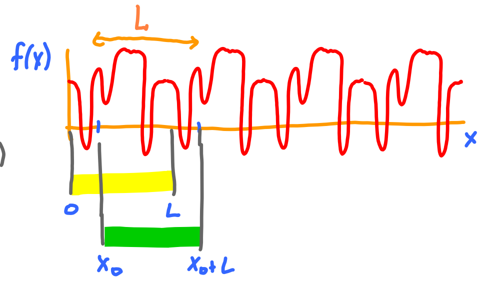
Fourier-Reihen für periodische Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ periodisch, mit Periode L: $f(x+L) = f(x)$ (1)
(und stückweise stetig differenzierbar)

Auch für diesen Fall gilt die Fourier-Reihen-Darstellung (b.3), mit $k \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$:



$$f_{FR}(x) \overset{(b.3)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}\,\tilde f_k \qquad (2)$$

$$\tilde f_k \overset{(c.5)}{=} \int_0^L dx\, e^{-ikx} f(x) = \int_{x_0}^{x_0+L} dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad (3)$$

Integral kann über eine beliebige Periode genommen werden, wegen (1) und (5)

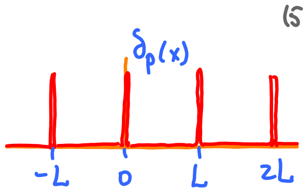
Beweis v. (3): identisch zur Herleitung auf Seite C6.1c

Begründung:

Fourier-Moden sind periodisch: $e^{ik(x+L)} = e^{ikx}\, \overbrace{e^{i(2\pi n/L)\cdot L}}^{e^{i2\pi n}=1} = e^{ikx}$ (4)

Folglich ist auch (2) periodisch: $f_{FR}(x+L) \overset{(2)}{=} \frac{1}{L}\sum_k \overbrace{e^{ik(x+L)}}^{\overset{(4)}{=} e^{ikx}}\,\tilde f_k = f_{FR}(x)$ (5)

Periodische delta-Funktion: $\frac{1}{L}\sum_k e^{ikx} \overset{(g.8)}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(x+mL) \equiv \delta^{[0]}(x)$



[vergleiche (j.2)]

Anmerkung: Falls f(x) nicht ganz glatt ist, sondern nur stückweise stetig differenzierbar ist (d.h. Sprünge hat), gilt (Satz v. Dirichlet):

Die Fourier-Reihe (l.2), $f_{FR}(x)$, konvergiert an allen Stetigkeitsstellen gegen $f(x)$. (1)

An den Unstetigkeitsstellen ist der Wert der Fourier-Reihe gleich dem Mittelwert der einseitigen Grenzwerte:

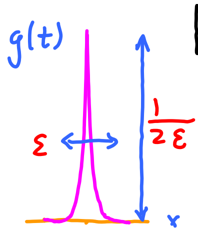
$$f_{FR}(y) = \frac{1}{2}\Big\{\lim_{\Delta x \searrow 0} f(y-\Delta x) + \lim_{\Delta x \searrow 0} f(y+\Delta x)\Big\} \qquad (1)$$

Grund für (1): [vergleiche (g.1)]:

$$f_{FR}(y) \overset{(b.3)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{iky}\,\underbrace{\tilde f_k}_{\overset{(c.5)}{=}\int_I dx\, e^{-ikx} f(x)} = \int_I dx\, \underbrace{\frac{1}{L}\sum_k \overbrace{e^{iky}e^{-ikx}}^{e^{ik(y-x)}}}_{\overset{(g.8)}{=}\delta(y-x)} f(x) = \int_I dx\, \delta(y-x) f(x) \overset{(C6.2h.8)}{=} \qquad (2)$$

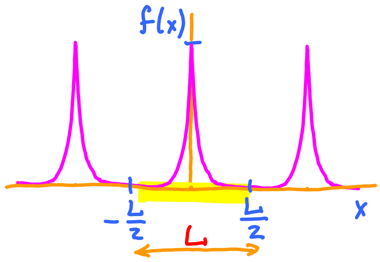
Beispiel: periodische Folge v. scharfen Peaks:

Betrachte normierten 'Exponentialpuls': $$g(x) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|x|/\varepsilon} \qquad (1)$$



Gewicht: $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x) = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\infty} dx\, \frac{1}{\varepsilon} e^{-x/\varepsilon} = -e^{-x/\varepsilon}\Big|_0^{\infty} = 1 \qquad (2)$$

Periodische Kette solcher Peaks: $$f(x) = \frac{1}{L}\sum_{m\in\mathbb{Z}} g(x-mL) \qquad (3)$$



Berechne Fourier-Koeffizienten von $f(x)$, für $\varepsilon \ll L$:

$$\tilde{f}_k \overset{(\ell.3)}{=} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-ikx} \underbrace{f(x)}_{\simeq g(x)} \qquad (4)$$

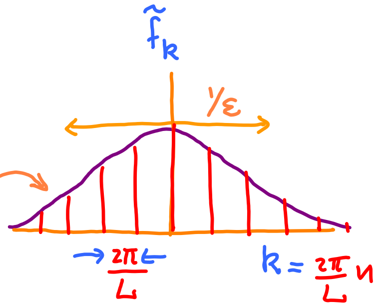
weil $\varepsilon \ll L$ (scharfe Pulse, gut getrennt)
gilt im Interval $x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ dass $f(x) \simeq g(x)$

$$\overset{(1)}{=} \int_0^{L/2} dx \left[e^{-ikx} + e^{ikx}\right] \frac{1}{2\varepsilon} e^{-x/\varepsilon} \qquad (5)$$

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{e^{-(ik+1/\varepsilon)x}}{-(ik+1/\varepsilon)}\Bigg|_0^{L/2} + \text{komplex konjugiert} \qquad (1)$$

$e^{-L/2\varepsilon} \simeq 0$ wenn $\varepsilon \ll L$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} \frac{e^{-(ik+1/\varepsilon)L/2} - 1}{-(ik+1/\varepsilon)} + \text{komplex konjugiert} \qquad (2)$$



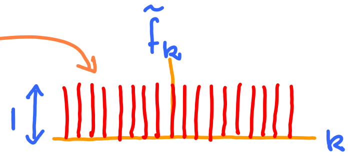
$$\tilde{f}_k = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{i\varepsilon k + 1} + \frac{1}{-i\varepsilon k + 1}\right] = \frac{1}{\varepsilon^2 k^2 + 1} \qquad (3)$$

'Diskretes Frequenzspektrum' ('Frequenzkamm') mit Lorenzkurve als Einhüllenden

Konsistenzcheck:

Im Limes $\varepsilon \to 0$: $$g(x) \xrightarrow[(C6.2b.6)]{\varepsilon \to 0} \delta(x) \qquad (4)$$

$$\tilde{f}_k \overset{(3)}{=} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 1 \quad \forall k \qquad (5)$$



unabhängig von k !

(5) reproduziert die Fourier-Komponenten vom delta-Puls:

$$\delta(x) \overset{(g.8)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx} \cdot \underbrace{1}_{\tilde{f}_k} \qquad (6)$$

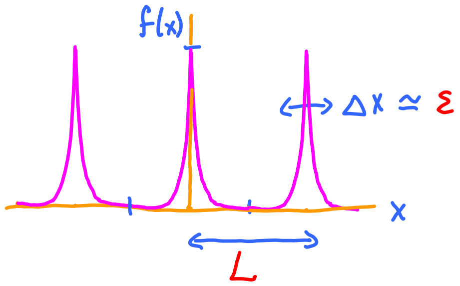
= konsistent mit (5)

Bemerkung: Für $\varepsilon \neq 0$, vergleiche Schärfe der Pulse in

x-Darstellung:

$$f(x) \overset{(n.3)}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\varepsilon}\, e^{-|x-mL|/\varepsilon} \qquad (1)$$

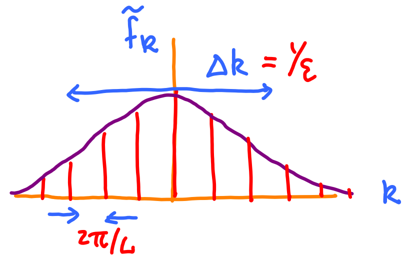
$$\Delta x \simeq \varepsilon \qquad (3)$$



k-Darstellung:

$$\tilde{f}_k \overset{(o.3)}{=} \frac{1}{\varepsilon^2 k^2 + 1} \qquad (2)$$

$$\Delta k = 1/\varepsilon \qquad (4)$$



Faustregel:

$$\Delta x \, \Delta k \simeq 1 \qquad (5)$$

'Fourier-Gegensätzlichkeit'
('Fourier repricosity')

Räumlich scharfe Pulse (Δx klein) haben ein breites 'Spektrum an Wellenlängen' (groß) Δk

Heisenbergs Unschärferelation in der Quantenmechanik ist ganz analog:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (6)$$

(und zu Grunde liegende Mathematik ist auch dort Fourier-Analysis!)

Faltung: Seien $f(x) = f(x+L)$ und $g(x) = g(x+L)$ periodische Funktionen.

Def: 'Faltung von f und g':

$$(f * g)(x) \equiv \int_{x_0}^{x_0+L} dx' \, f(x-x')\, g(x') \qquad (1)$$

Integral über beliebige Periode

Die Faltung ist wieder periodisch:

$$(f * g)(x) = (f * g)(x+L) \qquad (2)$$

Beweis: via Fourier-Darstellung der Faltung: [Details sind analog zu Seite k, Parseval]

$$(f * g)(x) = \int_{x_0}^{x_0+L} dx' \left[\frac{1}{L}\sum_k \tilde{f}_k\, e^{ik(x-x')}\right]\left[\frac{1}{L}\sum_{k'} \tilde{g}_{k'}\, e^{ik'x'}\right] \qquad (3)$$

(kühnes Vertauschen von Integral und Summe)

$$= \frac{1}{L}\sum_k \frac{1}{L}\sum_{k'} \tilde{f}_k\, \tilde{g}_{k'}\, e^{ikx} \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+L} dx'\, e^{i(k'-k)x'}}_{\overset{(C.3)}{=} L\,\delta_{kk'}} \qquad (4)$$

$$(f * g)(x) = \frac{1}{L}\sum_k \underbrace{\tilde{f}_k\, \tilde{g}_k}_{\equiv \widetilde{(f*g)}_k}\, e^{ikx}$$ = offensichtlich wieder periodisch! (5)

Faltungstheorem: Fourierkoeffizient der Faltung ist Produkt der Fourierkoeffizienten:
(nützlich zur Abkürzung von Rechnungen)

$$\widetilde{(f*g)}_k \overset{(5)}{=} \tilde{f}_k\, \tilde{g}_k \qquad (6) \qquad \left[= \tilde{g}_k\, \tilde{f}_k \overset{(6)}{=} \widetilde{(g*f)}_k \right] \qquad (7)$$

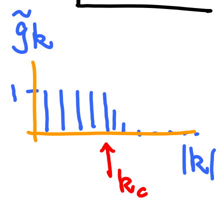
Faltung ist kommutativ:

$$(f*g)(x) \overset{(7)}{=} (g*f)(x)$$

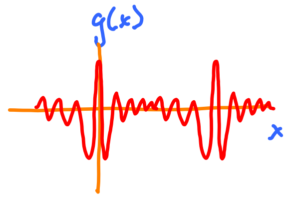
Anwendung v. Faltungstheorem: Tiefpassfilter

C6.1r

Wähle $g(x)$ so, dass $\hat{g}_k = \begin{cases} \simeq 1 & \text{falls } |k| \le k_c \\ \xrightarrow{\text{schnell}} 0 & \text{falls } |k| > k_c \end{cases}$ (1)

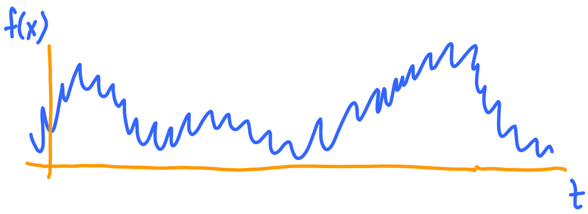


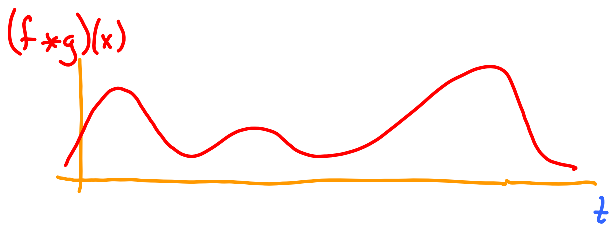
Dann: $(\widetilde{f * g})_k \overset{(9.6)}{=} \hat{f}_k \, \hat{g}_k = \begin{cases} \simeq \tilde{f}_k & \text{falls } |k| \le k_c \\ \xrightarrow{\text{schnell}} 0 & \text{falls } |k| > k_c \end{cases}$ (2)



Somit: $(f * g)(x) \simeq \frac{1}{L} \sum_{|k| < k_c} \hat{f}_k \, e^{ikx}$ (3)

Tiefpassfilter dämpft schnelle Fluktuationen weg, läßt langsame durch !





Fourier-Reihe einer Ableitung:

C6.1s

$f(x) \overset{(b.3)}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \, \tilde{f}_k$ (1) $\qquad \tilde{f}_k \overset{(c.5)}{=} \int_0^L dx \, e^{-ikx} f(x)$ (2)

$\frac{d}{dx}(1)$: $f'(x) \overset{(1)}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \underbrace{(ik\tilde{f}_k)}_{\equiv \tilde{f}'_k \;(4)}$ (3)

Fourier-Komponente von f'(x)

Ist (4) konsistent mit (2) ? Check:

$\tilde{f}'_k \overset{(2)}{=} \int_0^L dx \, \overset{v \,\cdot\, u'}{e^{-ikx} f'(x)} \overset{(8)}{=} \underbrace{\overset{v \,\cdot\, u}{e^{-ikx} f(x)} \Big|_0^L}_{=0} - \int_0^L dx \, (-ik) \overset{v' \,\cdot\, u}{e^{-ik\cdot x} \cdot f(x)}$ (4)

partielle Integration

wegen Periodizität

$= ik \underbrace{\int_0^L dx \, e^{-ik \cdot x} f(x)}_{\overset{(2)}{=}\tilde{f}_k} = ik \, \tilde{f}_k \overset{(4)}{=}$ ✓ (5)

Fazit: Ableiten in x-Darstellung $\Longleftrightarrow$ Multiplikation mit ik in k-Darstellung

Cosinus- und Sinus-Reihen (erhalten durch Umschreiben d. Fourier-Reihe) C6.1t

$$f(x) \overset{(l.2)}{=} \frac{1}{L}\sum_k \overbrace{(\cos kx + i \sin kx)}^{e^{ikx}} \tilde{f}_k , \qquad k = \frac{2\pi}{L} n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{L}\tilde{f}_0}_{\equiv \frac{1}{2} a_0} + \sum_{k>0} \underbrace{\frac{1}{L}(\tilde{f}_k + \tilde{f}_{-k})}_{\equiv a_k} \cos kx + \sum_{k>0} \underbrace{\frac{1}{L}(\tilde{f}_k - \tilde{f}_{-k})\, i}_{\equiv b_k} \sin kx \tag{2}$$

oft nutzt man hier auch die Notation a_n und b_n

$$= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k>0} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] , \qquad k = \frac{2\pi}{L} n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3}$$

wobei

$$a_k \equiv \frac{1}{L}(\tilde{f}_k + \tilde{f}_{-k}) \overset{(l.3)}{=} \frac{1}{L}\int_I dx \, (e^{-ikx} + e^{+ikx}) f(x) \overset{(d.4)}{=} 2\frac{1}{L}\int_I dx \cos kx \, f(x) \tag{4}$$

$$b_k \equiv \frac{1}{L}(\tilde{f}_k - \tilde{f}_{-k})\, i \overset{(l.3)}{=} \frac{1}{L}\int_I dx \, i(e^{-ikx} - e^{+ikx}) f(x) \overset{(d.5)}{=} 2\frac{1}{L}\int_I dx \sin kx \, f(x) \tag{5}$$

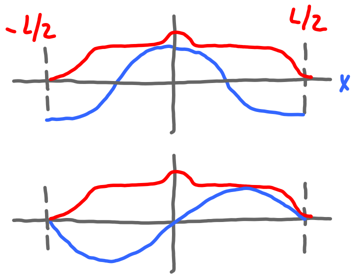
Cos, Sin-Reihen sind nützlich, falls f(x) symmetrisch oder antisymmetrisch ist: C6.1u

Dann wird Berechnung der Fourier-Komponenten erheblich vereinfacht, wenn das Integrationsinterval symmetrisch um x=0 gewählt wird: $\int_{-L/2}^{L/2} dx$

Falls f symmetrisch, mit $f(x) = +f(-x)$: (1)

$$a_k \overset{(t.4)}{=} \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \cos kx \, f(x) \overset{(1)}{=} \frac{4}{L}\int_0^{L/2} dx \cos kx \, f(x) \tag{2}$$

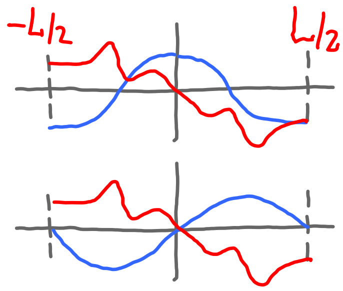
$$b_k \overset{(t.5)}{=} \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \sin kx \, f(x) \overset{(1)}{=} 0 \tag{3}$$



Falls f antisymmetrisch, mit $f(x) = -f(-x)$: (4)

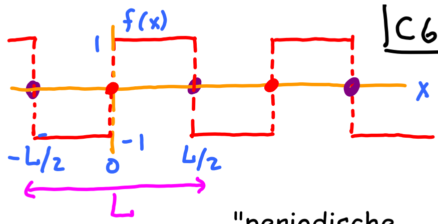
$$a_k \overset{(t.4)}{=} \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \cos kx \, f(x) \overset{(4)}{=} 0 \tag{5}$$

$$b_k \overset{(t.5)}{=} \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \sin kx \, f(x) = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} dx \sin kx \, f(x) \tag{6}$$



Beispiel: Periodische Rechtecksfunktion

C6.1v



$$f(x) = \mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

"Vorzeichenfunktion"

für $-L/2 < x < L/2$, und $f(x) = f(x+L)$ für beliebige x "periodische Fortsetzung" (2)

Fourier-Koeffizienten: Reine Sinus-Reihe, da $f(x) = -f(-x)$ $\Rightarrow$ $a_k \overset{(t.5)}{=} 0$ (3)

$$b_k \overset{(t.6)}{=} \frac{4}{L}\int_0^{L/2} dx\, \sin(kx)\cdot f(x) \overset{(1)}{=} \frac{4}{L}\int_0^{L/2} dx\, \sin(kx)\cdot 1 = -\frac{4}{L}\frac{1}{k}\cos kx \Big|_0^{L/2} \qquad (4)$$

$Lk = 2\pi n$

$$= \frac{4}{2\pi n}\Big[1 - \underbrace{\cos \pi n}_{(-1)^n}\Big] = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (5)$$

periodisches $$[\mathrm{sgn}(x)]_{FR} \overset{(S.3)}{=} \sum_{k>0}^{\infty} b_k \sin(kx) \overset{n=2m+1}{=} \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)2\pi/L\cdot x]}{2m+1} \qquad (6)$$

Für $x = L/2$ liefert (6): $$\left[\mathrm{sgn}\left(\tfrac{L}{2}\right)\right]_{FR} \overset{(6)}{=} \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin[(2m+1)\pi]}{2m+1} \overset{\checkmark}{=} 0$$ {Mittelwert siehe (m.1)] $\frac{1}{2}[1 + (-1)] = 0$ (7)

Anmerkung zu Notationskonventionen

C6.1w

Warnung: es gibt in der Literatur viele unterschiedliche Konventionen!

Vorzeichen von k im Exponenten ist Konvention: $$f(x) = \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}\tilde{f}_k, \quad \tilde{f}_k = \int_0^L dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad (1)$$

Alternativ wäre auch möglich: $$f(x) = \frac{1}{L}\sum_k e^{-ikx}\tilde{\tilde{f}}_k, \quad \tilde{\tilde{f}}_k = \int_0^L dx\, e^{+ikx} f(x) \qquad (2)$$

Auch der Vorfaktor L kann anders gewählt werden; z.B.: $$f(x) = \sum_k e^{ikx}\overset{\approx}{f}_k, \quad \overset{\approx}{f}_k = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad (3)$$

Oder auch: $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k e^{ikx}\overset{\approx}{\tilde{f}}_k, \quad \overset{\approx}{\tilde{f}}_k = \frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^L dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad (4)$$

In Physik-Anwendungen, wo Funktion von der Zeit abhängt, wird die Fourier-Transformation von Zeit-Darstellung zu Frequenz-Darstellung meist wie folgt definiert:

Für $f: [0,\tau] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$: $\omega_n = \frac{2\pi}{\tau}n$, $n \in \mathbb{Z}$ (5)

anderes Vorzeichen als bei xk-Darstellung (1) !

Fourier-Reihen-Ansatz: $$f(t) = \frac{1}{\tau}\sum_n e^{-i\omega_n t}\tilde{f}_n, \quad (6) \qquad \tilde{f}_n = \int_0^\tau dt\, e^{+i\omega_n t} f(t) \qquad (7)$$

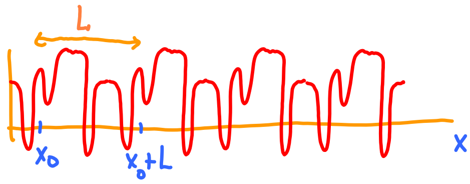
Zusammenfassung C6.1 Fourier-Reihen für periodische Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ periodisch, mit Periode L: $f(x+L) = f(x)$ (1)

$$f_{FR}(x) \overset{(b.3)}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k , \quad k \in \frac{2\pi n}{L}, \; n \in \mathbb{Z} \qquad (2)$$

$$\tilde{f}_k \overset{(c.5)}{=} \int_0^L dx\, e^{-ikx} f(x) = \int_{x_0}^{x_0+L} dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad (3)$$

beliebige Periode



Faltung: $$(f * g)(x) \equiv \int_{x_0}^{x_0+L} dx'\, f(x-x')\, g(x') \qquad (4) \qquad \widetilde{(f*g)}_k = \tilde{f}_k \tilde{g}_k \qquad (5)$$

Ableitung in Fourier-Darstellung: $$\tilde{f}'_k \overset{(2)}{\equiv} \int_0^L dx\, e^{-ikx} f'(x) = ik \tilde{f}_k \qquad (6)$$

Zeit-Darstellung:

Für $f : [0, \tau] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto f(t)$: $\quad \omega_n = \frac{2\pi}{\tau} n$, $n \in \mathbb{Z}$ (7)

Fourier-Reihen-Ansatz: $$f(t) = \frac{1}{\tau} \sum_n e^{-i\omega_n t} \tilde{f}_n , \qquad (8) \qquad \tilde{f}_n = \int_0^\tau dt\, e^{+i\omega_n t} f(t) \qquad (9)$$

Ableitung: $$\tilde{f}'_n = \int_0^\tau dt\, e^{+i\omega_n t} f'(t) = -i\omega_n \tilde{f}_n \qquad (10)$$