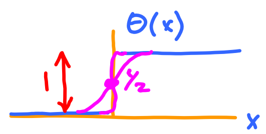
$g'(x) = 2x+3$ $\qquad y_2 = -5$, $g'(y_2) = -7$

C 6.2h

7. $\int_{-\infty}^{x} dx' \; \delta(x') = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{falls}^* \; x = 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \equiv \Theta(x)$ (4)

'Heaviside Theta-Funktion'





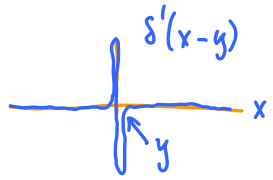
$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)$ (5)

[* Dies folgt, wenn $\delta(x)$ durch eine Folge immer schärferer, symmetrischer, normierter Peaks dargestellt wird; gilt aber nicht falls höhere Potenzen der theta-Funktion, $\Theta^n(x)$ benötigt werden (dann Mathe-Bücher lesen!)]

8. Ableitung der delta-Funktion, $\delta'(x)$ wird definiert durch:

$\int dx \; \delta'(x-y)\, f(x) = -f'(y) = -\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=y}$ (6)

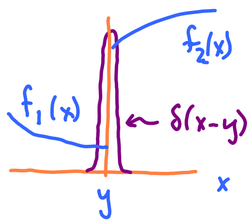
(zu zeigen via partieller Integration)



9. Falls f(x) unstetig ist bei y: $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \forall \; x < y \\ f_2(x) & \forall \; x > y \end{cases}$ (7)

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \delta(x-y)\, f(x) = \frac{1}{2}\left[f_1(y) + f_2(y)\right]$ (8)

linke und rechte Flanke der delta-Funktion haben Gewicht von je 1/2



C6.1a

C6.1 Fourier-Reihen

Ziel: geschickte Darstellungen für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zu finden, und zwar als Linearkombinationen von 'Basis-Funktionen' im Funktionenraum.

Zur Erinnerung: jeder Vektor in $\mathbb{R}^n$ ist darstellbar als Linearkombination v. Basisvekt.:

$$\mathbb{R}^n \ni \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \vec{w}_i \, v^i \qquad (1)$$

$\{\vec{w}_i\}$: Basisvektoren v. $\mathbb{R}^n$

v^i: 'Informationsträger' der Darstellung des Vektors $\vec{v}$

Analoger Ansatz für Funktionen: 'Fourier-Reihe':

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \, \tilde{f}_k \qquad (2)$$

$\{e^{ikx}\}$: 'Basis-Funktionen' im Funktionenraum

$\tilde{f}_k$: 'Informationsträger' der Darstellung der Funktion f

[in diesem Zusammenhang ist Index unten üblich]

Wir werden sehen:

$\{e^{ikx}\}$ ist ein Satz v. 'Basis-Funktionen' im Vektorraum aller Funktionen, mit nützlichen Eigenschaften, z.B. Orthonormalität;
insbesondere: Ableitung läßt sich leicht berechnen !

C6.1b

Sei $f: I \to \mathbb{C}$, $I = [0, L]$ (1)

$x \mapsto f(x)$ ← eine beliebige, gegebene Funktion

Fourier-Reihen-Ansatz für f(x):

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_k \underbrace{e^{ikx}}_{\text{'Fourier-Moden'}} \, \tilde{f}_k \qquad (2),\ (3)$$

$\tilde{f}_k$: 'Fourier-Komponenten'

Summe $\sum_k$ geht über alle k-Werte der Form $k = \frac{2\pi n}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$ (4)
(manchmal wird auch n, statt k, als Index benutzt)

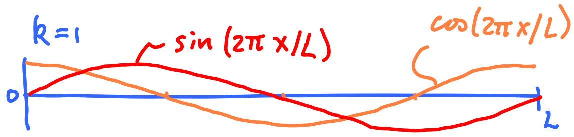
Eigenschaften der 'Fourier-Moden': $e^{ikx} \overset{\text{(Euler)}}{=} \cos kx + i \sin kx$ (5)

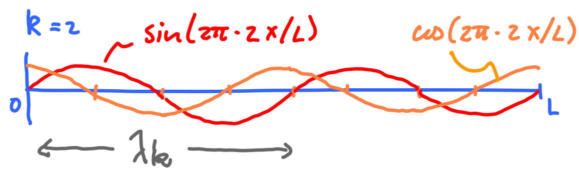
1. Periodisch, mit 'Wellenlänge' $\lambda_k = \frac{2\pi}{k} \overset{(4)}{=} \frac{L}{n}$ (6)

denn:

$$e^{ik(x + m\lambda_k)} = e^{ik\cdot x} \, \underbrace{e^{ik m \frac{2\pi}{k}}}_{\overset{(8)}{=}\,1} = e^{ikx} \qquad (7)$$

$$(e^{2\pi i})^m \overset{\text{(C5.1m.4)}}{=} 1^m = 1 \qquad (8)$$





(3) behauptet: jede Funktion lässt sich als Summe von periodischen Funktionen darstellen !?!

2. Fourier-Moden erfüllen 'periodische Randbedingungen' bzgl. x = 0, x = L: **C6.1c**

$$e^{ik\cdot 0} = e^{ik\cdot L} \quad (1) \qquad \text{[Spezialfall v. (b.7), mit } m\lambda_k = L \text{]}$$

denn: $e^0 = 1$, $\quad e^{ik\cdot L} = e^{i\frac{2\pi n}{L}\cdot L} = e^{i2\pi n} = 1$

3. Fourier-Moden sind 'orthonormal' bezüglich Integration über I: $\int_0^L dx \equiv \int_I dx$ (2)

$$\int_0^L dx\, e^{i(k'-k)x} = \begin{cases} \xrightarrow{k'=k} \int_0^L dx \cdot 1 = L \\ \xrightarrow[(4)]{k'\neq k} \left. \dfrac{e^{i(k'-k)\cdot x}}{i(k'-k)} \right|_0^L \overset{(1)}{=} 0 \end{cases} = L\,\delta_{kk'} \qquad (3)$$

$$\int dx\, e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} \qquad (4)$$

explizit $= \dfrac{1}{i(k'-k)}\left[\underbrace{e^{i2\pi(n'-n)/L\cdot L}}_{=1} - 1\right] = 0$

Falls die Fourier-Reihen-Darstellung (b.3) Sinn macht (mehr dazu später), lassen sich die Fourier-Komponenten $\tilde{f}_k$ folglich wie folgt bestimmen:

Rezept zur Berechnung v. Fourier-Komponenten: gegebenes f(x) in (5) einsetzen!

$$\int_I dx\, e^{-ik\cdot x} f(x) \overset{(b.3)}{=} \frac{1}{L}\sum_{k'} \tilde{f}_{k'} \underbrace{\int_I dx\, e^{ik'\cdot x} e^{-ik\cdot x}}_{(3)\ L\,\delta_{kk'}} = \tilde{f}_k \qquad (5)$$

kühnes Vertauschen v. Integral und Summe

Falls f(x) reell ist, gilt:

$$\overline{f(x)} = f(x) \quad (6) \qquad \overline{\tilde{f}_k} \overset{(5)}{=} \int dx\, e^{+ikx} \overset{(6)\ f(x)}{\overline{f(x)}} \overset{(5)}{=} \tilde{f}_{-k} \qquad (7)$$

<u>Beispiel 1 (trivial):</u> Sei $f(x) = A\cos px$ mit $p \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$ (1) **C6.1d**

Dann: $$\tilde{f}_k \overset{(c.2)}{=} \int_I dx\, e^{-ik\cdot x} f(x) = \int_I dx\, e^{-ik\cdot x} A \underbrace{\cos px}_{(4):\ \frac{1}{2}\left[e^{ipx} + e^{-ipx}\right]} \qquad (2)$$

Hilfsrechnung:

$$e^{\pm i\phi} \overset{\text{(Euler)}}{=} \cos\phi \pm i\sin\phi \qquad (3)$$

$$\cos\phi = \frac{1}{2}\left[e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right] \quad (4) \qquad \sin\phi = \frac{1}{2i}\left[e^{i\phi} - e^{-i\phi}\right] \quad (5)$$

Folglich: $$\tilde{f}_k \overset{(2,4)}{=} \frac{A}{2}\left[\underbrace{\int_I dx\, e^{-ix(k-p)}}_{(c.1)\ L\,\delta_{k,p}} + \underbrace{\int_I dx\, e^{-ix(k+p)}}_{(c.1)\ L\,\delta_{k,-p}}\right] = \frac{A}{2}L\left[\delta_{k,p} + \delta_{k,-p}\right] \qquad (6)$$

Check: (6) eingesetzt in (b.3):

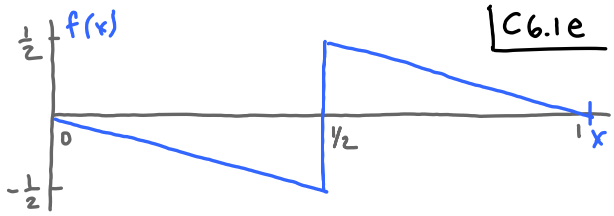
$$f(x) \overset{(b.3)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ik\cdot x}\tilde{f}_k \overset{(6)}{=} \frac{1}{\cancel{L}}\sum_k e^{ik\cdot x} \frac{A\cancel{L}}{2}\left[\delta_{k,p} + \delta_{k,-p}\right] \qquad (7)$$

$$= \frac{A}{2}\left[e^{ip\cdot x} + e^{-ip\cdot x}\right] \overset{(4)}{=} A\cos px \overset{\checkmark}{=} (1) \qquad (8)$$

C6.1e

<u>Beispiel 2:</u>

$$f(x) = \begin{cases} -x & \forall\ x \in [0,\tfrac{1}{2}[\\ 1-x & \forall\ x \in]\tfrac{1}{2},1] \end{cases} \qquad [L=1] \qquad (1)$$



Fourier-Komponenten:

$$\tilde{f}_{k=0} \overset{(c.5)}{=} \int_0^1 dx\; e^{-i0\cdot x}\, f(x) = 0 \qquad (2)$$

$u = -x \qquad u' = -1$

$v = \dfrac{e^{-ikx}}{-ik} \qquad v' = e^{-ik\cdot x}$

$$\tilde{f}_{k\neq 0} = \int_0^{1/2} dx\; e^{-ik\cdot x}(-x) + \int_{1/2}^1 dx\; e^{-ik\cdot x}(1-x) = \int_0^1 dx\; \underbrace{e^{-ik\cdot x}}_{v'}\underbrace{(-x)}_{u} + \int_{1/2}^1 dx\; e^{-ik\cdot x}\cdot 1 \qquad (3)$$

partielle Integration

$$= \left(\overset{v\cdot}{\frac{e^{-ikx}}{-ik}}\right)\overset{u}{(-x)}\Bigg|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 dx \left(\overset{v\cdot}{\frac{e^{-ik\cdot x}}{-ik}}\right)\cdot\overset{u'}{(-1)}}_{=0\ \ (c.1)\text{ mit } k\neq 0} + \frac{e^{-ik\cdot x}}{-ik}\Bigg|_{1/2}^1 \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{-ik}\left[e^{-ik\cdot 1}(-1) - 0\right] + \frac{1}{-ik}\left[e^{-ik\cdot 1} - e^{-ik\cdot 1/2}\right] = \frac{e^{-ik/2}}{+ik} \qquad (5)$$

C6.1f

Für $k \overset{(b.4)}{=} 2\pi n/L$, $n \in \mathbb{Z}$, $L \overset{(e.1)}{=} 1$, gilt: (1)

$$e^{-ik/2} = e^{-i(2\pi n)/2} = \left(e^{-i\pi}\right)^n \overset{(C5.1m)}{=} (-1)^n \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}_{k=2\pi n} \overset{(e.5)}{=} \frac{(-1)^n}{i\,2\pi n} \qquad (2)$$

(2) eingesetzt in Fourier-Reihe:

$$f(x) \overset{(b.3)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}\tilde{f}_k \overset{k=2\pi n}{=} \sum_{n\neq 0\ \leftarrow (e.2)} e^{i(2\pi n)x}\,\frac{(-1)^n}{i\,2\pi n} \qquad (3)$$

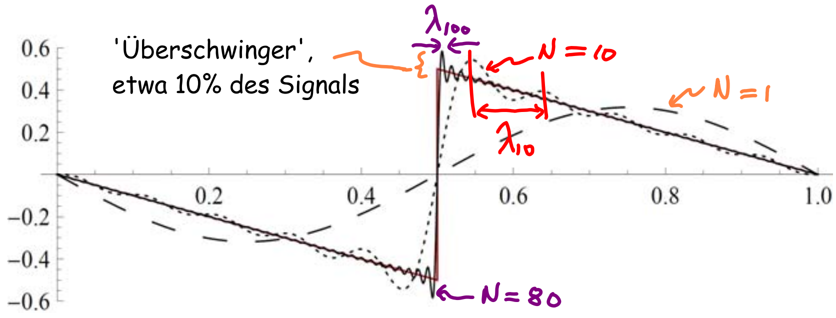
Wellenlänge: $\lambda \overset{(b.6)}{=} \dfrac{1}{m}$

$$= \sum_{m>0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\pi m}\underbrace{\frac{1}{2i}\left[\overset{n=m}{e^{i2\pi m x}} - \overset{n=-m}{e^{-i2\pi m x}}\right]}_{(d.5)\ \sin(2\pi m x)} = \frac{1}{\pi}\sum_{m>0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\sin(2\pi m x) \qquad (4)$$

Beschränkung der Summe auf N Terme liefert Näherung für f(x); je mehr Terme, je genauer: Für $\sum_{m=1}^{N}$ werden Details auf der Skala d. kleinsten Wellenlänge,

$$\lambda_N \overset{(b.6)}{=} \frac{L}{N} \qquad (5)$$

reproduziert.



Allgemeiner Konsistenzcheck:

C6.1g

ist (c.5) für $\tilde f_k$ konsistent mit (b.3) für $f(x)$?

$$f(y) \overset{(b.3)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{iky} \underbrace{\tilde f_k}_{\overset{(c.5)}{=}\int_I dx\, e^{-ikx} f(x)} = \int_I dx\, \underbrace{\frac{1}{L}\sum_k \overbrace{e^{iky}\, e^{-ikx}}^{e^{ik(y-x)}}}_{\equiv\, \delta^{[0]}(y-x)\ (2)} f(x) \qquad (1)$$

Also muss gelten:

$$f(y) = \int_I dx\, \delta^{[0]}(y-x)\, f(x) \qquad (3)$$

mit

$$\delta^{[0]}(x) \overset{(2)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}, \qquad k = \frac{2\pi}{L} n, \quad n \in \mathbb{Z} \qquad (4)$$

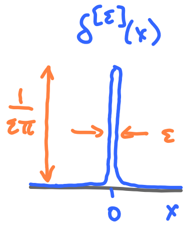
m.a.W., Fourier-Reihenentwicklung (b.3) macht nur dann Sinn, falls $\delta^{[0]}(x)$ eine Darstellung der delta-Funktion ist! Wir werden finden, dass das der Fall ist, weil:

'Konvergenz-generierender Faktor', mit $\varepsilon \to 0^+$

$$\delta^{[\varepsilon]}(x) \equiv \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx - \varepsilon|k|} \qquad (5)$$

$$\xrightarrow{x \neq 0,\ \varepsilon \to 0} 0 \qquad (6)$$

$$\xrightarrow{x/L,\ \varepsilon/L \ll 1} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2+\varepsilon^2} \qquad (7)$$



Folglich:

$$\delta^{[0]}(x) = \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx} = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta^{[\varepsilon]}(x) \overset{(C6.2b.5)}{=} \delta(x) \qquad (8)$$

'Vollständigkeit' der Fourier-Moden

C6.1h

Einige Eigenschaften der Darstellung (g.4) lassen sich auch ohne Konvergenz-generierenden Faktor zeigen:

Normierung:

$$\int_I dx\, \delta^{[0]}(x-y) = \int_I dx\, \overbrace{\frac{1}{L}\sum_k e^{ik(x-y)}}^{(g.4)\ \delta^{[0]}(x-y)} \qquad (1)$$

mutiges Vertauschen v. Integral und Summe:

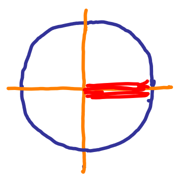
$$= \sum_k e^{-iky}\frac{1}{L}\underbrace{\int_I dx\, e^{ik\cdot x}}_{(c.3)\ = L\delta_{k0}} = 1 \overset{\checkmark}{=} (C6.2d.4) \qquad (2)$$

Funktionswerte von $k = 2\pi n/L$

$$\delta^{[0]}(x) \overset{(g.4)}{=} \frac{1}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i(2\pi n/L)x} \qquad (3)$$

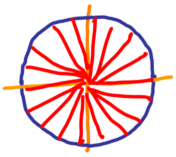
$x=0$:

$$\delta^{[0]}(0) = \frac{1}{L}\sum_n \underbrace{e^{i2\pi n/L\cdot 0}}_{=1} = \infty \overset{\checkmark}{=} (C6.2d.6) \qquad (4)$$



$x \neq 0$: Zunächst intuitiv/schlampig argumentiert:

$$\delta^{[0]}(x\neq 0) = \frac{1}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i(2\pi n/L)\cdot x} = \frac{1}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(e^{i2\pi x/L}\right)^n = 0 \overset{\checkmark}{=} (C6.2d.5) \qquad (5)$$



Summe über alle unterschiedlichen Phasen mittelt sich zu 0

$$\sum_n \left(e^{i\phi}\right)^n = \sum_n e^{in\phi} = 0 \quad \forall\ \phi \neq 0 \qquad (6)$$

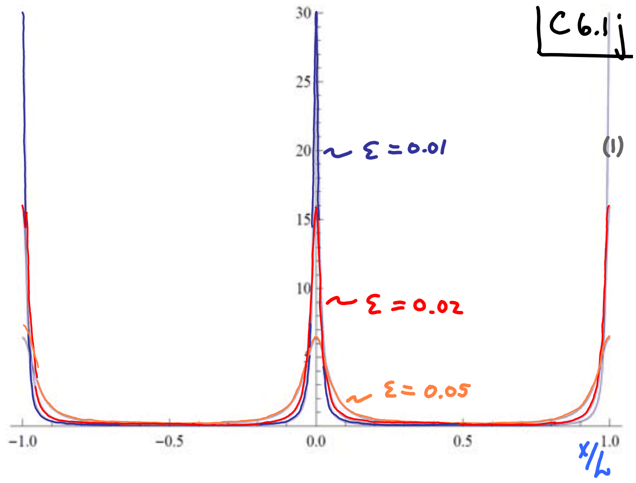
Explizite Formel für $\delta^{[\varepsilon]}(x)$:

$$\delta^{[\varepsilon]}(x) \overset{(i.7)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx - \varepsilon|k|} \qquad (1)$$

$$\overset{\text{Hausaufgabe}}{=} \frac{(1/L)(1 - e^{-\varepsilon 4\pi/L})}{1 + e^{-\varepsilon 4\pi/L} - 2e^{-\varepsilon 2\pi/L}\cos(2\pi x/L)} \qquad (2)$$

Limites:

$$\delta^{[\varepsilon\to 0]}(x \neq 0) = 0, \qquad (3)$$



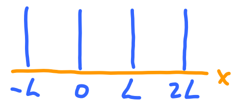
Für $|x|/L \ll 1$, $\varepsilon/L \ll 1$ aber x/ε beliebig:

$$\delta^{[\varepsilon]}(x) \underset{\text{Hausaufgabe}}{\overset{\text{Taylor}}{\simeq}} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2+\varepsilon^2} \overset{(6.2b.5)}{=} \text{Darstellung einer delta-Funktion!} \qquad \delta^{[\varepsilon]}(x=0) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \longrightarrow \infty \qquad (5)$$

Es gilt aber auch: $\delta^{[0]}(x+L) = \delta^{[0]}(x)$ periodisch, mit Periode $= L$ (6)

Zusammenfassend: periodische delta-Funktion:

$$\delta^{[0]}(x) = \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(x - mL) \qquad (7)$$



<u>Parseval-Identität:</u> Seien $f(x)$, $g(x)$ zwei Funktionen v. $[0,L] \to \mathbb{C}$ C6.1k

mit Fourier-Reihen: $k \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$

$$f(x) \overset{(b.3)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}\tilde{f}_k \quad (1) \qquad g(x) \overset{(b.3)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}\tilde{g}_k \qquad (2)$$

dann gilt:

$$\int_0^L dx\, \overline{f(x)}\, g(x) = \int_0^L dx \left[\frac{1}{L}\sum_k e^{-ikx}\bar{\tilde{f}}_k\right]\cdot\left[\frac{1}{L}\sum_{k'} e^{ik'x}\tilde{g}_{k'}\right] \qquad (3)$$

(kühnes Vertauschen von Integral und Summe!)

$$= \frac{1}{L}\sum_k \frac{1}{L}\sum_{k'} \bar{\tilde{f}}_k\, \tilde{g}_{k'} \underbrace{\int_0^L dx\, e^{i(-k+k')\cdot x}}_{\overset{(C6.1c.3)}{=} L\delta_{kk'}} \qquad (4)$$

$$\int_0^L dx\, \overline{f(x)}\, g(x) = \frac{1}{L}\sum_k \bar{\tilde{f}}_k\, \tilde{g}_k \qquad \text{Parseval-Identität} \qquad (5)$$

Speziell:

$$\int_0^L dx\, |f(x)|^2 = \frac{1}{L}\sum_k |\tilde{f}_k|^2 \qquad (6)$$

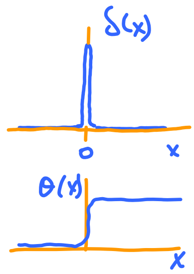
Anmerkung: beide Seiten kann man als Skalarprodukt auf geeignet definierten Vektor-Räumen interpretieren. Dann folgt aus (6), dass die Fouriertransformation eine eins-zu-eins-Abbildung ist, "Winkel und Längen (d.h. Metrik) erhält", somit eine "Isometrie" ist.

Zusammenfassung C6.2 delta-Funktion

Z C6.2

Definierende Eigenschaft: $$\int dx\ \delta(y-x)\, f(x) = f(y)$$ (1)

$\delta(x)$ ist ein unendlich hoher, infinitesimal scharfer Peak bei x = 0 :



Werte: $$\delta(x) \text{ "="} \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \neq 0 \\ \infty & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$ (2)

Normierung: $$\int dx\, \delta(x) = 1$$ (3)

Beliebte Darstellungen:

Lorentz-Peak: $$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2 + \varepsilon^2}$$ (4)

Exp.-Peak: $$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|x|/\varepsilon}$$ (5)

Gauß-Peak: $$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\varepsilon^2}$$ (6)

Wichtige Eigenschaften:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x),$$ (7)

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-y_i)}{|g'(y_i)|}$$ wobei y_i die einfachen Nullstellen von $g(x)$ sind. (8)

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x),$$ (9)

$$\int dx\, \delta'(x-y)\, f(x) = -f'(y)$$ (10)

Zusammenfassung C6.1 Fourier-Reihen

Z C6.1a

$$f : I \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad x \longmapsto f(x), \qquad I = [0, L]$$ (1)

Fourier-Reihen-
Ansatz für f(x): $$f(x) = \frac{1}{L} \sum_{k \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}} \underbrace{e^{ikx}}_{\text{'Fourier-Moden'}}\ \tilde{f}_k$$ (2)

'Fourier-Komponenten'

Rücktransformation: $$\tilde{f}_k = \int_I dx\ e^{-ik\cdot x} f(x)$$ (3)

Eigenschaften der 'Fourier-Moden':
Periodisch, mit Wellenlänge $$\lambda_k = \frac{2\pi}{k} = \frac{L}{n} \qquad e^{ik\cdot(x+L)} = e^{ik\cdot x}$$ (4)

Orthonormalität: $$\int_0^L dx\ e^{i(k'-k)x} = L\,\delta_{kk'}$$ (5)

$k = \frac{2\pi}{L}n$, $k' = \frac{2\pi}{L}n'$

$k - k' = \frac{2\pi}{L}(n-n')$

Vollständigkeit: $$\frac{1}{L}\sum_{k \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}} e^{ikx} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x + mL)$$ periodische delta-Funktion (6)

Parseval-Identität: $$\int_0^L dx\, |f(x)|^2 = \frac{1}{L}\sum_k |\tilde{f}_k|^2$$ (7)