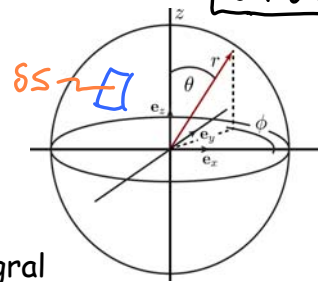


C4.6: Oberflächenintegrale in \mathbb{R}^3

C4.6a

Ziel: Berechnung von Integralen, deren Integrationsbereich eine 2-dim. Fläche in einem 3-dim. Raum ist (z.B. Fläche von Kugel)



Motivation / Anwendungen:

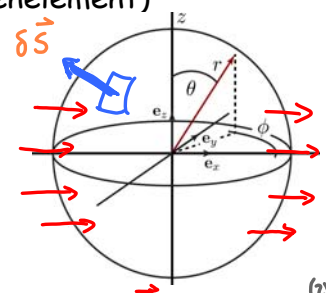
- z.B. Elektrostatik: freie Ladung eines metallischen Leiters findet sich nur auf der Oberfläche; Gesamtladung = Flächenintegral

Gesamtladung: $Q = \iint_S dS \sigma(u, v)$ (1)

Fläche: S (parametrisieren die Fläche)

Flächenelement: dS (Oberflächendladungsdichte (Ladung pro Flächenelement))

- Erhaltungssätze: z.B. Stromerhaltung:
Gesamtladungszunahme in einem Volumenbereich V
= Gesamtladungsfluss durch Oberfläche, (rein - raus)
= Flächenintegral des Stroms, (rein - raus)



$\dot{Q} = \int_V dV \dot{\rho}(\vec{r}, t) = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)$ (2)

Volumen V (Volumen-element) (Ladungsdichte)

Oberfläche S (gerichtetes Flächenelement)

Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ = Ladung pro Zeitintervall pro Flächenelement

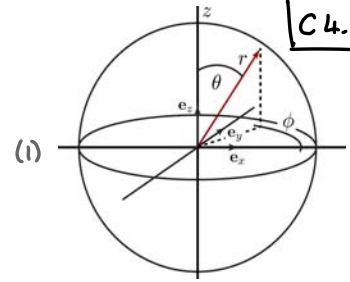
Parametrisierung von Flächen

C4.6b

Beispiel 1: Kugeloberfläche

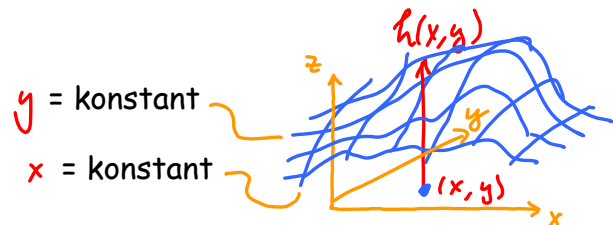
Kugelkoordinaten, mit $r = R$ = konstant

$$\vec{r}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix}$$



Beispiel 2: "Gebirge"

$$\vec{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x, y) \end{pmatrix} \quad (2)$$

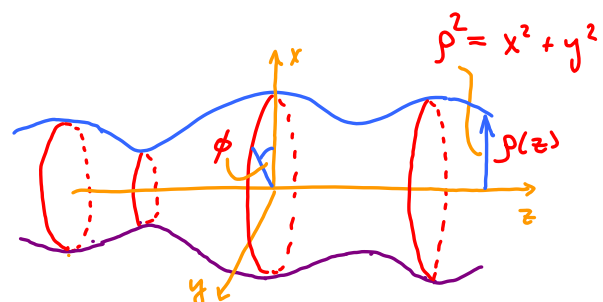


"Höhe" = eindeutige Funktion von x, y ("keine Überhänge")

Beispiel 3: Rotationsflächen

$\rho = \rho(z)$ sei eine beliebige Funktion:

$$\vec{r}(\phi, z) = \begin{pmatrix} \rho(z) \cos \phi \\ \rho(z) \sin \phi \\ z \end{pmatrix} \quad (3)$$



Parametrisierung von Flächen in \mathbb{R}^3 - allgemeine Formulierung

C 4.6c

2D-Fläche in \mathbb{R}^3 :

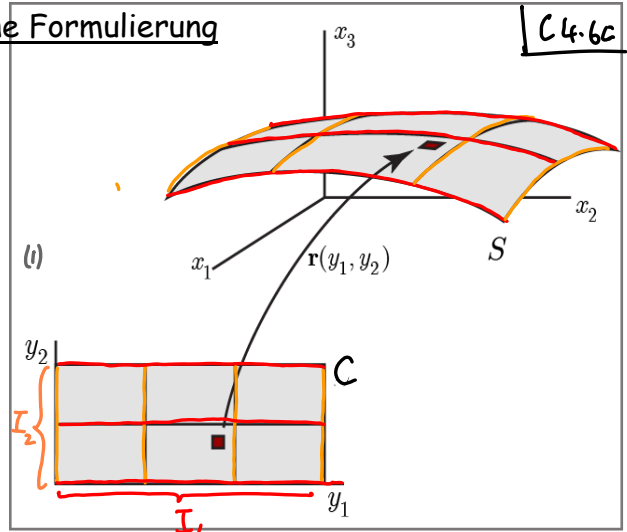
$$\vec{r}: C = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

$$(y_1, y_2) \mapsto \vec{r}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1(y_1, y_2) \\ x_2(y_1, y_2) \\ x_3(y_1, y_2) \end{pmatrix}$$

z.B. Oberfläche einer Kugel mit Radius R:

$$\vec{r}(\theta, \phi) = R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

$y_1 = \theta$
 $y_2 = \phi$



Anmerkung:

Jede Koordinatentransformationen in \mathbb{R}^3 ,

$$\vec{r}: C' \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

definiert eine Flächenschar,

$$(y_1, y_2, y_3) \rightarrow \vec{r}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1(\vec{y}) \\ x_2(\vec{y}) \\ x_3(\vec{y}) \end{pmatrix} \quad (4)$$

denn jede feste Wahl einer Koordinate liefert eine neue Fläche. Z.B:

$$S_{\vec{y}_3} = \{ \vec{r}(y_1, y_2, \vec{y}_3) \mid \vec{y} \in C', y_3 = \vec{y}_3 = \text{konstant} \} \quad (5)$$

[siehe Beispiel 1 auf Seite b]

Zurück zu (c.1), mit Notationsänderung:

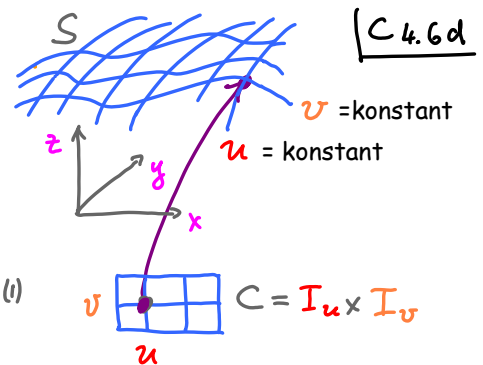
(um Anzahl der Indizes zu verringern)

$$(u, v) \equiv (y_1, y_2)$$

$$(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{r}: C = I_u \times I_v \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$



Koordinatenlinie (variäre eine d. Variablen, halte andere fest) = Raumkurve

$$u\text{-Koordinatenlinie: } \{ \vec{r}(u, v_0) \in \mathbb{R}^3 : v_0 = \text{konstant}, u \in I_u \} \quad (2)$$

$$v\text{-Koordinatenlinie: } \{ \vec{r}(u_0, v) \in \mathbb{R}^3 : u_0 = \text{konstant}, v \in I_v \} \quad (4)$$

Lokalen Kurvengeschwindigkeiten (siehe ZV5a) entlang Koordinaten:

$$\text{in } u\text{-Richtung: } \vec{v}_u \equiv \partial_u \vec{r} \equiv b_u \hat{e}_u, \quad b_u \equiv v_u \equiv \|\vec{v}_u\| \quad (5)$$

$$\text{in } v\text{-Richtung: } \vec{v}_v \equiv \partial_v \vec{r} \equiv b_v \hat{e}_v, \quad b_v \equiv v_v \equiv \|\vec{v}_v\| \quad (6)$$



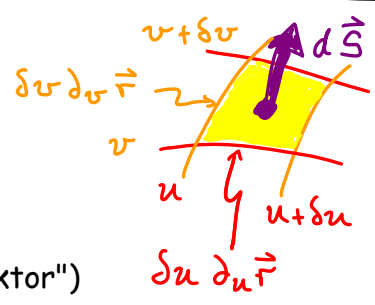
Flächenelement:

Betrachte das Flächenelement aufgespannt durch

$$\delta u \partial_u \vec{r} \quad \text{und} \quad \delta v \partial_v \vec{r} \quad (1)$$

Es wird charakterisiert durch seine Fläche, δS

und die Richtung eines \perp zur Fläche stehenden Einheitsvektors \hat{n} (ortsabhängiger "Normalvektor")



[vergleiche den rein 2-dim Fall, siehe (C4j.5); dort war $\hat{n} = \hat{z}$, aber hier ist $\hat{n}(\vec{r})$ ortsabhängig!]

Definition: gerichtetes Flächenelement [Verallgemeinerung von (C4j.3)]

$$\hat{n} \delta S \equiv \delta \vec{S} \stackrel{(1)}{=} \delta u \partial_u \vec{r} \times \delta v \partial_v \vec{r}$$

Betrag: $\delta S = \|\delta \vec{S}\| \stackrel{(2)}{=} \delta u \delta v \|\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}\|$

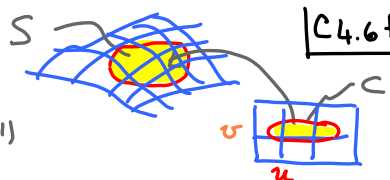
Richtung: $\hat{n} \equiv \frac{\delta \vec{S}}{\|\delta \vec{S}\|} \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}}{\|\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}\|}$

(legt auch "oben", "unten" fest)

$$\begin{aligned} (2) \quad \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} &= \begin{pmatrix} \partial_u x \\ \partial_u y \\ \partial_u z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_v x \\ \partial_v y \\ \partial_v z \end{pmatrix} \\ (3) & \\ (4) &= \begin{pmatrix} (\partial_u y)(\partial_v z) - (\partial_u z)(\partial_v y) \\ (\partial_u z)(\partial_v x) - (\partial_u x)(\partial_v z) \\ (\partial_u x)(\partial_v y) - (\partial_u y)(\partial_v x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Größe der Fläche für $u, v \in C$:

"Fläche über C": $A_C = \iint_S dS \stackrel{(e.3)}{=} \iint_C du dv \|\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}\| \quad (1)$



Lagrange-Identität (L4k.7):

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \Rightarrow \|\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}\|^2 \stackrel{(1)}{=} \left[(\partial_u \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r})(\partial_v \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r}) - (\partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r})^2 \right]^{1/2} \quad (2)$$

mit: $\partial_u \vec{r} \stackrel{(d.5)}{=} b_u \hat{e}_u, \quad b_u \equiv \|\vec{v}_u\|, \quad \partial_v \vec{r} \stackrel{(d.6)}{=} b_v \hat{e}_v, \quad b_v \equiv \|\vec{v}_v\| \quad (3)$

Für krummlinig-orthogonale Koordinaten: $\hat{e}_u \cdot \hat{e}_u = \hat{e}_v \cdot \hat{e}_v = 1, \quad \hat{e}_u \cdot \hat{e}_v = 0 \quad (4)$

somit: $\|\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}\| \stackrel{(2)}{=} \left[(b_u \hat{e}_u)^2 (b_v \hat{e}_v)^2 - (b_u \hat{e}_u \cdot b_v \hat{e}_v)^2 \right]^{1/2} = b_u b_v \quad (4)$

Betrag des Flächenelements: $\delta S \stackrel{(e.3)}{=} b_u b_v \delta u \delta v \quad (5)$

Richtung des Flächenelements: $\hat{n} \stackrel{(e.4)}{=} (b_u \hat{e}_u \times b_v \hat{e}_v) / (b_u b_v) = \hat{e}_u \times \hat{e}_v \quad (6)$

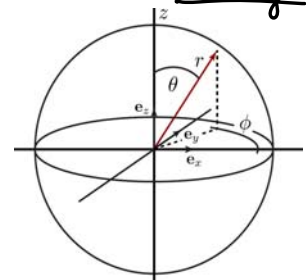
Fläche über C: $A_C \stackrel{(1),(4)}{=} \iint_C du dv b_u b_v \quad (7)$

Beispiel 1: Kugeloberfläche

C4.6g

Kugelkoordinaten (siehe ZV5b):

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi & (1) & & r &\in [0, \infty) \\ y &= r \sin \theta \sin \phi & (2) & & \theta &\in [0, \pi] \\ z &= r \cos \theta & (3) & & \phi &\in [0, 2\pi) \end{aligned}$$



(V5m.8-10): $b_r = v_r = 1$, $b_\theta = v_\theta = r$, $b_\phi = v_\phi = r \sin \theta$ (4)

Einheitsvektoren sind orthonormal:

Zur Erinnerung: (obwohl wir sie hier nicht explizit brauchen)

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z & (5) \\ \hat{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \hat{e}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{e}_y - \sin \theta \hat{e}_z & (6) \\ \hat{e}_\phi &= -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y & (7) \end{aligned}$$

$\hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\phi = 0$

Kugeloberfläche:

Radius = R

$$A \stackrel{(f.7)}{=} \iint_{\text{Kugel}} d\theta d\phi \cdot \left[\overset{b_\theta \cdot b_\phi}{r \cdot r \sin \theta} \right]_{r=R} \quad (8)$$

$u \leftrightarrow \theta$
 $v \leftrightarrow \phi$

$$= R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \cdot 1 = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = \underline{4\pi R^2} \quad (9)$$

Beispiel 2: Gebirge

(hier sind Koordinaten nicht krummlinig!)

C4.6h

$u \leftrightarrow x$
 $v \leftrightarrow y$

"Höhe"

$$\vec{r}(x,y) \stackrel{(b.2)}{=} \begin{bmatrix} x \\ y \\ h(x,y) \end{bmatrix}, \quad \partial_x \vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ h_x \end{bmatrix} \equiv \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \partial_y \vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ h_y \end{bmatrix} \equiv \frac{\partial h}{\partial y} \quad (1)$$

$$(f.2) \quad \|\partial_x \vec{r} \times \partial_y \vec{r}\| \stackrel{(f.2)}{=} \left[(\partial_x \vec{r})^2 (\partial_y \vec{r})^2 - (\partial_x \vec{r} \cdot \partial_y \vec{r})^2 \right]^{1/2} \quad (2)$$

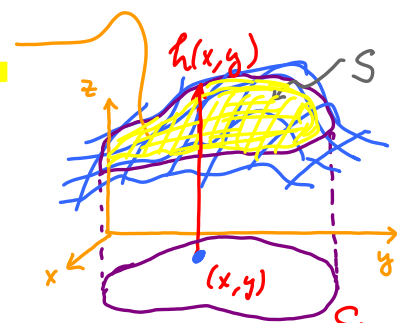
$$\stackrel{(1)}{=} \left[(1 + h_x^2)(1 + h_y^2) - (h_x h_y)^2 \right]^{1/2} \quad (3)$$

$$= [1 + h_x^2 + h_y^2]^{1/2} \quad (\neq 0, \text{ also ein nicht-orthog. Koordinatensystem}) \quad (4)$$

Über Bereich $(x,y) \in C$, wie groß ist Gebirgsoberfläche?

$$A_C = \iint_S ds \stackrel{(f.1)}{=} \iint_C dx dy \|\partial_x \vec{r} \times \partial_y \vec{r}\| \quad (1)$$

$$\stackrel{(4)}{=} \iint_C dx dy [1 + h_x^2 + h_y^2]^{1/2} \quad (2)$$



Beispiel 3: Rotationskörper

C4.6 i

$\vec{r}(\phi, z) \stackrel{(b.3)}{=} \begin{pmatrix} \rho(z) \cos \phi \\ \rho(z) \sin \phi \\ z \end{pmatrix}, \quad \partial_\phi \vec{r} = \rho(z) \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_z \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho'(z) \cos \phi \\ \rho'(z) \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$

$u \leftrightarrow \phi$
 $v \leftrightarrow z$

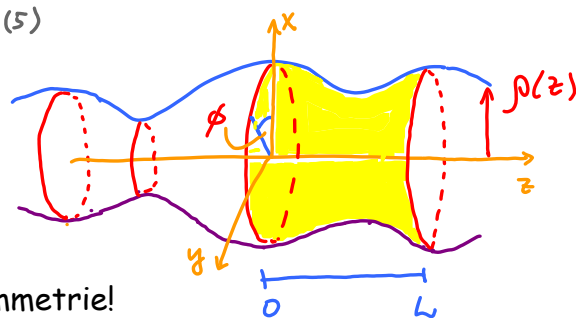
Orthogonal: $(\partial_\phi \vec{r}) \cdot (\partial_z \vec{r}) = \rho(z) \rho'(z) [-\sin \phi \cos \phi + \cos \phi \sin \phi] = 0 \quad (2)$

$b_\phi \stackrel{(f.3)}{=} \|\partial_\phi \vec{r}\| \stackrel{(1)}{=} \rho(z), \quad b_z \stackrel{(f.3)}{=} \|\partial_z \vec{r}\| = [(\rho'(z))^2 + 1]^{1/2} \quad (3)$

Oberfläche des Rotationskörpers für den Bereich $C = \{0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq L\} \quad (4)$

$A_S = \iint_S dS \cdot 1 = \int_C d\phi dz b_\phi b_z \quad (5)$

$= \int_0^{2\pi} d\phi \cdot 1 \int_0^L dz \rho(z) [(\rho'(z))^2 + 1]^{1/2} \quad (6)$



ϕ -Integral ist trivial, wegen Nutzung von Symmetrie!

Verallgemeinerung: Flächenintegral einer Funktion $f(u, v)$ über C :

C4.6 j

Sei $S: \begin{cases} C \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) \end{cases}$ eine Fläche (wie bisher), (1)

und $f: \begin{cases} C \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto f(u, v) \end{cases}$ eine Funktion (auf demselben Gebiet C definiert wie die Fläche) (2)

Definition: Integral von f entlang der Fläche S über dem Gebiet C :

$I_S[f] \equiv \iint_S dS f(u, v) \stackrel{(e.3)}{\equiv} \iint_C du dv \|\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}\| f(u, v) \quad (3)$

Interpretation: Gewichtung jedes Punktes auf der Fläche (parametrisiert durch u, v) durch die Gewichtsfunktion $f(u, v)$ [z.B. f = Flächenladungsdichte, wie in (a.1)]

Beispiel Kugelfläche: $I_{\text{Kugel}}[\cos \theta] \stackrel{(g.8)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta R^2 \underbrace{\sin \theta \cdot \cos \theta}_{\frac{1}{2} \sin 2\theta} = -2\pi R^2 \frac{1}{4} \cos 2\theta \Big|_0^\pi = 0 \quad (4)$

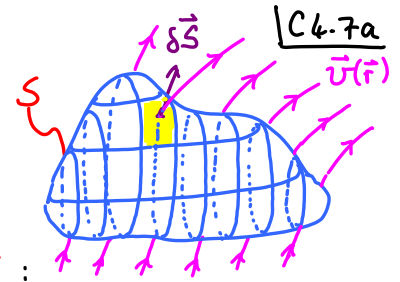
Anmerkung: $I_S[f]$ ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung der Fläche!

[Beweis: siehe z.B. Grossmann, Mathematischer Einführungskurs in für die Physik, 2004]

C4.7 Flussintegrale durch Flächen (siehe AD-Text, V4.2)

Sei $\vec{v}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld.

Wieviel "fließt" durch die Oberfläche S ?



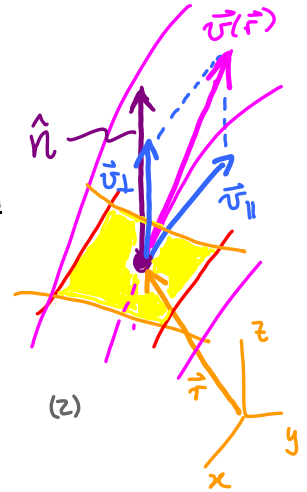
$\delta \vec{S} = \hat{n} \delta S$ sei gerichtetes Flächenelement am Ort \vec{r} :

Zerlege $\vec{v}(\vec{r})$ in Anteile \perp, \parallel zum Flächenelement

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel \quad (1)$$

$\vec{v}_\perp \parallel \hat{n}$ "Normalkomponente" fließt durch Flächenelement hindurch

$\vec{v}_\parallel \perp \hat{n}$ "Tangentialkomponente" fließt am Flächenelement entlang



Definition: "Fluss" durch Flächenelement:

$$\delta \Phi \equiv \vec{v} \cdot \delta \vec{S} = \vec{v} \cdot \hat{n} \delta S = \|\vec{v}_\perp\| \delta S$$

Definition: "Fluss" durch die Fläche S :

$$\Phi \equiv \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{v} = \iint_C du dv \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)}_{(e.3)} \cdot \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \quad (3)$$

Beispiel 1: Elektrisches Feld einer Punktladung

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r \quad (1)$$

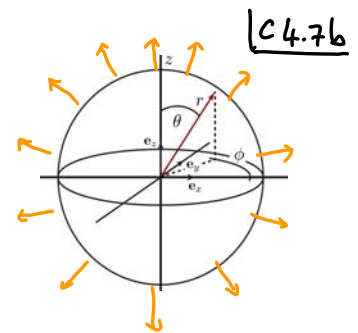
Berechne Fluss durch Oberfläche einer Kugel mit Radius R :

$$\Phi \stackrel{(a.3)}{=} \iint_C d\theta d\phi \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right)}_{(f.3)} \cdot \vec{E}(\vec{r}(\theta, \phi)) \quad (2)$$

$$(f.3) = b_\theta \hat{e}_\theta \times b_\phi \hat{e}_\phi = R^2 \sin\theta \hat{e}_r \quad (3)$$

$$\stackrel{(3),(1)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \left(R^2 \sin\theta \hat{e}_r \right) \cdot \left(\hat{e}_r \frac{1}{R^2} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right) \quad (4)$$

$$= 2\pi \cdot 2 \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (5)$$



Seite g:

$$b_\theta = r$$

$$b_\phi = r \sin\theta$$

$$\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_r$$

Fluss hängt nicht vom Radius ab (!). Das ist ein Beispiel vom

Gauss-Gesetz der Elektrostatik: Der durch die Oberfläche S eines Volumens V hindurchtretende Fluss Φ des elektrischen Feldes ist proportional zur gesamten in V enthaltenen elektrischen Ladung:

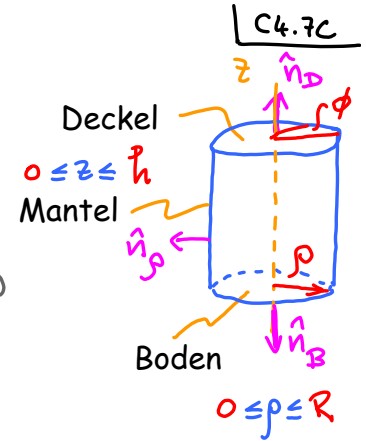
$$\hookrightarrow Q_V = \int_V dV \rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (6)$$

Beispiel 2: Fluss eines Magnetfelds durch Zylinder

Magnetfeld sei $\vec{B}(\vec{r}) = C \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix}$ (1)

Fluss nach aussen durch den Boden: ($z=0$)

$\hat{n}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_B = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \cdot \rho \left(\hat{n}_B \cdot \vec{B}(\vec{r}) \right) \Big|_{z=0} = 0$ (2)
 $dS = \rho d\rho d\phi$
 (zC4.b)



Fluss nach aussen durch den Deckel: ($z=h$)

$\hat{n}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_D = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \cdot \rho \left(\hat{n}_D \cdot \vec{B}(\vec{r}) \right) \Big|_{z=h} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} R^2 (-2Ch)$ (3)
 $dS = \rho d\rho d\phi$

Fluss nach aussen durch den Mantel: ($\rho=R$)

$\vec{r} = \begin{pmatrix} R \cos\phi \\ R \sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \hat{n}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_M = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz \cdot R \left(\hat{n}_\rho \cdot \vec{B}(\vec{r}) \right) \Big|_{\rho=R} = 2\pi \cdot R \cdot CR \cdot h$ (4)
 $dS = R d\phi dz$
 = $CR(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = CR$

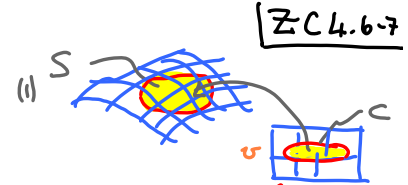
Fluss nach aussen durch ganzen Zylinder: $\Phi = \Phi_B + \Phi_D + \Phi_M = 0$ (5)

Beispiel für allgemeines Gesetz: Magnetfeldfluss durch geschlossene Fläche = 0!

Zusammenfassung: V4.2 Flächen- und Flussintegrale

Gerichtetes
Flächenelement:

$\delta\vec{S} \equiv \delta u \partial_u \vec{r} \times \delta v \partial_v \vec{r} \equiv \hat{n} \delta S$ (1)

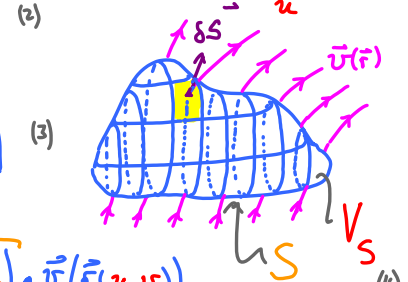


"Fluss" durch
Flächenelement:

$\vec{v} \cdot \delta\vec{S} \equiv \vec{v} \cdot \hat{n} \delta S \equiv \delta\Phi$ (2)

"Fläche über G":

$A_S = \iint_S dS = \iint_C du dv \|\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}\|$ (3)



"Fluss" durch
die Fläche S:

$\Phi \equiv \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \equiv \iint_C du dv \underbrace{(\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r})}_{d\vec{S}} \cdot \vec{v}(\vec{r}(u,v))$ (4)

Für orthogonale Koordinaten:

$\partial_u \vec{r} = b_u \hat{e}_u, \partial_v \vec{r} = b_v \hat{e}_v, \hat{e}_u \cdot \hat{e}_v = 0$ (5)

Betrag des Flächenelements:

$\delta S = b_u b_v \delta u \delta v$ (6)

Richtung:

$\hat{n} = \hat{e}_u \times \hat{e}_v = \hat{e}_w$ (7)

Fläche über C:

$A_S = \iint_C du dv b_u b_v$ (8)