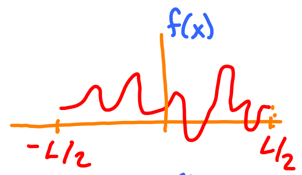
C6.3 Fourier-Transformation

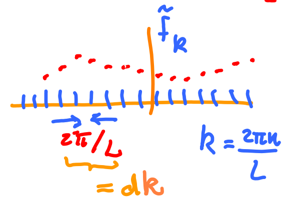
Entspricht Fourier-Reihe für $L = \infty \Longrightarrow$ 'Fourier-Integral'

Für endliches L: $f(x) \overset{(C6.1b.3)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}\tilde f_k$ (1)

$x \in [-L/2, L/2]$

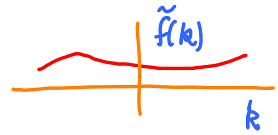
$k = \frac{2\pi n}{L}, \ n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \tilde f_k = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-ikx} f(x)$ (2)





Für $L \to \infty$ stellt $\tilde f_k$ eine kontinuierliche Funktion $\tilde f(k)$ dar:

$$\tilde f_k \xrightarrow{L\to\infty} \tilde f(k) \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad (3)$$



und Fourier-Summe wird ein Integral:

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\underbrace{\frac{2\pi}{L}}_{= dk}\sum_k F(k) \xrightarrow{L\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}F(k) \qquad (4)$$

$(1)_{L\to\infty}$: $\qquad f(x) \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi} e^{ikx}\tilde f(k)$ $\qquad$ 'Fourier-Transformation' (5)

Interpretation: f(x) wird zerlegt als Summe von unendlich vielen Funktionen e^{ikx} mit kontinuierlicher Variable k und Gewichtungsfaktor $\tilde f(k)$

Fourier-Transformation (zusammenfassend) $\quad f: [-\infty, \infty] \to \mathbb{C}$

Fourier-Transformation: $\quad f(x) \overset{(a.5)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi} e^{ikx}\tilde f(k)$ (1) $\quad \xleftarrow{L\to\infty} \quad f(x) \overset{(C6.1b.3)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}\tilde f_k$ (1')

Fourier-Rücktransformation: $\quad \tilde f(k) \overset{(a.3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x)$ (2) $\quad \xleftarrow{L\to\infty} \quad \tilde f_k \overset{(C6.1c.5)}{=} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-ikx} f(x)$ (2')

δ als Funktion v. x: $\quad \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$ (3) $\quad \xleftarrow{L\to\infty} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x - mL) \overset{(C6.1l.5)}{=} \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}$ (3')

δ als Funktion v. k: $\quad 2\pi\delta(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}$ (4) $\quad \xleftarrow{L\to\infty} \quad L\,\delta_{k,0} \overset{(C6.1c.3)}{=} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-ikx}$ (4')

[folgt aus (3)*, mit $k \leftrightarrow -x$]

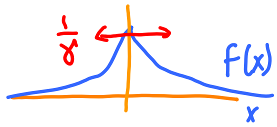
Konsistenzcheck: $\quad \tilde f(k) \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'}{2\pi} e^{ik'x}\tilde f(k')}^{(1)\ = f(x)}$ (5)

(1) in (2):

analog zu (C6.1g.1) $\quad$ mutiges Vertauschen der Integrale: $\quad = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'}{2\pi}\tilde f(k') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k'-k)x}}_{(4)\quad 2\pi\delta(k-k')} = \tilde f(k)$ ✓ (6)

Beispiel:

Exponentialfunktion: $f(x) = e^{-|x|\gamma}$ (1)



$$\tilde{f}(k) \overset{(b.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad (2)$$

2.ter Term:
$x \to -x$

$\int_{-\infty}^{0} dx \to \int_{+\infty}^{0} (-dx) = \int_{0}^{\infty} dx$

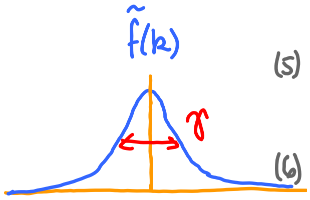
$$= \int_0^\infty dx\, e^{-x(ik+\gamma)} + \overbrace{\int_{0}^{\infty} dx\, e^{-x(-ik+\gamma)}}^{\text{Komplex-konjugierte vom ersten Term}} \qquad (3)$$

$$= \frac{\cancel{e^{-(ik+\gamma)\infty}}^{=0} - 1}{-(ik+\gamma)} + \frac{-1}{-(-ik+\gamma)} \qquad (4)$$

$$= \frac{(-\cancel{ik}+\gamma) + (\cancel{ik}+\gamma)}{(ik+\gamma)(-ik+\gamma)} \qquad (5)$$

Fouriertransform.
v. Exp-Fkt ist
Lorenz-Fkt:

$$\tilde{f}(k) = \frac{2\gamma}{k^2+\gamma^2} \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, e^{-|x|\gamma} \qquad (6)$$



'Fourier-Gegensätzlichkeit
[vergleiche (C6.1p)]

Übrigens:

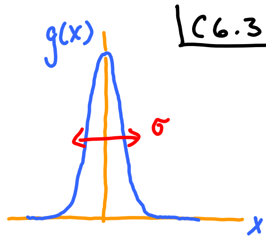
$\lim_{\gamma\to 0}$ (6):

$$2\pi\,\delta(k) = \underbrace{\lim_{\gamma\to 0} \frac{\gamma/\pi}{k^2+\gamma^2}}_{(C6.2b.5)\ \delta(k)} \cdot (2\pi) \overset{(6)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \cdot 1 \qquad (7)$$

Bestätigt (b.3) ✓

Beispiel: Gauß-Funktion

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-x^2/2\sigma^2} \qquad (1)$$



Normierung:
(siehe Bronstein)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x) = 1 \qquad (2)$$

Fourier-
Transformierte:

$$\tilde{g}(k) \overset{(b.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, g(x) \qquad (3)$$

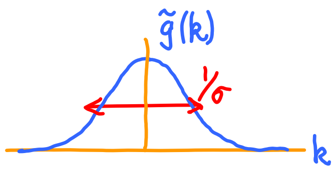
"quadratisches
Ergänzen"

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{(x^2 + 2\sigma^2 ikx)}_{= (x+\sigma^2 ik)^2 - (\sigma^2 ik)^2}} \qquad (4)$$

Substitution:
$x + \sigma^2 ik \equiv \bar{x}$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\bar{x}^2}}_{\overset{(2)}{=}1 \text{ normiert!}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sigma^4 k^2} \qquad (5)$$

$$\tilde{g}(k) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2} \qquad (6)$$



"Fourier-Transformierte einer Gauß-Funktion ist wieder eine Gauß-Funktion,
mit invers proportionaler Breite: je breiter $g(x)$, d.h. je größer σ, je schmaller $\tilde{g}(k)$
[diese Tatsache impliziert Heisenberg-Unschärferelation...!]

Anmerkung: es gibt in der Literatur viele unterschiedliche Konventionen! C6.3e

1) Physiker benutzen unterschiedliche(!) Konventionen für Längen und Zeiten:

$$f(x,t) \overset{(b.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{+ikx}\, e^{-i\omega t}\, \tilde{f}(k,\omega) \qquad (1)$$

$$\tilde{f}(k,\omega) \overset{(b.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-ikx}\, e^{i\omega t}\, f(x,\omega) \qquad (2)$$

e^{ikx} ist periodisch:

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ = 'Wellenlänge'

k = 'Wellenzahl'

$e^{-i\omega t}$ ist periodisch:

$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ = 'Periode'

ω = 'Kreisfrequenz'

2) In d Raum-Dimensionen:

$$f(\vec{x},t) \overset{(1)}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^dk}{2\pi}}_{\int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dk_d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \underbrace{e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}}}_{e^{ik_1x_1}\, e^{ik_2x_2} \dots e^{ik_dx_d}}\, e^{-i\omega t}\, \tilde{f}(\vec{k},\omega) \qquad (3)$$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$

$\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d)$

$\vec{k}\cdot\vec{x} = x_1k_1 + \dots + x_dk_d$

$$\tilde{f}(\vec{k},\omega) \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d^d x \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, e^{i\omega t}\, f(\vec{x},t) \qquad (4)$$

3) Schlampige Physikernotation: oft wird dasselbe Symbol benutzt für eine Funktion $f(t)$ und ihre Fourier-Transformierte $f(\omega)$ [statt $\tilde{f}(\omega)$] C6.3f

Man erkennt aber am Argument, t oder ω, welche von beiden gemeint ist. (1)

4) Man kann den Faktor 2π schieben wohin man will:

4.1) Mathematische Literatur bevorzugt oft symmetrische Schreibweise:

$$\tilde{f}(\omega) \equiv \sqrt{2\pi}\, \tilde{\tilde{f}}(\omega)$$

$$f(t) \overset{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\tilde{f}}(\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (2)$$

$$\tilde{\tilde{f}}(\omega) \overset{(e.2)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{+i\omega t} \qquad (3)$$

4.2) Physik benutzt oft $\omega = 2\pi f$

"Winkelfrequenz" Frequenz

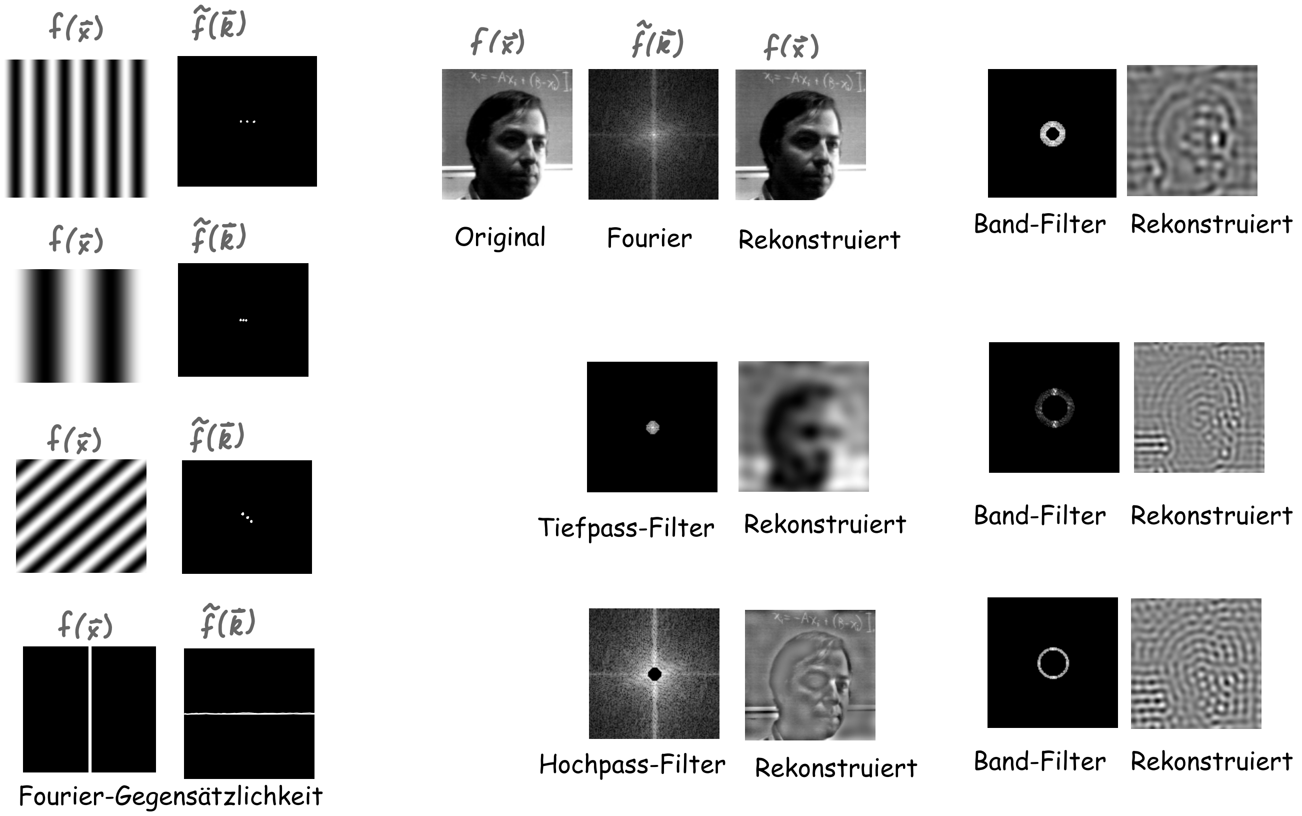
$f(t) \equiv F(t)$, $\tilde{f}(\omega) \equiv \tilde{F}(f)$

$$F(t) \overset{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} df\, \tilde{F}(f)\, e^{-i2\pi f t} \qquad (4)$$

$$\tilde{F}(f) \overset{(e.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, F(t)\, e^{i2\pi f t} \qquad (5)$$

Intuition: wie wird Information in einer Fourier-Transformation gespeichert ? C6.3g

cns-alumni.bu.edu/~slehar/fourier/fourier.html



<u>Allgemeine Eigenschaften:</u> C6.3h

$$\tilde f(\omega) \overset{(e.2)}{=} \int dt\, f(t)\, e^{i\omega t} \qquad (1)$$

1) Für eine reelle Funktion, $f(t) = \overline{f(t)}$ (2) gilt:

1a) $\tilde f(\omega) = \overline{\tilde f(-\omega)}$ (3)

[konsistent mit (C6.1m.4) für Fourier-Reihen]

denn: $\overline{\tilde f(-\omega)} \overset{(1)}{=} \int dt\, \underbrace{\overline{f(t)}}_{\overset{(3)}{=} f(t)}\, e^{+i\omega t} \overset{(1)}{=} \tilde f(\omega)$ □ (4)

1b) $\mathrm{Re}\, \tilde f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \cos \omega t$ (5)

$\mathrm{Im}\, \tilde f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \sin \omega t$ (7)

denn: $\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right] = \cos \omega t$ (6)

[einsetzen in (1)]

$\mathrm{Im}\left[e^{i\omega t}\right] = \sin \omega t$ (8) □

1c) falls f(t) $\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}$ ist,

$f(-t) = \pm f(t)$ (9)

gilt: $\tilde f(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \text{reell} \\ \text{imaginär} \end{array} \right.$ (10)

denn

$\overline{\tilde f(\omega)} \overset{(1)}{=} \int dt\, \underbrace{\overline{f(-t)}}_{\overset{(9)}{=} \pm f(t)}\, e^{+i\omega t} \overset{(1)}{=} \pm \tilde f(\omega)$ (11)

Substitution $t \to -t$ □

Weitere Fourier-Transformations-Identitäten

Seien f, g zwei Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto g(x)$

Parseval-Identität:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \overline{f(x)}\, g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \overline{\tilde{f}(k)}\, \tilde{g}(k) \quad (1) \qquad \xleftarrow{L\to\infty} \qquad \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \overline{f(x)}\, g(x) \overset{(C6.1k.5)}{=} \frac{1}{L} \sum_k \overline{\tilde{f}_k}\, \tilde{g}_k \quad (1')$$

Plancherel-Theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, |\tilde{f}(k)|^2 \quad (2) \qquad \xleftarrow{L\to\infty} \qquad \int_{-L/2}^{L/2} dx\, |f(x)|^2 \overset{(C6.1k.6)}{=} \frac{1}{L} \sum_k |\tilde{f}_k|^2 \quad (2')$$

Faltung:

$$(f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x-x')\, g(x') = (g * f)(x) \quad (3) \qquad \xleftarrow{L\to\infty} \qquad (f * g)(x) \overset{(C6.1q.1)}{\equiv} \int_{-L/2}^{L/2} dx'\, f(x-x')\, g(x') = (g * f)(x) \quad (3')$$

Faltungstheorem:

$$\widetilde{(f * g)}(k) = \tilde{f}(k)\, \tilde{g}(k) \quad (4) \qquad \xleftarrow{L\to\infty} \qquad \widetilde{(f * g)}_k = \tilde{f}_k\, \tilde{g}_k \quad (4')$$

Parseval-Identität, explizit: (vergleiche Seite C6.1k)

Hier zur Abwechslung in der $t \leftrightarrow \omega$ Version; [die $x \leftrightarrow k$ Version ist analog]

Seien f, g zwei Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$, $t \mapsto g(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \overline{f(t)}\, g(t) \overset{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{+i\omega t}\, \overline{\tilde{f}(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\, e^{-i\omega' t}\, \tilde{g}(\omega') \quad (1)$$

(kühnes Vertauschen der Integrale)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\, \overline{\tilde{f}(\omega)}\, \tilde{g}(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\; e^{it(\omega-\omega')}}_{\overset{(b.3)}{=}\ 2\pi\,\delta(\omega-\omega')} \quad (2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \overline{\tilde{f}(\omega)}\, \tilde{g}(\omega) \quad (3)$$

Speziell:

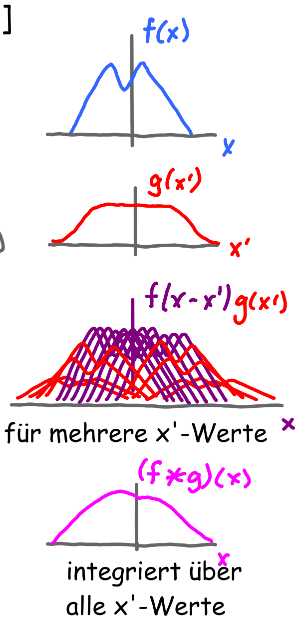
$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, |f(t)|^2 \overset{(3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, |\tilde{f}(\omega)|^2 \quad (4)$$

Faltungstheorem, explizit: (vergleiche Seite C6.1q)

Definition: "Faltung"

$$(f*g)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt'\; f(t-t')\, g(t') \qquad (1)$$

Fourier-Darstellung der Faltung: [Details sind analog zu (52.1)-(52.3)]



$$(f*g)(t) \overset{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(t-t')}\, \tilde f(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\, e^{-i\omega' t'}\, \tilde g(\omega') \qquad (2)$$

(kühnes Vertauschen der Integrale)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, \tilde f(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\, \tilde g(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt'\; e^{it'(\omega-\omega')}}_{(b.3)\;\; 2\pi\,\delta(\omega-\omega')} \qquad (3)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, \underbrace{\tilde f(\omega)\, \tilde g(\omega)}_{\equiv\; \widetilde{f*g}(\omega)}$$

$$\widetilde{(f*g)}(\omega) = \tilde f(\omega)\, \tilde g(\omega) \qquad \text{'Faltungstheorem'} \qquad (5)$$

Faltung im Fourier-Raum:

$$(\tilde f * \tilde g)(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\, \tilde f(\omega-\omega')\, \tilde g(\omega') \;\Rightarrow\; \widetilde{(\tilde f * \tilde g)}(t) = f(t)\, g(t)$$

Ableitungen: (Vergleiche Seite C6.1s)

Physikerphasenkonvention: unterschiedliche Vorzeichen

$$f(x,t) \overset{(e.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i(kx-\omega t)}\, \tilde f(k,\omega) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i(kx-\omega t)} \Big[\underbrace{+ik\, \tilde f(k,\omega)}_{\equiv\; \widetilde{\partial_x f}(k,\omega)}\Big] \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i(kx-\omega t)} \Big[\underbrace{-i\omega\, \tilde f(k,\omega)}_{\equiv\; \widetilde{\partial_t f}(k,\omega)}\Big] \qquad (3)$$

Merkregel in Physikerkonvention: $\frac{\partial}{\partial x} \xrightarrow{FT} ik$, $\frac{\partial}{\partial t} \xrightarrow{FT} -i\omega$ (4)

Grund für Phasenkonvention liegt in der Beschreibung von Wellen: die Phase $e^{i(kx-\omega t)}$ ist <u>konstant</u> entlang einer Trajektorie, für die $kx - \omega t = 0 \;\Rightarrow\; x = \underbrace{\frac{\omega}{k}}_{v_p} t = v_p t$

Die Vorzeichenkonvention führt zu einer positiven 'Phasengeschwindigkeit' $\rightarrow v_p$

falls ω und k dasselbe Vorzeichen haben.

Nochmal Unterdämpfter HO mit Antrieb, diesmal via Fourier-Transformation

C6.5a

$$\ddot x + 2\gamma \dot x + \Omega^2 x \overset{(C7.4k.1)}{=} f(t) \qquad (1)$$

Fourier-Ansatz für Antrieb:

$$f(t) \overset{(ZC6.3b.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde f(\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (2)$$

und für Lösung:

$$x(t) \overset{(ZC6.3b.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde x(\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (3)$$

(3), (2) in (1) eingesetzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \Big[\underset{\downarrow \atop -\omega^2}{d_t^2} + \underset{\downarrow \atop -2\gamma i\omega}{2\gamma d_t} + \underset{\downarrow \atop +\Omega^2}{\Omega^2} \Big] \tilde x(\omega)\, e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde f(\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (4)$$

(ZC6.3b.2)
$d_t \xrightarrow{FT} -i\omega$

(4) muss für beliebige t gelten: $\Rightarrow$

$$\tilde x(\omega) = \frac{\tilde f(\omega)}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \qquad (5)$$

$\leftarrow$ eingesetzt in (2) liefert gesuchte Lösung $x(t)$ ✓

"Dynamische Suszeptibilität" :

$$\tilde\chi(\omega) \equiv \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}} = \frac{\tilde x(\omega)}{\tilde f(\omega)} \overset{(5)}{=} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \qquad (6)$$

C6.5b

(5a.5),(5a.6):

$$\tilde x(\omega) = \tilde\chi(\omega)\, \tilde f(\omega) \overset{(ZC6.3b.6)}{=} (\widetilde{\chi * f})(\omega) \qquad (1)$$

Faltungstheorem, rückwärts gelesen:

$$x(t) \overset{(ZC6.3b.5)}{=} (\chi * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat t\, \chi(t-\hat t)\, f(\hat t) \qquad (2)$$

Rücktransformierte der dynamischen Susz.:

$$\chi(t) \overset{(ZC6.3b.1)}{\equiv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde\chi(\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (3)$$

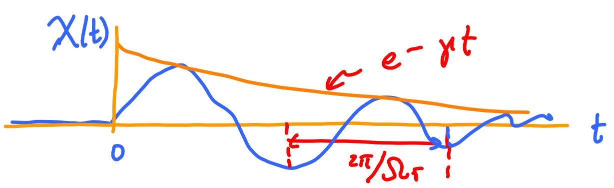
Betrachte nun unterdämpften Fall: $\gamma < \Omega$, mit $\Omega_r \overset{(C7.3t.1)}{=} \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}$ (4)

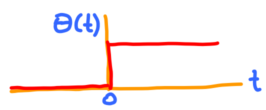
Integral liefert (siehe Bronstein Formelsammlung):

$$\chi(t) \overset{(3)}{=} \frac{1}{\Omega_r}\, e^{-\gamma t} \sin \Omega_r t\; \Theta(t) \qquad (5)$$

Heavyside-Stufenfunktion

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \qquad (6)$$





Stufenfunktion garantiert "Kausalität":

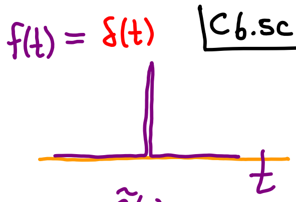
$$x(t) \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{t} d\tilde t\, \chi(t-\tilde t)\, f(\tilde t) \qquad (7)$$

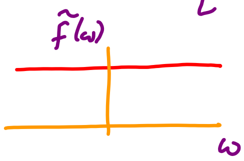
[reproduziert (C7.4l.4)]

Die Lösung x(t) hängt nur ab von der Antriebskraft bei <u>früheren</u> Zeiten, $\tilde t < t$

Interpretation: $\chi(t)$ ist die Antwort auf eine δ-Kraft:

C6.5c



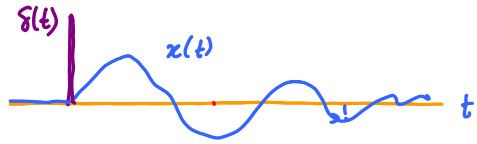


Sei $f(t) = \delta(t) \overset{(ZC6.3a.3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t} \underbrace{\cdot 1}_{\tilde{f}(\omega)} \Rightarrow \tilde{f}(\omega) = 1$ (1)

Eingesetzt in (5b.1): $\tilde{x}(\omega) \overset{(5b.1)}{=} \tilde{\chi}(\omega) \cdot 1$ (2) $\Rightarrow$ $x(t) \overset{(5b.2)}{=} \chi(t)$ (3)

Fazit: $\chi(t)$ ist die "Antwort" auf (d.h. Lösung von (5a.1) für) eine δ -Kraft:

$$\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) \chi(t) = \delta(t) \qquad (4)$$



Antwort auf δ-Puls wird auch die "Green'sche Funktion" der DGL genannt.
Notation: $\mathcal{G}(t)$ $(= \chi(t))$

Noch ein Beweis, dass (5b.2) die allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb ist:

$$\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) x(t) \qquad (5)$$

$$= \left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{t}\; \chi(t-\tilde{t})\, f(\tilde{t})}^{(5b.2)} \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{t}\; \delta(t-\tilde{t})\, f(\tilde{t}) = f(t) \;\checkmark \qquad (6)$$

Gewöhnliche DGL mit konstanten Koeffizienten, mittels Green'scher Funktion:

C6.5d

$$\underbrace{\left[c_n d_t^n + c_{n-1} d_t^{n-1} + \ldots + c_1 d_t + c_0\right]}_{\equiv D(d_t)} x(t) = f(t) \qquad (1)$$

Kurznotation: $D(d_t)\, x(t) = f(t)$ (2) mit $D(d_t) = \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell d_t^\ell$ (3)

Fourier-transformiert: $\downarrow$ (ZC6.3b.2) $\tilde{D}(-i\omega)\, \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ (4) mit $\tilde{D}(-i\omega) \equiv \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell (-i\omega)^\ell$ (5)

Aufgelöst: $\tilde{x}(\omega) \overset{(4)}{=} \tilde{\mathcal{G}}(\omega)\, \tilde{f}(\omega)$ (6) mit $\tilde{\mathcal{G}}(\omega) \overset{(4)}{\equiv} \frac{1}{\tilde{D}(-i\omega)}$ (7)

'Green'sche Funktion' erfüllt: $\tilde{D}(-i\omega) \cdot \tilde{\mathcal{G}}(\omega) \overset{(7)}{=} \underbrace{1}_{\overset{(5c.1)}{=} \tilde{\delta}(\omega)}$ (8) $\xrightarrow{\text{Fourier-tr.}}$ $D(d_t)\, \mathcal{G}(t) \overset{(1)}{=} \delta(t)$ (9)
[(1) mit $f(t) = \delta(t)$]

Faltungstheorem, angewandt auf (6): $x(t) \overset{(ZC6.3b.5)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{t}\; \mathcal{G}(t-\tilde{t})\, f(\tilde{t})$ (10)

d.h. Green'sche Funktion liefert allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb!

Check: $D(d_t)\, x(t) \overset{(10)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{t}\; \underbrace{D(d_t)\, \mathcal{G}(t-\tilde{t})}_{\overset{(9)}{=} \delta(t-\tilde{t})} f(\tilde{t}) = f(t) \overset{\checkmark}{=} (1)$ (11)

Zusammenfassung: C6.3 Fourier-Transformation

ZC6.3a

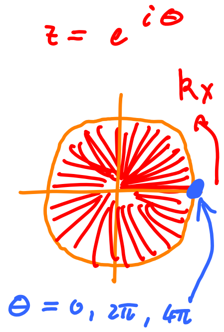
$f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{C}$

Vorzeichen ist Konvention, in Mathe: +

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \tilde{f}(k)$ 'Fourier-Rücktransformation' (1)

mit Fourier-Koeffizienten: $\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, f(x)$ 'Fourier-Transformation' (2)

Wichtige Eigenschaften der Fourier-Exponenten:



"Vollständigkeit" : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} = \delta(x)$ (3)

"Orthonormalität" : $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} = 2\pi\, \delta(k)$ (4)

Wichtige Beispiele: Exponentialfunktion $\longleftrightarrow$ Lorenzfunktion (5)

Gauß-Funktion $\longleftrightarrow$ Gauß-Funktion (6)

ZC6.3b

Physikerkonvention: $f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i(kx - \omega t)}\, \tilde{f}(k,\omega)$ (1)

Merkregel: (53.4) $\frac{\partial}{\partial x} \xrightarrow{FT} ik \qquad \frac{\partial}{\partial t} \xrightarrow{FT} -i\omega$ (2)

Parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \overline{f(t)}\, g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \overline{\tilde{f}(k)}\, \tilde{g}(k)$ (3)

Plancherel: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, |\tilde{f}(k)|^2$ (4)

Faltung: $(f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x - x')\, g(x') = (g * f)(x)$ (5)

Faltungstheorem: $(\widetilde{f * g})(k) = \tilde{f}(k)\, \tilde{g}(k)$ (6)

Zusammenfassung: C6.3 DGL mit konstanten Koeffizienten - Fourier, Green

$$\underbrace{\left[c_n d_t^n + c_{n-1} d_t^{n-1} + \dots + c_1 d_t + c_0\right]}_{\equiv} x(t) = f(t) \qquad (1)$$

Kurznotation: $D(d_t)\, x(t) = f(t)$ (2)

Fourier-transformiert: (ZC6.3b.1) $f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega)$ (3)

(ZC6.3b.2) $\tilde{D}(-i\omega)\, \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ (4) mit $\tilde{D}(-i\omega) \equiv \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell (-i\omega)^\ell$ (5)

Aufgelöst: $\tilde{x}(\omega) \overset{(4)}{=} \tilde{g}(\omega)\, \tilde{f}(\omega)$ (6) mit $\tilde{g}(\omega) \overset{(4)}{\equiv} \frac{1}{\tilde{D}(-i\omega)}$ (7)

Green'sche Funktion erfüllt: $\tilde{D}(-i\omega) \cdot \tilde{g}(\omega) \overset{(7)}{=} \underbrace{1}_{= \tilde{\delta}(\omega)}$ (8) $\xrightarrow{\text{Fourier-tr.}}$ $D(d_t)\, g(t) \overset{(1)}{=} \delta(t)$ (9)

[(1) mit $f(t) = \delta(t)$]

Faltungstheorem, angewandt auf (6): (ZC6.3b.5) $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{t}\, g(t - \tilde{t})\, f(\tilde{t})$ (10) = allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb!