

V4.3 Rotation, Satz von Stokes

V4.3a

Rotation:

Vektorfeld: $\vec{v} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{x} \mapsto \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix} \stackrel{ES}{=} \hat{e}_j v_j(\vec{x})$ (1)

Definition: 'Rotation von \vec{v} ': (nur in d=3 Dimensionen definiert)

$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{x} \mapsto \text{rot } \vec{v}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{x})$ (2)

$\stackrel{ES}{=} \partial_i v_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$

Notationscheck: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \underbrace{(\hat{e}_i \partial_i)}_{\epsilon_{ijk} \hat{e}_k} \times \overbrace{(\hat{e}_j v_j)}^{(1)} = \partial_i v_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \checkmark$ (3)

Erinnerung: Gradientenfelder sind 'wirbelfrei':

V4.3b

Für ein beliebiges (zweifach differenzierbares) Vektorfeld gilt: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$ (1)

Beweis: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \partial_i (\partial_j f) \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$ (2)
(Beispielaufgabe)

ϵ_{ijk} ist antisymmetrisch: $= \partial_i \partial_j f (-\epsilon_{jik}) \hat{e}_k$ (3)

Summationsindizes umbenennen: $= -\partial_j \partial_i f \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$ (4)
 $i \leftrightarrow j$

$\partial_i \partial_j \phi = \partial_j \partial_i \phi$ $= -\partial_i \partial_j f \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \stackrel{(a.2)}{=} -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)$ (5)

$(5) = -(5) \Rightarrow (5) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0 \checkmark$ (6)

Wirbelfelder sind 'quelfrei':

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$ (7)

Beweis analog (Hausaufgaben)

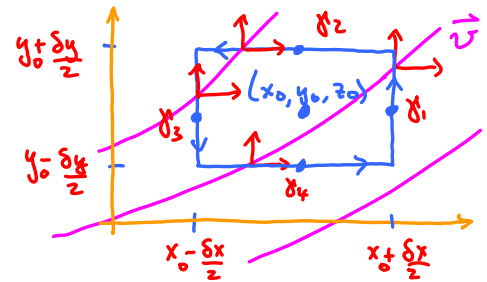
Betrachte rechteckiges Flächenelement $\delta \vec{S} = \delta S \hat{n}$

$\delta S = \delta x \delta y$, zentriert bei (x_0, y_0, z_0) (1)

Wähle Koordinatenachsen so, dass $\hat{n} \parallel \hat{e}_z$ (2)

'Zirkulation' von \vec{v}

entlang γ = Rand von $\delta \vec{S}$: $\delta z \equiv \oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{v}$ (3)



$d\vec{r}$: $dy \hat{e}_y$, $dy(-\hat{e}_y)$, $dx(-\hat{e}_x)$, $dx \hat{e}_x$

$\delta z = \int_{\gamma_1} v_y dy + \int_{\gamma_3} (-v_y) dy + \int_{\gamma_2} (-v_x) dx + \int_{\gamma_4} v_x dx$ (4)

Rand: $\gamma = \bigcup_{i=1}^4 \gamma_i$

$\approx \delta y [v_y(x_0 + \frac{\delta x}{2}, y_0, z_0) - v_y(x_0 - \frac{\delta x}{2}, y_0, z_0)] + \delta x [-v_x(x_0, y_0 + \frac{\delta y}{2}, z_0) + v_x(x_0, y_0 - \frac{\delta y}{2}, z_0)]$ (5)

$\approx \underbrace{\delta x \delta y}_{\delta S} \underbrace{[\partial_x v_y(x_0, y_0, z_0) - \partial_y v_x(x_0, y_0, z_0)]}_{=(\vec{v} \times \vec{v})_z} = \delta S \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ (6)

'Zirkulation pro gerichteter Fläche': (lokale Wirbelstärke)

$\equiv \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\delta S} \oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{v} = \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ (1), (6)

geometrische Def. der Rotation! (7)

Erläuterung des Schrittes von Gl. (c.4) nach (c.5), für den ersten Term:

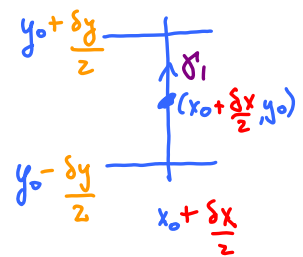
$\int_{\gamma_1} d\vec{r} \cdot \vec{v} = ?$

über den zweiten Parameter wird integriert, der erste und dritte sind fest:

Kurznotation:

$\vec{r}(y) \equiv \vec{r}(x_0 + \frac{\delta x}{2}, y, z_0)$, $y \in [y_0 - \frac{\delta y}{2}, y_0 + \frac{\delta y}{2}]$

$\vec{v}(y) \equiv \vec{v}(x_0 + \frac{\delta x}{2}, y, z_0)$



$\frac{d\vec{r}(y)}{dy} = \hat{e}_y$

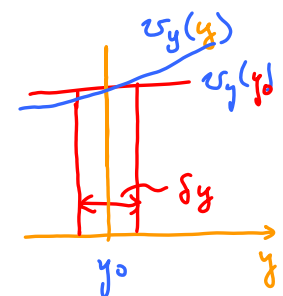
$\int_{\gamma_1} d\vec{r} \cdot \vec{v} = \int_{y_0 - \frac{\delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\delta y}{2}} \frac{d\vec{r}(y)}{dy} \cdot \vec{v}(y) dy = \int_{y_0 - \frac{\delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\delta y}{2}} \hat{e}_y \cdot \vec{v}(y) dy$

$\approx \int_{y_0 - \frac{\delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\delta y}{2}} v_y(y) dy$

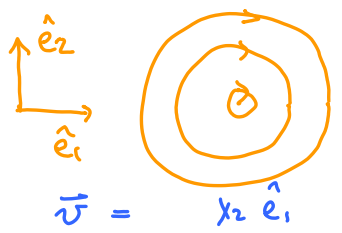
Näherung, gilt im Limes $\delta y \rightarrow 0$

$\approx \delta y v_y(y_0)$

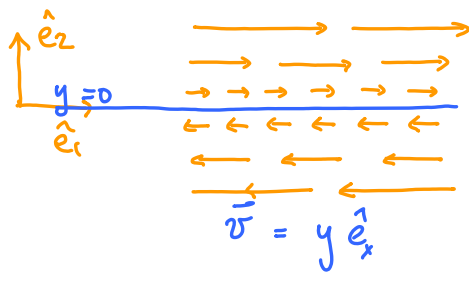
$= \delta y v_y(x_0 + \frac{\delta x}{2}, y_0, z_0)$



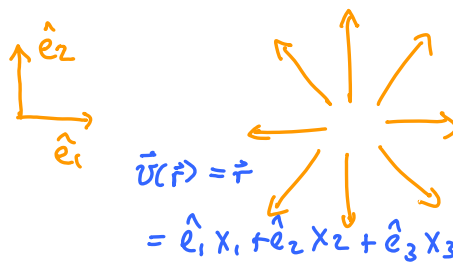
Beispiele zur Anschauung:



$$\vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 0 - \partial_3 (-x_1) \\ \partial_3 x_2 - \partial_1 0 \\ \partial_1 (-x_1) - \partial_2 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \hat{e}_3$$

$$\vec{v} = x_2 \hat{e}_1 - x_1 \hat{e}_2$$


$$\vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = -\hat{e}_3$$

$$\vec{v} = y \hat{e}_x$$


$$\vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

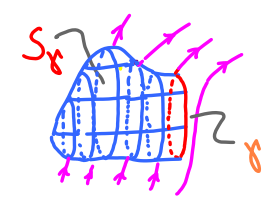
$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{r} = \hat{e}_1 x_1 + \hat{e}_2 x_2 + \hat{e}_3 x_3$$

Satz von Stokes:

Betrachte nun beliebige Oberfläche $S_{\mathcal{F}}$,
 begrenzt durch den Rand \mathcal{F} ,
 aufgeteilt in viele infinitesimal kleine Flächenelemente:

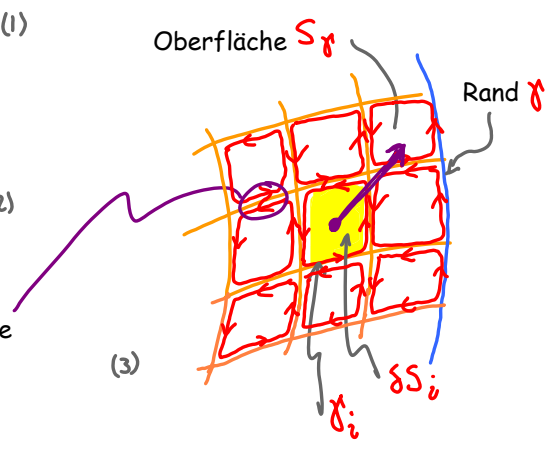
$$\int_{S_{\mathcal{F}}} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{\delta \vec{S}_i \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})}_{\text{Zirkulation um Flächenelement } \delta \vec{S}_i} \quad (1)$$

$$\stackrel{(c.7)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{\oint_{\mathcal{F}_i} d\vec{r} \cdot \vec{v}}_{\text{Zirkulation um Flächenelement } \delta \vec{S}_i} \quad (2)$$



Beiträge innerer Wegelemente heben sich weg, denn Integrationsrichtungen entlang Grenzen benachbarter Rechtecke sind entgegengesetzt:

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\text{Aussenwege}} \oint_{\mathcal{F}_i} d\vec{r} \cdot \vec{v} \quad (3)$$



$$\int_{S_{\mathcal{F}}} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \oint_{\mathcal{F}} d\vec{r} \cdot \vec{v} \quad (4)$$

$\int_{S_{\mathcal{F}}}$ Fläche \mathcal{F} Rand der Fläche = Linie

Satz v. Stokes

[Mathematikvorl.: sauberer Limesprozess, Approximation von S durch Flächenelemente.]

Anmerkungen:

(1) Orientierung des Linienintegrals ist "rechts herum" bezüglich eines Normalvektors an einem (beliebigen) Punkt auf der Fläche.



(2) Falls S eine geschlossene Oberfläche ist, hat sie keinen Rand:

$$\gamma = \emptyset$$

Leere Menge

In diesem Fall: sei V_S das von S eingeschlossene Gebiet:

$$0 = \oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{v} \stackrel{\text{Stokes (e.4)}}{=} \int_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \stackrel{\text{Gau\ss (V4.2 h.4)}}{=} \int_{V_S} dV \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})}_{(b.7) = 0} = 0 \quad (1)$$

weil Rand die Länge 0 hat

konsistent! ✓

(3) Konservatives Kraftfeld: $\vec{E}(\vec{r})$ sei ein Vektorfeld mit folgender Eigenschaft:

$$\oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{für beliebigen geschlossenen Weg} \quad (2)$$

Stokes = (e.3)

Dann gilt

$$\int_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0 \quad \text{für beliebige Flächen } S \quad (3)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} \text{ ist darstellbar als } \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (4)$$

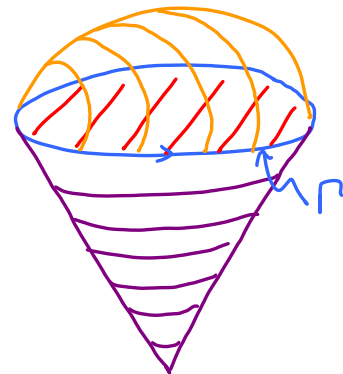
(b.1)

(4) Verschiedene Flächen haben den gleichen Rand:

V4.3g

- Γ : Kreislinie
- S_1 : Kreisfläche
- S_2 : Halbkugeloberflache
- S_3 : Kegelmantel

$$\Gamma = \partial S_1 = \partial S_2 = \partial S_3$$



(4) Krummlinig orthogonale Koordinaten:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \hat{e}_u B_u + \hat{e}_v B_v + \hat{e}_w B_w$$

V4.3h

Betrachte 'krummes' Flächenelement:

$$\delta S = \delta S \hat{e}_w$$

$$\delta S = \delta u \delta v b_u b_v \quad (1) \quad , \text{ zentriert bei } (u_0, v_0, w_0)$$

Zirkulation: $\delta Z \equiv \oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{B} \quad (2) \quad \gamma = \bigcup_{i=1}^4 \gamma_i \quad (2')$

$$\delta Z = \int_{\gamma_1} dv b_v B_v + \int_{\gamma_3} dv b_v (-B_v) + \int_{\gamma_2} du b_u (-B_u) + \int_{\gamma_4} du b_u B_u \quad (3)$$

[siehe Seite h']

$$\approx \delta v \left[(b_v B_v)_{(u_0 + \frac{\delta u}{2}, v_0, w_0)} - (b_v B_v)_{(u_0 - \frac{\delta u}{2}, v_0, w_0)} \right] \quad (4)$$

$$+ \delta u \left[-(b_u B_u)_{(u_0, v_0 + \frac{\delta v}{2}, w_0)} + (b_u B_u)_{(u_0, v_0 - \frac{\delta v}{2}, w_0)} \right]$$

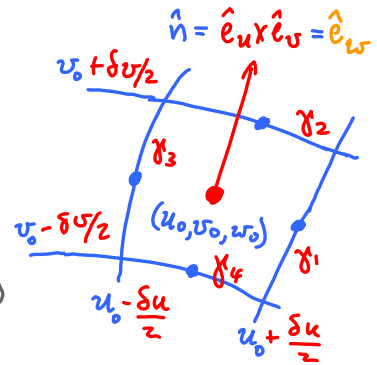
$$\approx \delta u \delta v \left[\partial_u (b_v B_v) - \partial_v (b_u B_u) \right]$$

[analog für u & v Komponenten, zyklisch permutiert]

(5)

Rotation: $(\vec{\nabla} \times \vec{B})_w \stackrel{(c.7)}{=} \frac{\delta Z}{\delta S} \stackrel{(1),(5)}{=} \frac{1}{b_u b_v} \left[\partial_u (b_v B_v) - \partial_v (b_u B_u) \right] \quad (6)$

(6) = allgemeine Formel für Rotation in krummlinig orthogonalen Koordinaten!



Erläuterung des Schrittes von Gl. (h.3) nach (h.4), für $\int_{\gamma_1} d\vec{r} \cdot \vec{B} = ?$

V4.3h'

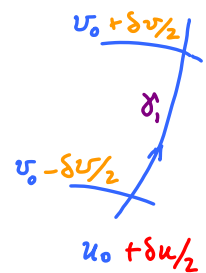
Entlang γ_1 : über den zweiten Parameter wird integriert, der erste und dritte sind fest:

Kurznotation:

$$\vec{r}(v) \equiv \vec{r}(u_0 + \frac{\delta u}{2}, v, w_0), \quad v \in [v_0 - \frac{\delta v}{2}, v_0 + \frac{\delta v}{2}]$$

$$\vec{B}(v) \equiv \vec{B}(u_0 + \frac{\delta u}{2}, v, w_0)$$

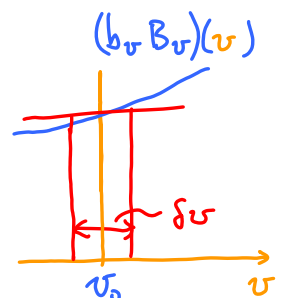
$$\frac{d\vec{r}}{dv}(v) = \frac{b(v)}{v} \hat{e}_v(v) \equiv (b_v \hat{e}_v) (u_0 + \frac{\delta u}{2}, v, w_0)$$



$$\int_{\gamma_1} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_{v_0 - \frac{\delta v}{2}}^{v_0 + \frac{\delta v}{2}} dv \frac{d\vec{r}(v)}{dv} \cdot \vec{B}(v) = \int_{v_0 - \frac{\delta v}{2}}^{v_0 + \frac{\delta v}{2}} dv b_v(v) \hat{e}_v(v) \cdot \vec{B}(v)$$

$$= \int_{v_0 - \frac{\delta v}{2}}^{v_0 + \frac{\delta v}{2}} d\sigma (b_v B_v)(v) \approx \delta v (b_v B_v)(v_0)$$

$$= \delta v (b_v B_v)(u_0 + \frac{\delta u}{2}, v_0, w_0)$$



Beispiel: Zylinderkoordinaten: $u = \rho, v = \phi, w = z, b_\rho = 1, b_\phi = \rho, b_z = 1$: V4.3h'' (1)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \stackrel{(h.b)}{=} \hat{e}_\rho \frac{1}{b_\phi b_z} \left[\frac{1}{\rho} \partial_\phi (b_z B_z) - \partial_z (b_\phi B_\phi) \right] \quad (2)$$

$$+ \hat{e}_\phi \frac{1}{b_z b_\rho} \left[\partial_z (b_\rho B_\rho) - \partial_\rho (b_z B_z) \right] + \hat{e}_z \frac{1}{b_\rho b_\phi} \left[\partial_\rho (b_\phi B_\phi) - \partial_\phi (b_\rho B_\rho) \right] \quad (3)$$

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{B} = \hat{e}_\rho \left[\frac{1}{\rho} \partial_\phi B_z - \partial_z B_\phi \right] + \hat{e}_\phi \left[\partial_z B_\rho - \partial_\rho B_z \right] \right. \quad (4)$$

$$\left. + \hat{e}_z \frac{1}{\rho} \left[\partial_\rho (\rho B_\phi) - \partial_\phi B_\rho \right] \right] \quad [\text{vergleiche Seite V4.2t}] \quad (5)$$

Beispiel: $\vec{B} = \rho \hat{e}_\phi \Rightarrow B_\rho = 0, B_\phi = \rho, B_z = 0$ (6)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \stackrel{(4,5)}{=} \hat{e}_z \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \cdot \rho) = \hat{e}_z \frac{1}{\rho} 2\rho = \hat{e}_z 2 \quad (7)$$

Beispiel 1: Magnetfeld außerhalb eines unendlich langen stromtragenden Leiters V4.3i

Zylindersymmetrie: Magnetfeld hängt nur vom Radius ab: $\vec{B} = \vec{B}(\rho, \phi, z) = B_\phi(\rho) \hat{e}_\phi$ (1)

Maxwell-Gleichung:
(Ampere-Gesetz der
Magnetostatik)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (2)$$

Konstante μ_0 \vec{j} Stromdichte im Draht

konstant \vec{j} Radius v. Draht

$$\vec{j} = \begin{cases} \vec{j} & \forall \rho < R \\ 0 & \forall \rho > R \end{cases} \quad (3)$$

Integriere über eine Kreisfläche K mit Radius $\rho > R$:

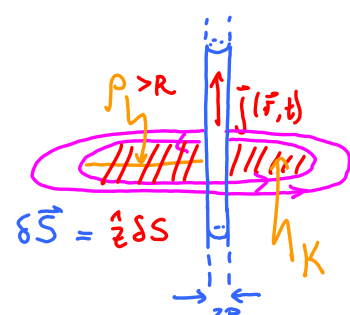
einer-seits: $\int_K d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \stackrel{(2)}{=} \int_K d\vec{S} \cdot \mu_0 \vec{j} = \mu_0 I$ (4)

Ampere $\mu_0 I$ Gesamtstrom

ander-seits: $\oint_{\partial K} d\vec{r} \cdot \vec{B} \stackrel{(6)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \rho \hat{e}_\phi \cdot \vec{B} = 2\pi \rho B_\phi$ (5)

Stokes $\oint_{\partial K} d\vec{r} \cdot \vec{B}$ $\int_K d\vec{S} \cdot \mu_0 \vec{j}$

(1) B_ϕ



[Parametrisiere Kreisintegral mittels Zylinderkoordinaten: $\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho, \frac{d\vec{r}}{d\phi} = \rho \hat{e}_\phi$ (6)]

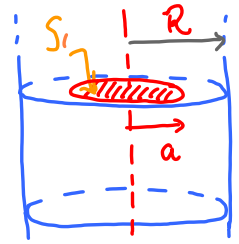
(4)=(5): liefert Beziehung zwischen Strom und Magnetfeld: $B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$ (7)

Fazit: Magnetfeld fällt ab wie $1/\rho$ mit zunehmendem Abstand vom Leiter.

Beispiel 2: Magnetfeld innerhalb eines unendlich langen stromtragenden Leiters | V4.3 j

Analog wie Beispiel 1, aber mit Kreisscheibe S_1 innerhalb v. Draht, also mit Radius $a < R$:

$$S_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0 \} \quad (1)$$



einer-seits: $\int_{S_1} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{B}(\vec{r})) \stackrel{(i.2)}{=} \int_{S_1} d\vec{S} \cdot \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \stackrel{\text{Ampere}}{=} \int_{S_1} d\phi \int_{\rho=0}^a d\rho \rho \mu_0 j = \mu_0 j \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} a^2 \quad (2)$

Stokes Kreisscheibe (mit Radius a) Zylinderkoordinaten konstante Stromdichte

ander-seits: $\oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 2\pi a B_\phi \quad (3)$

(aus Symmetrie-Gründen)

(2)=(3): liefert Beziehung zwischen Strom und Magnetfeld:

$$B_\phi = \frac{1}{2} \mu_0 j a \quad (4)$$

Ferner, aus Symmetrie-Gründen:

$$B_z = B_\rho = 0 \quad (5)$$

Fazit: $\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 j \rho \hat{e}_\phi$

[innerhalb des Drahtes nimmt Magnetfeld linear zu mit Radius]



Zusammenfassung v. Beispiel 2:

| V4.3 k

Strom durch Kreisscheibe K_1 mit Radius a: $I_{K_1} \stackrel{(j.2)}{=} j \pi a^2 \quad (1)$

Laut Ampere gilt ferner: $I_{K_1} \stackrel{(i.4)}{=} \frac{1}{\mu_0} \int_{K_1} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{B}(\vec{r})) \quad (2)$

via Stokes & Symmetrie finden wir daraus das B-Feld: $\vec{B} \stackrel{(j.6)}{=} B_\phi \hat{e}_\phi = \frac{1}{2} \mu_0 j \rho \hat{e}_\phi = \frac{1}{2} \mu_0 j \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$

Rotation von B, explizit: $\nabla \times \vec{B} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \mu_0 j \nabla \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_0 j \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_0 j \hat{e}_z \quad (4)$

Anmerkung: Das Flächenintegral einer Rotation hängt, laut Stokes, nur vom Rand ab. Zur Illustration berechnen wir nun für andere Flächen S_n , mit demselben Rand wie S_1 ,

das Integral [für $B = \text{Gl. (3)}$]: $I_{S_n} \equiv \frac{1}{\mu_0} \int_{S_n} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{B}(\vec{r})) \quad (5)$

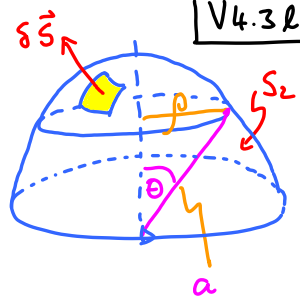
Wir werden finden: in allen Fällen gilt $I_{S_n} = I_{S_1} = j \pi a^2 \quad (6)$

Beispiel 3: Fläche von Halbkugel (S2) mit Radius a

V4.3e

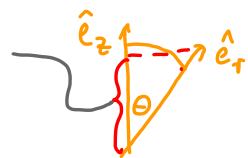
Halbkugel: $S_2 = \{ \vec{r}(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3; r = a, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi \}$ (1)

Kugelkoordinaten: $b_r = 1, b_\theta = a, b_\phi = a \sin \theta$ (2)



Flächenelement: $\delta \vec{S} = \delta S \hat{n} = \delta \phi \delta \theta \sin \theta a^2 \hat{e}_r$ (3)

Rotation B: $\vec{\nabla} \times \vec{B} \stackrel{(k.4)}{=} \mu_0 j \hat{e}_z$ (4) $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z = \cos \theta$ (5)



Berechne Integral: $I_{S_2} = \frac{1}{\mu_0} \int_{S_2} dS \hat{e}_r \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$ (6)

Substitution:

$\cos \theta = u$
 $d\theta \sin \theta = -du$

$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta = - \int_1^0 du = \int_0^1 du$ (8)

$\stackrel{(3,4)}{=} \frac{1}{\mu_0} a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \underbrace{\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z}_{(5) \cos \theta} \mu_0 j$ (7)

$\stackrel{(7)}{=} a^2 j \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\int_0^1 du \cdot u}_{1/2} = a^2 j \pi = I_{S_1}$ (9) [konsistent mit (k.1)]

Nebenbemerkung: es gibt mehr als einen Weg, die Rotation zu berechnen:

V4.3e'

Oben benutzten wir: $\hat{e}_r \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \stackrel{(l.4)}{=} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z \mu_0 j \stackrel{(l.5)}{=} \cos \theta \mu_0 j$ (1)

Alternativ: $\hat{e}_r \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{B})_r$ (2)

Berechne Rotation in Kugelkoordinaten, via (h.6), mit $u \rightarrow \theta, v \rightarrow \phi, w \rightarrow r$ (3)

B in Kugelkoord: $\vec{B} = B_\phi \hat{e}_\phi, B_\phi = \frac{1}{2} \mu_0 j \rho = \frac{1}{2} \mu_0 j a \sin \theta$ (4)

[siehe Skizze, Seite e]

$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_r \stackrel{(h.6)}{=} \frac{1}{b_\theta b_\phi} [\partial_\theta (b_\phi B_\phi) - \partial_\phi (b_\theta B_\theta)] \stackrel{(j.5)=0}{=} \dots$ (5)

(l.2):
 $b_r = 1,$
 $b_\theta = a$
 $b_\phi = a \sin \theta$ (6)

$\stackrel{(6)}{=} \frac{1}{a \cdot a \sin \theta} [\partial_\theta (a \sin \theta \cdot \frac{1}{2} \mu_0 j a \sin \theta)]$ (7)

$= \frac{1}{2} \mu_0 j \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial_\theta \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \omega_\theta} = \mu_0 j \cos \theta$ (8) [konsistent mit (1)]

Beispiel 4: Fläche von Kegelmantel (S3), mit Basisradius a

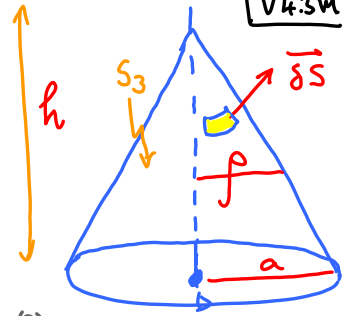
V4.3m

$$S_3 = \left\{ \vec{r}(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ 0 \leq z = h(1 - \rho/a) \end{array} \right\} \quad (1)$$

Zylinderkoordinaten:

$$b_\rho = 1, \quad b_\phi = \rho, \quad b_z = 1$$

Kegelmantel: $\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ h(1 - \rho/a) \end{pmatrix} \quad (2) \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 j \hat{e}_z \quad (3)$



Orientiertes Flächenelement:

$$\delta \vec{S} \stackrel{(C4.6e.2)}{=} \partial_\rho \vec{r} \times \partial_\phi \vec{r} \delta \rho \delta \phi \stackrel{(2)}{=} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ -h/a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \delta \rho \delta \phi = \begin{pmatrix} (h\rho/a) \cos \phi \\ (h\rho/a) \sin \phi \\ \rho \end{pmatrix} \delta \rho \delta \phi \quad (4)$$

Berechne Integral:

$$I_{S_3} \stackrel{(K.5)}{=} \frac{1}{\mu_0} \int_{S_3} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{B}(\vec{r})) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \underbrace{\rho}_{(d\vec{S})_z} \mu_0 j \delta \rho \delta \phi = 2\pi \cdot \frac{1}{2} a^2 j = a^2 \pi j = I_{S_1} \quad (5)$$

[konsistent mit (K.1)]

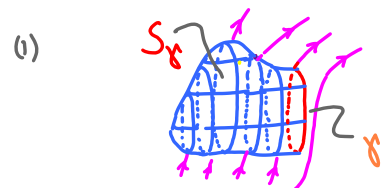
Zusammenfassung: V.4.3 Satz von Stokes

ZV4.3b

Satz v. Stokes: Flussintegral der Rotation = Linienintegral

$$\int_{S_\gamma} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{v}(\vec{r})) = \oint_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

S_γ — Fläche γ — Rand der Fläche = Linie



Symbolisch: $\int_S dS_i (\partial \times v)_i = \int_{\partial S} dr_i v_i \quad (2)$

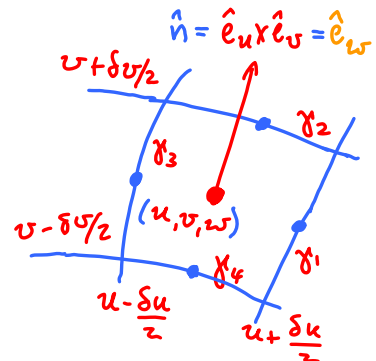
suggestive Notation

Geometrische Definition der Rotation:

$$\hat{n} \cdot (\nabla \times \vec{v}) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\delta S} \oint_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{v} \quad (3)$$

"Zirkulation pro gerichteter Fläche"

$$\delta \vec{S} = \hat{n} \delta S \quad (4)$$



Rotation in krummlinigen Koordinaten:

$$(\nabla \times \vec{B})_{uv} = \frac{1}{b_u b_v} \left[\partial_u (b_v B_v) - \partial_v (b_u B_u) \right] \quad (5)$$

analog für u & v Komponenten, zyklisch permutiert