

System von n gewöhnlichen DG 1. Ordnung hat die allgemeine Form:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (2)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (3)$$

Anfangsbedingung:  $x_i(t_0) = x_{i,0}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$

Gesuchte Lösung:  $x_i(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$

Kompaktnotation:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (6)$$

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (7)$$

$$\vec{x}(t) \quad (8)$$

Gleichungen dieser Art beschreiben die Zeitentwicklung eines multi-Komponenten-Systems (z.B. Koordinaten oder Impulse eines mechanischen Systems; Konzentration von chemischen Komponenten; Aktienwerte von Firmen) in Reaktion auf Mechanismen, die die Zeitentwicklung bedingen (z.B. verallgemeinerte Kräfte; chemische Reaktionen; ökonomische Entwicklungen). Kopplung der Gleichungen beschreibt die Wechselwirkungen der Komponenten miteinander.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer DGL?

Ist in der Physik immer gewährleistet, falls Problem physikalisch sinnvoll gestellt ist! 😊

Mathematisch gibt es für gewöhnliche DG erster Ordnung mehrere denkbare Möglichkeiten (abhängend von der Form der Gleichung, d.h. der Form von  $\vec{f}(\vec{x}, t)$ ):

- es gibt gar keine Lösung, die die angegebene Anfangsbedingung erfüllt

- es gibt eine und genau eine Lösung, " " " " ("eine eindeutige")

- es gibt mehrere Lösungen, " " " erfüllen

- oder: es gibt zwar eine Lösung, aber nur in einer hinreichend kleinen Umgebung des Anfangswertes  $t_0$  ("lokale Existenz")

- oder: es existiert eine Lösung für alle  $t \in I$  ("globale" Lösung)

Theorie der Existenz v. Lösungen einer gegebenen DG ist i.A. ein schwieriges mathematisches Problem!

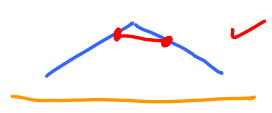
Satz (Picard & Lindelöf): Falls  $\vec{f}(\vec{x}, t)$  Lipshitz-stetig in  $\vec{x}$  und stetig differenzierbar in  $t$  ist, existiert eindeutig eine lokale Lösung des Anfangswertproblems.

"Stetig differenzierbar": Ableitung ist stetig, d.h., Funktion hat "keine Zacken":

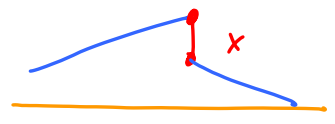


"Lipshitz-stetig": Steigung zwischen zwei beliebigen Punkte auf der Kurve ist begrenzt, d.h., Funktion hat "keine Sprünge":

Steigung endlich:



Steigung unendlich:



Bemerkungen zur physikalischen Anwendung:

(i) Der Satz gewährleistet Determinismus a la Newton: Spezifikation von Anfangsort und - Geschwindigkeit [in Gl. (c.1), (c.2)] legt weitere Bewegung eindeutig fest!

(ii) Allgemeiner: DG sind für sinnvolle Beschreibung physikalischer Prozesse geeignet.

Warum ist Lipshitz-Stetigkeit nötig? Intuitive Begründung (für n=1)

(siehe Altland-Delft, C7.4)

$$x: I \rightarrow M \subset \mathbb{R} \quad t \mapsto x(t) \quad (1)$$

$$f: M \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) \quad (2)$$

DG:  $\dot{x} = f(x(t)) \quad (3)$

Diskrete Näherung:  $\frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} \stackrel{(3)}{\approx} f(x(t)) \quad (4)$

gilt nur, falls  $f(x(t))$  sich nicht zu abrupt ändert im Intervall  $[t, t+\delta t]$

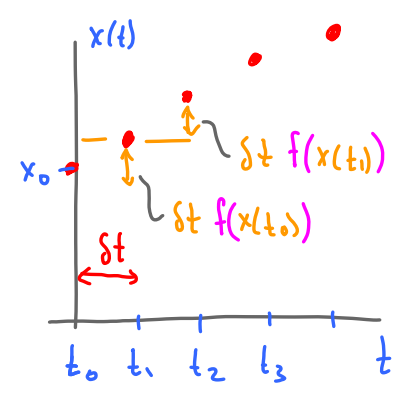
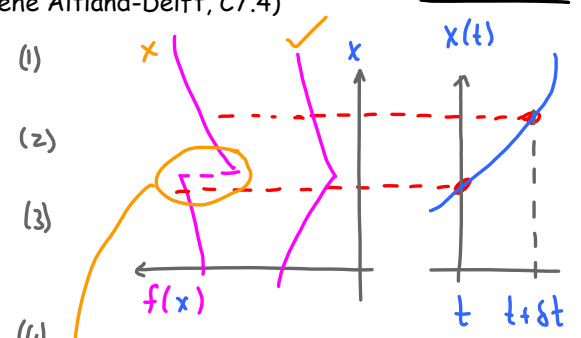
$$x(t+\delta t) \stackrel{(4)}{=} x(t) + \delta t f(x(t)) \quad (5)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (6)$$

$$x(t_1) = x(t_0) + \delta t f(x(t_0)) \quad (7)$$

$$x(t_2) = x(t_1) + \delta t f(x(t_1)) \quad (8)$$

usw. So lässt sich die Lösung in kleinen Schritten aufbauen!

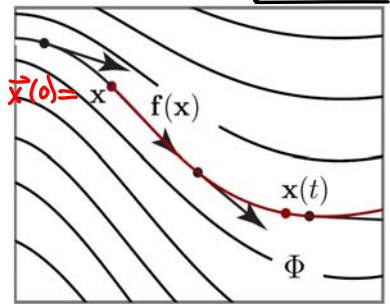


## C7.6 Trajektorien, Fluss einer Differentialgleichung

C7.6a

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}(t)) \quad \vec{x} : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$\vec{f} : M \rightarrow M$$



Für gegebenes  $\vec{x}$  definiert die Lösung

$$\vec{x}(t) \equiv \vec{\Phi}_t(\vec{x}), \quad \text{mit } \vec{x}(0) \equiv \vec{x} \quad (2)$$

Zeitpunkt entlang Trajektorie  $\vec{\Phi}_t(\vec{x})$ , Anfangspunkt der Trajektorie  $\vec{x}$

eine 'Trajektorie' der DG, mit Anfangspunkt  $\vec{x}$ ,  $\vec{\Phi}_0(\vec{x}) = \vec{x} \quad (3)$

und Kompositionsregel  $\vec{\Phi}_{s+t}(\vec{x}) = \vec{x}(s+t) = \vec{\Phi}_s(\vec{x}(t)) = \vec{\Phi}_s(\vec{\Phi}_t(\vec{x})) \quad (4)$

Die Kombination aller Trajektorien wird der 'Fluß' der DG genannt.

Fluß:  $\vec{\Phi} : I \times M \rightarrow M \quad (5)$

$$(t, \vec{x}) \mapsto \vec{\Phi}_t(\vec{x}) \quad (6)$$

## Autonome DGL in zwei Dimensionen: wie findet man den 'Fluß' der DG?

keine explizite Zeitabhängigkeit

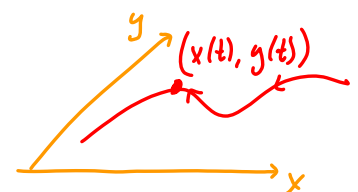
C7.6b

Betrachte DGL mit stetig differenzierbaren  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

"Autonom": rechte Seite  $\dot{x} = f(x, y) \quad (1)$

ist zeitunabhängig:  $\dot{y} = g(x, y) \quad (2)$

Gesucht sind Lösungen  $x(t), y(t) \quad (3)$



Direkte Lösung ist oft schwierig. Trick: Überführung in 1-dimensionale DGL!

Interpretiere die gesuchte Lösung als eine durch  $x$  parametrisierte Bahnkurve;  $Y(x)$  entlang dieser ist  $y(t)$  eine von  $x(t)$  abhängige Variable:  $y(t) = Y(x(t)) \quad (4)$

$$\dot{y}(t) \stackrel{(4)}{=} \frac{d}{dt} Y(x(t)) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d}{dx} Y(x(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \quad (5)$$

Wir erhalten eine 1-dimensionale DGL für die "Bahnkurve"  $Y(x)$ :  $\frac{dY}{dx} \stackrel{(5)}{=} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \stackrel{(1,2)}{=} \frac{g(x, Y)}{f(x, Y)} \quad (6)$

Man merke sich (5) mit der Eselsbrücke:  $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} \quad (7)$

Beispiel 1: Newton 2:

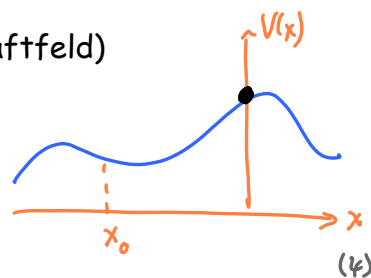
$x \leftrightarrow \dot{x}$   
 $y \leftrightarrow p$

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p \quad (1) \quad (m = \text{Masse, } p = \text{Impuls}) \quad | \text{C7.6c}$$

$$\dot{p} = F(x) \quad (2) \quad (= \text{Kraftfeld})$$

$$p(t) \stackrel{(b.4)}{=} P(x(t)) \quad (3)$$

Bahnkurve:



DGL (b.7) für

Bahnkurve:

$$\frac{dP(x)}{dx} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{\dot{p}}{\dot{x}} \stackrel{(1,2)}{=} \frac{F(x)}{P/m}$$

Eselsbrücke (b.7)!

Trennen der Variablen:

$$\int_{p_0}^p d\tilde{P} \cdot \tilde{P}/m = \int_{x_0}^x d\tilde{x} F(\tilde{x}) \quad (5)$$

Annahme:  $F(x)$  habe die Form:

$$F(x) \equiv -V'(x) \quad (6) \quad (\text{Vorzeichen per Konvention})$$

Integrieren:

$$\int_{p_0}^p d\tilde{P} \cdot \tilde{P}/m \stackrel{(5)}{=} - \int_{x_0}^x d\tilde{x} V'(\tilde{x}) \quad (7)$$

$$\frac{1}{2m}(p^2 - p_0^2) = -V(x) + V(x_0) \quad (8)$$

Fazit: Energie-Erhaltung!

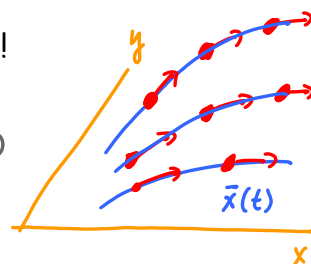
$$E \equiv \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p_0^2}{2m} + V(x_0) \equiv E_0 \quad (9)$$

Beispiel 2: Feldlinien in 2 Dimensionen

| C7.6d

$\vec{E}(\vec{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei ein Vektorfeld. Zeichne die Feldlinien!

Strategie: Finde Raumkurve  $\vec{x}(t)$  mit  $\dot{\vec{x}} \parallel \vec{E}(\vec{x}(t)) \quad (1)$



Dann ist Vektorfeld ist tangential an Raumkurve

(verschiedene Anfangsbedingungen liefern verschiedene Raumkurven)

$$\text{In 2d:} \quad \dot{x}(t) \stackrel{(1)}{\propto} E_x(x(t), y(t)) \quad (2)$$

$$\dot{y}(t) \stackrel{(1)}{\propto} E_y(x(t), y(t)) \quad (3)$$

$$\text{Feldlinie:} \quad Y = Y(x) \quad (4)$$

$$\text{DGL für Feldlinie:} \quad \frac{dY}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{E_y(x, Y)}{E_x(x, Y)} \quad (5)$$

Eselsbrücke (b.7)!

Beispiel:  $\vec{E}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$  | C7.6e  
(1)

DGL für Feldlinie:  $\frac{dY}{dX} \stackrel{(d.5)}{=} \frac{E_Y(x, Y)}{E_X(x, Y)} \stackrel{(1)}{=} \frac{-x}{Y}$  (2)

Trennen, Integrieren:  $\int_{Y_0}^Y d\tilde{Y} \tilde{Y} \stackrel{(2)}{=} - \int_{x_0}^x d\tilde{x} \tilde{x}$  (3)

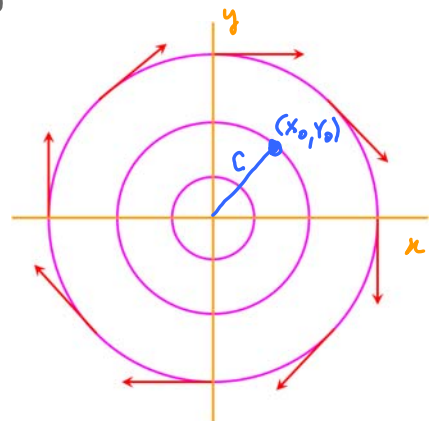
$\frac{1}{2}(Y^2 - Y_0^2) = -\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)$  (4)

Umgestellt:  $y^2 + x^2 = y_0^2 + x_0^2$  (5)

$= C^2$  (6)

Feldlinien bilden Kreise!

Konstante unabhängig von x und y



Qualitatives Verhalten von Lösungen von DGL

| C7.6f

Betrachte die 'autonome' DGL:  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$  (1)

keine explizite Zeitabhängigkeit  $\vec{f}(\vec{x}, t)$

Vektorfeld:

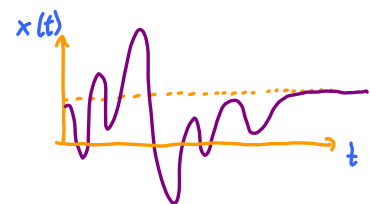
$\vec{f}(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Frage: wie verhalten sich Lösungen für lange Zeiten,  $t \rightarrow \infty$  ?

Antwort: es gibt drei typische Szenarien

1) Fixpunkte:

Bewegung kommt zum Stillstand

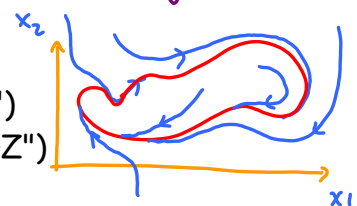


2) Grenzyklen (für Dimension  $n \geq 2$ )

Eine geschlossene Trajektorie,

zu der alle Trajektorien in ihrer Nähe hinlaufen ("stabiler GZ")

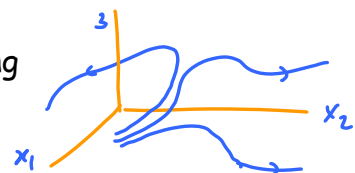
von der " " " " " weglassen ("instabiler GZ")



3) Chaos (für Dimension  $n \geq 3$ )

Sensitivität auf Anfangsbedingungen: infinitesimale Änderung führt zu komplett anderem Langzeitverhalten.

[Beispiel: Lorenz-Attraktor]



Wir diskutieren hier nur kurz Fall 1: Fixpunkte.

Beispiel (nur zur Kenntnisnahme): 'Lorenz-Attraktor'

(siehe Altland-Delft, C7.5)

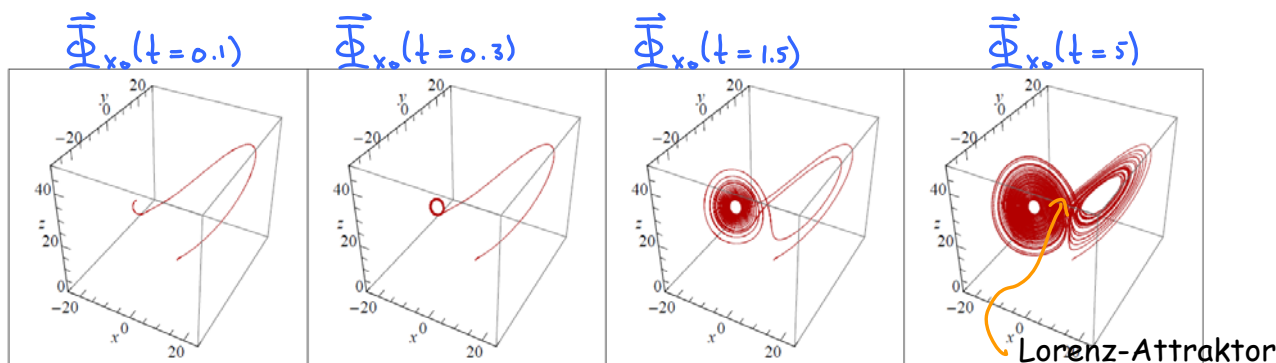
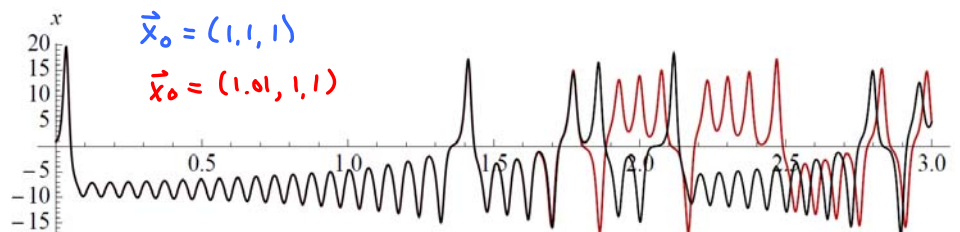
C 7.6 g

Lorenz-Modell für Konvektionsphänomene in der Atmosphäre.

$$\dot{x} = \sigma(y-x), \quad \dot{y} = x(\rho-z) - y, \quad \dot{z} = xy - \beta z$$

$\sigma, \rho, \beta \in \mathbb{R}$  sind Konstanten

Abhängigkeit von Anfangsbedingungen:



7.7 Fixpunkte, Linearisierung von Differentialgleichungen

C 7.7 a

Betrachte die 'autonome' DGL:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \tag{1}$$

Sei  $\vec{x}^*$  eine Nullstelle von  $\vec{f}(\vec{x})$ , also

$$\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{0} \tag{2}$$

Dann ist eine offensichtliche Lösung der DGL (1):

$$\vec{x}(t) = \vec{x}^* = \text{konstant} = \text{"Fixpunkt des Flusses"} \tag{3}$$

Beispiel: RC-Schaltkreis mit konstanter Spannung: (siehe C7.4k-n)

(C7.4e.4) mit  $V(t) = V_0 = \text{konstant}$

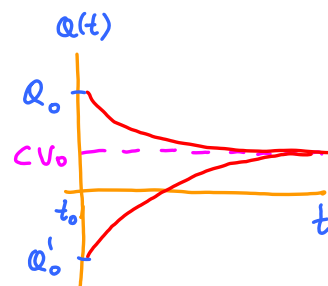
$$\dot{Q} = \frac{1}{R} \left[ V_0 - \frac{1}{C} Q(t) \right] \tag{4}$$

Explizite Lösung bereits bekannt:

(C7.4g.5)

$$Q(t) = (Q_0 - CV_0) e^{-(t-t_0)/\tau} + CV_0 \tag{5}$$

Langzeitlimes:  $Q(t \rightarrow \infty) = CV_0 \tag{6}$



Wird exponentiell schnell erreicht, mit Zeitkonstante  $\tau = RC \tag{7}$

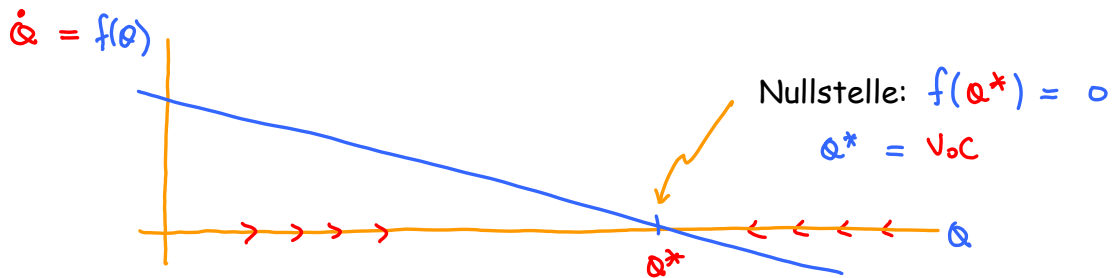
Das Langzeitverhalten ist "stabil": Änderung der Anfangsbedingung irrelevant; und Änderung der Parameter ändert Langzeitlimes nicht qualitativ (nur quantitativ).

Geometrische Lösung:

C7.7b

Schreibe  $\dot{Q}(t) \stackrel{(a.u.)}{=} \frac{1}{R} [V_0 - \frac{1}{C} Q(t)] \equiv f(Q(t))$  (1)

mit  $f(Q) = \frac{1}{R} [V_0 - \frac{1}{C} Q]$  (2)



Für  $Q < Q^*$ :  $\dot{Q} = f(Q) > 0 \Rightarrow Q$  wächst (3)

Für  $Q > Q^*$ :  $\dot{Q} = f(Q) < 0 \Rightarrow Q$  nimmt ab (4)

[Pfeile deuten an, wie sich  $Q(t)$  mit zunehmender Zeit ändert.]

Offensichtlich läuft  $Q(t)$  immer auf  $Q^*$  zu, unabhängig von Anfangsbedingung! (5)

$\Rightarrow Q^*$  ist ein "stabiler Fixpunkt" des Systems

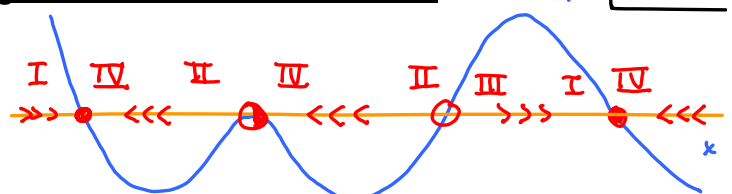
Allgemeiner generischer (= nichtpathologischer) eindimensionaler Fall:

C7.7c

DG:  $\dot{x} = f(x)$  (1)

Fixpunkte:  $f(x^*) = 0$  (2)

stabil: ● instabil: ○ halbstabil: ◐



Links von  $x^*$ : für  $\dot{x} = f(x^* - \varepsilon)$   $\begin{cases} > 0 \text{ wächst } x(t), \text{ fließt zu } x^* \text{ hin} \Rightarrow \text{stabil (I)} \\ < 0 \text{ nimmt } x(t) \text{ ab, fließt von } x^* \text{ weg} \Rightarrow \text{instabil (II)} \end{cases}$

Links von  $x^*$ : für  $\dot{x} = f(x^* + \varepsilon)$   $\begin{cases} > 0 \text{ wächst } x(t), \text{ fließt von } x^* \text{ weg} \Rightarrow \text{instabil (III)} \\ < 0 \text{ nimmt } x(t) \text{ ab, fließt zu } x^* \text{ hin} \Rightarrow \text{stabil (IV)} \end{cases}$

Falls  $f'(x^*) > 0$ : stabil: ,  $f'(x^*) < 0$ : instabil: (3)

Leichtes "wackeln" an  $f(x)$  ändert nicht viel am qualitativen Langzeitverhalten.

(Wie muss  $f(x)$  beschaffen sein, damit das Langzeitverhalten sensitiv auf "wackeln" ist? Theorie der "Bifurkationen".)

Qualitative Folgerungen für eindimensionalen Fall:

$t \rightarrow \infty, x \rightarrow x^*$

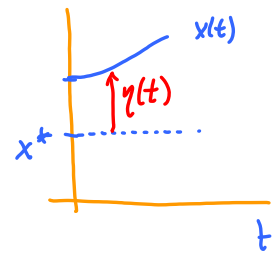
- monotone Annäherung an Fixpunkt (oder Weglaufen ins Unendliche):
- keine unendlich sich wiederholenden Oszillationen, - kein Chaos

Lineare Stabilitätsanalyse (n=1):  $\dot{x} = f(x)$  (1)

C7.7d

Frage: Wie verhält sich die Bewegung in der Nähe eines Fixpunkts?

Entwickle DGK in Abweichung  $\eta(t)$  vom Fixpunkt ("Linearisieren"):



$$\eta(t) \equiv x(t) - x^* \quad (2)$$

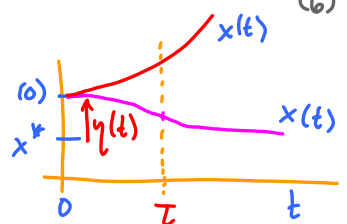
$$\dot{\eta}(t) \stackrel{(2)}{=} \dot{x}(t) \stackrel{(1)}{=} f(x^* + \eta(t)) \quad (3)$$

Taylor-Entwicklung:  $\approx \underbrace{f(x^*)}_{=0} + \eta(t) f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2)$  (4)

$$\Rightarrow \dot{\eta}(t) = f'(x^*) \eta(t) \quad (\text{sinnvoll falls } f'(x^*) \neq 0) \quad (5)$$

Lösung elementar:  $\eta(t) = \eta(0) \exp[f'(x^*) t]$  (6)

mit charakteristischen Zeitskala:  $\tau \equiv |f'(x^*)|^{-1}$  (7)



$$f'(x^*) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \Rightarrow |\eta(t)| \begin{cases} \text{wächst} \Rightarrow \text{Fixpunkt instabil} \\ \text{nimmt ab} \Rightarrow \text{Fixpunkt stabil} \end{cases}$$

Stabilität von Fixpunkten in höheren Dimensionen

C7.7e

Betrachte  $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t))$  (1)

mit Fixpunkt  $\vec{x}^*$ :  $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$  (2)

Kleine Abweichung vom Fixpunkt:  $\vec{\eta}(t) \equiv \vec{x}(t) - \vec{x}^*$  (3)

Eingesetzt in (1), für  $i$ -Komponente:  $\dot{x}^i(t) = f^i(\vec{x}^* + \vec{\eta}(t))$  (4)

Taylor-Entwicklung:  $\stackrel{(3)}{\left\{ \begin{aligned} &\stackrel{(C5.10.3)}{=} \underbrace{f^i(\vec{x}^*)}_{(2)=0} + \eta^j(t) \frac{\partial f^i(\vec{x}^*)}{\partial x^j} + \mathcal{O}(\eta^2) \end{aligned} \right.}$  (5)  
(ES über  $i$ )

"Linearisieren":  $\dot{\eta}^i(t) = \frac{\partial f^i(\vec{x}^*)}{\partial x^j} \eta^j(t)$  (6)

Wir erhalten lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten: betrachte als Elemente einer Matrix  $\underline{A} = (a^i_j)$

[Vergleiche (C7.30.1)]  $\dot{\vec{\eta}}(t) = \underline{A} \cdot \vec{\eta}(t)$  (7)



Allgemeine Lösung:

Summe über Eigenmoden:

$$\vec{\eta}(t) \stackrel{(C7.3p.4)}{=} \sum_j c_j^i \vec{v}_j e^{\lambda_j t} \quad (1) \quad \boxed{C7.7f}$$

Dabei sind:  $\lambda_j =$  Eigenwerte der Matrix  $\underline{A}$ , mit  $a_{ij}^i = \frac{\partial f^i(x^*)}{\partial x_j}$  (2)

$\vec{v}_j =$  Eigenvektoren " " " " (3)

Um generisches Verhalten zu untersuchen, sollten alle  $c_j^i \neq 0$  sein. (4)

(1)  $\Rightarrow \vec{\eta}(t) \rightarrow \vec{0}$  nur falls für alle Eigenwerte gilt:  $\text{Re}(\lambda_j) < 0$  (5)

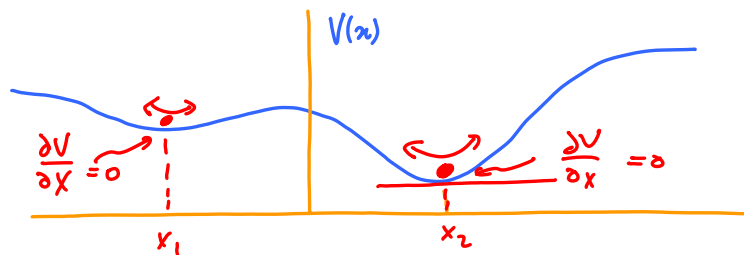
(d.h., nur falls  $\underline{A}$  "negativ definit" ist) (6)

(5) ist ein allgemeines Kriterium für die Stabilität von Fixpunkten !

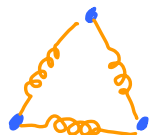
### Kleine Schwingungen um Potentialminimum

C7.7g

Beispiele:  
Teilchen in  
Potentialminimum:

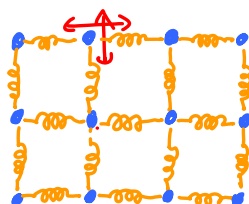


Moleküle:



symbolisiert Rückstellkräfte  
auf Grund von  
Coulomb-Wechselwirkung

Atome im  
Kristallgitter



Vorgehensweise:

Z.B. für Molekül:



C7.7h

Packe alle Freiheitsgrade in einen 'Vektor':

$$\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)^T \quad (1)$$

Gleichgewichtslage:

(entspricht einem Fixpunkt:  $\vec{x}(t) = \vec{x}_0$ )

$$\vec{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)^T \quad (2)$$

Auslenkung relativ zur Gleichgewichtslage:

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}_0 \quad (3)$$

Für kleine Auslenkungen ist Kraft proportional zu den Auslenkungen:

$$m_1 \ddot{y}^1 = f^1(\vec{y}) \approx a^1_j y^j \quad (4)$$

$$m_2 \ddot{y}^2 = f^2(\vec{y}) \approx a^2_j y^j \quad (5)$$

$$m_3 \ddot{y}^3 = f^3(\vec{y}) \approx a^3_j y^j \quad (6)$$

$$\ddot{\vec{y}} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{y} \quad (7)$$

$$A^i_j = \frac{a^i_j}{m_i} \quad (8)$$

Lösbar mit Ansatz:

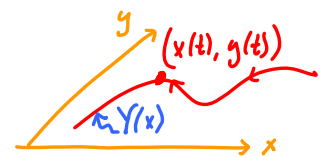
$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 e^{-i\omega t} \quad (9)$$

### Zusammenfassung: C7.6 Fluss einer DG

Autonome DGL in zwei Dimensionen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad , \quad y(t) = Y(x(t)) \quad \implies \quad \frac{dY}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x, Y)}{f(x, Y)}$$

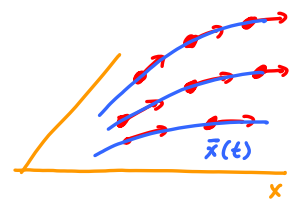
ZC7, III a



DGL für Feldlinie eines

Vektorfelds  $\vec{E}(\vec{x}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{E_y(x, Y)}{E_x(x, Y)}$$



### Zusammenfassung: C7.7 Fixpunkte, Linearisierung von Differentialgleichungen

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad \text{hat Fixpunkt bei } \vec{x}^* \quad \text{falls} \quad \vec{f}(\vec{x}^*) = 0$$

Für n=1:

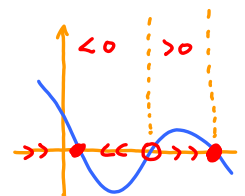
$$\dot{x} = f(x)$$

○ instabile Fixpunkte:

$$f'(x^+) > 0$$

● stabile Fixpunkte:

$$f'(x^+) < 0$$



Lineare Stabilitätsanalyse (n=1):

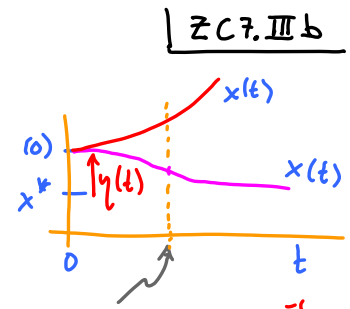
$$\dot{x} = f(x), \quad f(x^*) = 0$$

$$\eta(t) \equiv x(t) - x^* \Rightarrow \dot{\eta}(t) = f'(x^*) \eta(t)$$

Lösung für kleine Auslenkungen:

$$\eta(t) = \eta(0) \exp[f'(x^*) t]$$

mit charakteristischen Zeitskala:  $\tau \equiv |f'(x^*)|^{-1}$



Stabilität von Fixpunkten in höheren Dimensionen:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)), \quad \vec{f}(\vec{x}^*) = 0$$

$$\vec{\eta}(t) \equiv \vec{x}(t) - \vec{x}^* \Rightarrow \dot{\vec{\eta}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{\eta}(t), \quad \underline{\underline{A}} = (a^i_j) = \frac{\partial f^i(\vec{x}^*)}{\partial x_j}$$

Lösung für kleine Auslenkungen ist  
Summe über Eigenmoden von A:

$$\vec{\eta}(t) = \sum_j c_j^0 \vec{v}_j e^{\lambda_j t}$$

$$\vec{\eta}(t) \rightarrow \vec{0} \quad \text{nur falls "A negativ definit" ist:} \quad \text{Re}(\lambda_j) < 0 \quad \forall j$$