C8: Komplexe Analysis (KA)

Saff & Snyder, Fundamentals of Complex Analysis", Prentice Hall, 1976.

Cauchy

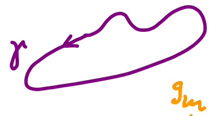
Motivation: Differenzieren und Integrieren in der komplexen Ebene

Vorschau: Eine komplexe Funktion $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei nur von der Kombination

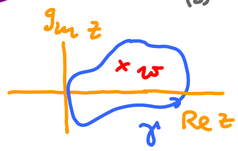
$z = x + iy$ abhängig, $(x,y) \longmapsto f(z) = f(x+iy) \equiv \underbrace{u(x,y)}_{\text{Realteil}} + i\,\underbrace{v(x,y)}_{\text{Imaginärteil}}$ (1)

und "komplex differenzierbar" ($\frac{df}{dz}$ existiert) in $\mathcal{U}$. Dann gelten (u.a.):

- Cauchy-Riemann-Gleichungen: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (2)
- Geschlossene Linien-integrale in $\mathbb{C}$ liefern 0: $\oint_\gamma dz\, f(z) = 0$ (3)



- Integralsatz von Cauchy: $f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{f(z)}{z - w}$ (4)



- "Residuen-Satz": Sei $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-w)^n$ (5) (verallgmeinerte Taylor-Reihe, mit Divergenz bei w)

dann: $\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz\; g(z) = a_{-1}$ (6)

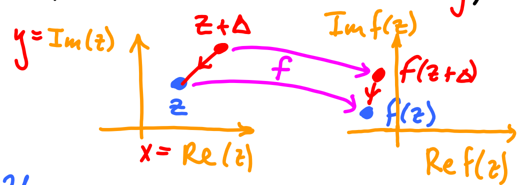
Wichtige Anwendung der KA in der Physik: als Hilfsmittel beim Berechnen von Integralen. Besonders wichtig für "konforme Feldtheorie" & Stringtheorie

C8.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition: Eine komplexwertige Funktion $f(z)$ einer komplexen Variable $z \equiv x + iy$,

$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ [$\mathcal{U}$ offen] (wichtig!) (1)

$z \longmapsto f(z)$

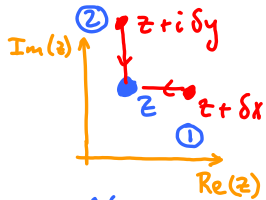


heißt "komplex differenzierbar" an der Stelle $z \in \mathcal{U}$, falls folgender Limes existiert:

$$\lim_{\mathbb{C} \ni \Delta \to 0} \frac{f(z+\Delta) - f(z)}{\Delta} \equiv f'(z) \equiv \frac{df(z)}{dz} \qquad (2)$$

(beachte Notation: totale Ableitung nach z)

Anmerkung: Der Limes (2) muss unabhängig von der Richtung sein, entlang der Δ nach Null strebt. Das ist gewährleistet, wenn f von x und y nur in der Kombination $x + iy$ abhängt.



①: $\Delta = \delta x$:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\overbrace{f(z+\delta x) - f(z)}^{f(x+\delta x+iy)}}{\delta x} = \frac{\partial f(z(x+iy))}{\partial x} \underset{\text{Kettenregel}}{=} f'(z) \overbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}^{=1} = f'(z) \qquad (3)$$

②: $\Delta = i\delta y$:

$$\lim_{i\delta y \to 0} \frac{\overbrace{f(z+i\delta y)}^{f(x+i(y+\delta y))} - f(z)}{i\; y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f(z(x+iy))}{\partial y} = \frac{1}{\cancel{i}} f'(z) \overbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}^{=i} = f'(z) \qquad (4)$$

Definition: Jeder Punkt z bei dem $f'(z)$ nicht existiert, ist eine "Singularität" von $f(z)$

C8.1c

Definition: f heisst "analytisch" auf $\mathcal{U}$, falls f in ganz $\mathcal{U}$ komplex differenzierbar ist. (1)

Anmerkung zur Nomenklatur: Manche Autoren nennen eine Funktion "holomorph" in $\mathcal{U}$ falls sie (1) erfüllt, und "analytisch" in $\mathcal{U}$, falls ihre Taylor-Entwicklung überall in $\mathcal{U}$ konvergiert. Man kann zeigen, dass eine komplexe Funktion genau dann holomorph ist, wenn sie analytisch ist. Deswegen verzichten wir hier auf eine Unterscheidung.

Beispiele für analytische Funktionen:

- z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$ sind analytisch auf $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ (2)
- $\frac{1}{z - z_0}$ ist analytisch auf $\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus z_0$ [das ganze $\mathbb{C}$, ausser z_0] (3)

Beispiele für nicht-analytische Funktionen:

- $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$ hängt nicht nur von $x+iy$ ab, sondern auch von $x-iy$ (4)
- $\bar{z} = x - iy$ ist nicht eine analytische Funktion von $z = x + iy$ (5)

denn Limes ist nicht eindeutig:
$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\left(\overline{z+\Delta} - \bar{z}\right)}{\Delta} = \frac{\bar{\Delta}}{\Delta} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \Delta = \Delta x = \bar{\Delta} \\ -1 & \text{falls } \Delta = i\Delta y = -\bar{\Delta} \end{cases} \tag{6}$$

C8.1d

Ableitungsregeln für analytische Funktionen (wie im Reellen):

(i) Linearität:
$$\frac{d}{dz}\left[\lambda f(z) + \mu g(z)\right] = \lambda f'(z) + \mu g'(z) \tag{1}$$

(ii) Produktregel:
$$\frac{d}{dz}\left[f(z)\, g(z)\right] = f'(z)\, g(z) + f(z)\, g'(z) \tag{2}$$

Folgerung:
$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$$
[Abl. v. Polynomen wie im Reellen] (3)

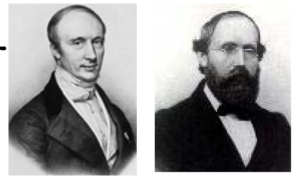
(iii) Quotientenregel:
$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z)\, g(z) - f(z)\, g(z')}{g^2(z)}$$
falls $g(z) \neq 0$ (4)

(iii) Kettenregel:
$$\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z))\, g'(z) \tag{5}$$

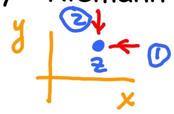
Komplexe Differenzierbarkeit ist viel stärkere Bedingung als reelle Differenzierbarkeit. Wir diskutieren nur einige ihrer weitreichenden Folgen für analytische Funktionen.

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

C8.1e



Cauchy Riemann



Schreibe $z \equiv x + iy \qquad (x, y \in \mathbb{R})$ (1)

$f(z) = f(x+iy) \equiv u(x,y) + i\, v(x,y) \qquad (u, v \in \mathbb{R})$ (2)

Also: $u \equiv \mathrm{Re}\, f(z) \;, \qquad v \equiv \mathrm{Im}\, f(z)$ (3)

$f(z)$ sei komplex differenzierbar, dann gilt: $f'(z) = \frac{d}{dz} f(z) \overset{(b.3)}{=} \partial_x f(z) \overset{(b.4)}{=} \frac{1}{i} \partial_y f(z)$ (4)

Aber aus (2) folgt: $f'(z) \overset{(4)}{=} \partial_x f(z) \overset{(2)}{=} \partial_x u(x,y) + i\, \partial_x v(x,y)$ (5)

und auch: $f'(z) \overset{(4)}{=} \frac{1}{i} \partial_y f(z) \overset{(2)}{=} \frac{1}{i} \partial_y u(x,y) + i \frac{1}{i} \partial_y v(x,y)$ (6)

Laut (4) ist (5) = (6): $\underline{\partial_x u} + i\, \partial_x v \overset{(5)}{=} f'(z) \overset{(6)}{=} -i\, \partial_y u + \underline{\partial_y v}$ (7)

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen: $\partial_x u \overset{\mathrm{Re}(7)}{=} \partial_y v \;,$ (8) $\qquad \partial_x v \overset{\mathrm{Im}(7)}{=} -\partial_y u$ (9)

Folgerung: komplexe Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Cauchy-Riemann-Gleichungen (CRG)

Beispiel:

C8.1e'

$$f(z) = (1 + iz)^2 = 1 + 2iz - z^2 \tag{1}$$

$$= 1 + 2i(x + iy) - (x+iy)^2 \tag{2}$$

$$= \underbrace{1 + 2(-y) - (x^2 - y^2)}_{} + i\,(\underbrace{2x - 2xy}_{}) \tag{3}$$

$$= u(x,y) + i\, v(x,y) \tag{4}$$

$$u(x,y) = 1 - 2y - x^2 + y^2 \;, \qquad v(x,y) = 2x - 2xy \tag{5}$$

Gelten CRG?

$\partial_x u = -2x \;, \quad \partial_x v = 2 - 2y = -\partial_y u$ ✓ [also gilt (e.9)] (6)

$\partial_y u = -2 + 2y \;, \quad \partial_y v = -2x = \partial_x u$ ✓ [also gilt (e.8)] (7)

Umkehrschluss gilt auch: Cauchy-Riemann-Gl. $\Rightarrow$ komplexe Differenzierbarkeit:

<u>Satz:</u> Sei $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Abbildung, mit $f = u + iv$ d.h. (1)

$$u(x,y) \equiv \mathrm{Re}\, f(x+iy), \qquad v(x,y) \equiv \mathrm{Im}\, f(x+iy) \tag{2}$$

Falls u, v stetig differenzierbar sind für $z \in \mathcal{U}$ und die Cauchy-Riemann-Gl. erfüllen, ist f komplex differenzierbar an der Stelle z.

<u>Begründung:</u> (Optional) Schreibe $\Delta = \Delta x + i\Delta y$, mit $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$ (3)

Taylor für u: $$u(x+\Delta x, y+\Delta y) \overset{(C5.10.4)}{=} u(x,y) + \Delta x\, \partial_x u(x,y) + \Delta y\, \partial_y u(x,y) + \mathcal{O}(|\Delta|^2) \tag{4}$$

Taylor für v: $$i v(x+\Delta x, y+\Delta y) \overset{(C5.10.4)}{=} i v(x,y) + i\Delta x\, \partial_x v(x,y) + i\Delta y\, \partial_y v(x,y) + \mathcal{O}(|\Delta|^2) \tag{5}$$

(4+5)
-(4+5)$|_{\Delta=0}$: $$f(z+\Delta) - f(z) = \Delta x\, \partial_x u + i\Delta x\, \partial_x v + \Delta y\, \partial_y u + \Delta y\, i\, \partial_y v + \mathcal{O}(|\Delta|^2) \tag{6}$$

Nutze CRG, um ∂_y durch ∂_x zu ersetzen:

(f.6): $$f(z+\Delta) - f(z) = \Delta x\, \overset{1}{\partial_x} u + i\Delta x\, \overset{2}{\partial_x} v + \Delta y\, \underbrace{\overset{3}{\partial_y} u}_{\text{CRG: (e.9)}\ -\partial_x v} + \Delta y\, i\, \underbrace{\overset{4}{\partial_y} v}_{\text{(e.8)}\ \partial_x u} + \mathcal{O}(|\Delta|^2) \tag{1}$$

$$= \underbrace{(\overset{1}{\Delta x} + \overset{4}{i\Delta y})}_{\Delta}\, \partial_x u + \underbrace{(\overset{2}{\Delta x} + \overset{3}{i\Delta y})}_{\Delta}\, i\, \partial_x v + \mathcal{O}(|\Delta|^2) \tag{2}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}\left[f(z+\Delta) - f(z)\right] = \partial_x (u + iv) = \partial_x f(z) \overset{(b.3)}{=} \frac{d}{dz} f(z) \tag{3}$$

Es geht auch anders herum: nutze CRG, um ∂_x durch ∂_y zu ersetzen:

(f.6): $$f(z+\Delta) - f(z) = \Delta x\, \underbrace{\overset{1}{\partial_x} u}_{\text{CRG: (e.8)}\ \partial_y v} + i\Delta x\, \underbrace{\overset{2}{\partial_x} v}_{\text{(e.9)}\ -\partial_y u} + \Delta y\, \overset{3}{\partial_y} u + \Delta y\, i\, \overset{4}{\partial_y} v + \mathcal{O}(|\Delta|^2) \tag{4}$$

$$= -i\underbrace{(\overset{2}{\Delta x} + \overset{3}{i\Delta y})}_{\Delta}\, \partial_y u + -i\underbrace{(\overset{1}{\Delta x} + \overset{4}{i\Delta y})}_{\Delta}\, i\, \partial_y v + \mathcal{O}(|\Delta|^2) \tag{5}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}\left[f(z+\Delta) - f(z)\right] = \frac{1}{i}\partial_y (u + iv) = \frac{1}{i}\partial_y f(z) \overset{(b.3)}{=} \frac{d}{dz} f(z) \tag{6}$$

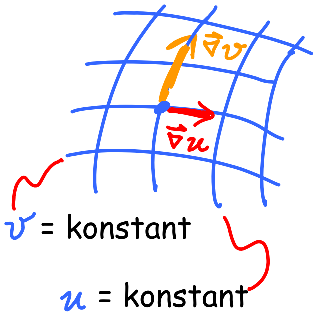
Fazit: f ist komplex differenzbierbar in bei z !! $\square$

Anmerkung: $(x,y) \mapsto u(x,y) \equiv \mathrm{Re}\, f(x+iy)$, $(x,y) \mapsto v(x,y) \equiv \mathrm{Im}\, f(x+iy)$ sind beide Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (1)

Folgerung aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen:
Die Höhenlinien dieser Abbildungen (1) sind orthogonal zu einander: (2)

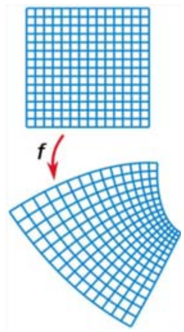
Begründung: (siehe V3f.6)

Höhenlinien von u sind (entlang denen $u(x,y)$ = konstant): $\perp$ $\vec{\nabla} u = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}$ (3)



Höhenlinien von v sind (entlang denen $v(x,y)$ = konstant): $\perp$ $\vec{\nabla} v = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$ (4)

$$\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = (\partial_x u)\underbrace{(\partial_x v)}_{\text{CRG: (e.9) } -\partial_y u} + (\partial_y u)\underbrace{(\partial_y v)}_{\text{(e.8) } \partial_x u} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} u \perp \vec{\nabla} v} \quad \square \qquad (5)$$



Weitere Folgerung: eine analytische Funktion f definiert [via (1)] eine "konforme" ("winkeltreue") Abbildung zwischen den Koordinatensystemen (x,y) und $(u,v) = (u(x,y), v(x,y))$ (6)

C8.2 Integration im Komplexen

Hauptsatz der Analysis für komplexe Funktionen einer reellen Variable:

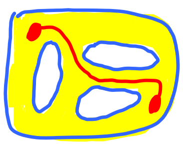
Sei $f(t) : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige, stetige Funktion einer reellen Variable t, mit Stammfunktion $F(t)$, d.h. $F'(t) = f(t) \quad \forall\, t \in [t_0, t_1]$, dann

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\, f(t) = F(t_1) - F(t_0) \qquad \text{[genau wie im Reellen]} \qquad (1)$$

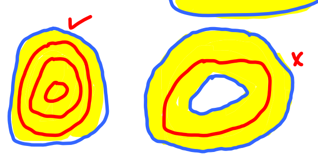
Triviales Beispiel: $$\int_{t_0}^{t_1} dt\, [\sin t + i \cos t] = \Big[-\cos t + i \sin t\Big]_{t_0}^{t_1} \qquad (2)$$

Integration einer Funktion $f(z)$ einer komplexen Variablen, $z = x + iy$, entspricht einem Linienintegral in der komplexen Ebene. Dafür benötigen wir folgende Begriffe:

Definition: Eine Menge $G \subset \mathbb{C}$ (oder auch $G \subset \mathbb{R}^n$) heißt "Gebiet" falls (3)
$G \neq \emptyset$ (nicht leer) und "zusammenhängend" ist (d.h. je zwei Punkte können durch eine stetige Kurve verbunden werden).



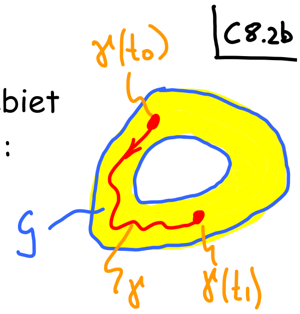
Definition: ein Gebiet ist "einfach zusammenhängend", falls sich jeder geschlossene Weg zu einem Punkt zusammenziehen lässt. (4)



Definition: Komplexes Wegintegral (oder "Kontur-Integral")

C8.2b

Sei γ eine glatte, gerichtete Kurve in einem zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, parametrisiert durch die reelle Variable $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$:



$$\gamma: \begin{cases} [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow G \subset \mathbb{C} \\ t \longmapsto \gamma(t) \end{cases} \qquad (1)$$

Ferner sei $f: G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ eine stetige Funktion auf dem Gebiet G

Das "komplexe Wegintegral von $f(z)$ entlang γ" ist wie folgt definiert:

$$\int_\gamma dz\, f(z) \overset{\text{(V1m.6)}}{\equiv} \int_{t_0}^{t_1} dt \, \frac{d\gamma(t)}{dt} f(\gamma(t)) \qquad (2)$$

Parametrisierung: $\quad z = \gamma(t) \equiv x(t) + i\, y(t) \qquad (3)$

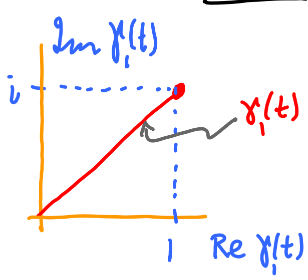
$$\left[dz = dt \frac{d\gamma}{dt} \equiv \underbrace{dt \frac{dx}{dt}}_{\substack{\shortparallel \\ \underbrace{dx}_{\text{"Re}(dz)\text{"}}}} + i \underbrace{dt \frac{dy}{dt}}_{\substack{\shortparallel \\ \underbrace{dy}_{\text{"Im}(dz)\text{"}}}} \right] \qquad (4)$$

Kann gezeigt werden: Wegintegral ist unabhängig von der Parametrisierung
(d.h. eine andere Parametrisierung des selben Weges liefert dasselbe Ergebnis).

Einfaches Beispiel 1:

C8.2c

$$f(z) = z, \qquad \{\gamma_1(t) = (1+i)t, \quad t \in [0,1]\} \qquad (1)$$



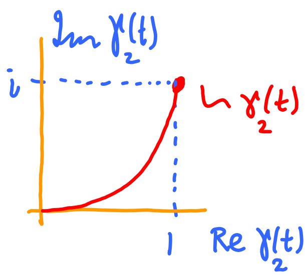
$$\int_{\gamma_1} dz\, f(z) \overset{(2b.2)}{=} \int_0^1 dt \underbrace{\frac{d\gamma_1}{dt}}_{(1):\ 1+i} \overbrace{((1+i)t)}^{f(z(t)) = z} \qquad (2)$$

$$= (1+i)^2 \int_0^1 dt\, t = \tfrac{1}{2}(1+i)^2 \qquad (3)$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 + 2i - 1) = i \qquad (4)$$

Einfaches Beispiel 2:

$$f(z) = z, \qquad \{\gamma_2(t) = t + i t^2, \quad t \in [0,1]\} \qquad (5)$$



$$\int_{\gamma_2} dz\, z \overset{(2b.2)}{=} \int_0^1 dt \underbrace{\frac{d\gamma_2}{dt}}_{(5):\ (1+2it)} \overbrace{(t + it^2)}^{f(z(t)) = z} \qquad (6)$$

$$= \int_0^1 dt \left[t + (2i + i)t^2 - 2t^3 \right] \qquad (7)$$

$$= \tfrac{1}{2} + 3i \cdot \tfrac{1}{3} - 2 \cdot \tfrac{1}{4} = i \overset{!!}{=} (4) \qquad (8)$$

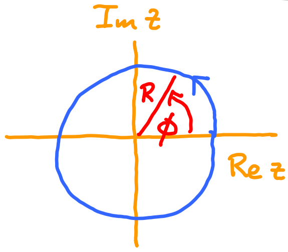
kein Zufall, siehe Seite C8.2e !

Wichtiges Beispiel: Kreisintegral v. z^n $(n\in\mathbb{Z})$ um den Ursprung herum

C8.2d

γ sei Kreis in $\mathbb{C}$, mit Radius R, Mittelpunkt bei $z=0$:

$$\{\gamma(\phi)=Re^{i\phi},\quad \phi\in[0,2\pi]\} \qquad (1)$$



Substitution: $z=\gamma(\phi)=Re^{i\phi}$ (2)

$$I_n \equiv \oint_\gamma dz\, z^n \overset{(b.2)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{d\gamma}{d\phi}\,(\gamma(\phi))^n \qquad (3)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi\, \overbrace{iRe^{i\phi}}^{(1)} \,(Re^{i\phi})^n = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } n=-1 \quad (4a)\\ \frac{R^{n+1}}{n+1}\, e^{i(n+1)\phi}\Big|_0^{2\pi} = 0 & \text{falls } n\neq -1 \quad (4b)\end{cases}$$

In diesem Beispiel hat das komplexe Wegelement folgende Form:

$$dx+i\,dy \equiv dz \overset{(2b.4)}{=} d\phi\,\frac{d\gamma}{d\phi} \overset{(2)}{=} d\phi\; iRe^{i\phi} = d\phi\; iR(\cos\phi + i\sin\phi) \qquad (5)$$

$$dx \equiv \mathrm{Re}(dz) \overset{(5)}{=} -d\phi\, R\sin\phi \qquad (6)$$

$$dy \equiv \mathrm{Im}(dz) \overset{(5)}{=} d\phi\, R\cos\phi \qquad (7)$$

Beachten: dz, dx, dy sind i.A. alle Funktionen des Kurvenparameters (hier ϕ), d.h. sie ändern sich entlang der Kurve!

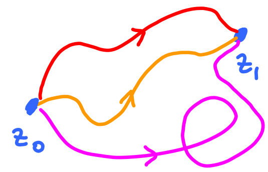
Wegunabhängigkeit:

C8.2e

Satz: $f(z): G\to\mathbb{C}$ sei stetig und dessen Stammfunktion $F(z)$ existiere überall in G, d.h. $F'(z)=f(z)\quad \forall z\in G$. (1)

Dann gilt für jede glatte Kontur $\gamma\subset G$, mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1:

$$\int_\gamma dz\, f(z) = F(z_1)-F(z_0) \qquad (2)$$



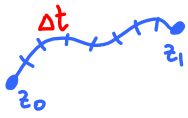
⇒ Ergebnis hängt nur von den Anfangs- und Endpunkten ab, nicht vom Weg dazwischen! [Beispiel: (c.4) = (c.8)]

Begründung: Parametrisiere Weg mit $\{\gamma(t):[t_0,t_1]\to G,\ \gamma(t_0)=z_0,\ \gamma(t_1)=z_1\}$ (3)

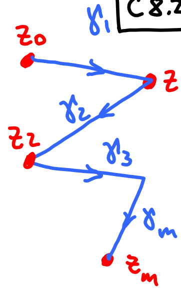
Dann $$\int_\gamma dz\, \underbrace{f(z)}_{(1):\,F'(z)} \overset{(b.2)}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{d\gamma}{dt}\,F'(\gamma(t)) \underset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{d}{dt}\left[F(\gamma(t))\right] \qquad (4)$$

$$\overset{(a.1)}{=} F(\gamma(t_1))-F(\gamma(t_0)) \overset{(3)}{=} F(z_1)-F(z_0) \quad \square \qquad (5)$$

(4) ermöglicht Interpretation für Wegintegral als Summe: $$\int_\gamma dz\, f(z) \overset{(4)}{\simeq} \sum_{i=1}^N \Delta t \left(\frac{dF}{dt}\right)_i = \sum_i \Delta F_i \qquad (6)$$



<u>Definition:</u> Eine "zusammengesetzte Kontur" $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ bestehe aus glatten, gerichteten Teilstücken γ_i. Das Wegintegral einer auf Γ stetigen Funktion $f(z)$ ist definiert durch:



$$\int_\Gamma dz\, f(z) \equiv \int_{\gamma_1} dz\, f(z) + \int_{\gamma_2} dz\, f(z) + \dots + \int_{\gamma_m} dz\, f(z) \qquad (1)$$

Satz (e.2) gilt für jedes Zeilstück, also auch für zusammengesetzte Kontur:

$$f(z) = [F(\cancel{z_1}) - F(z_0)] + [F(\cancel{z_2}) - F(\cancel{z_1})] + [F(\cancel{z_3}) - F(\cancel{z_2})] + \dots + [F(z_m) - F(\cancel{z_{m-1}})] = F(z_m) - F(z_0) \qquad \square \quad (2)$$

<u>Korollar</u> [mit denselben Voraussetzungen wie (e.2)]:
Für einen <u>geschlossenen</u> Weg ist Anfangspunkt = Endpunkt: $z_0 = z_n$

$$\Rightarrow \quad \oint dz\, f(z) \overset{(2e.2)}{=} 0 \qquad (3)$$

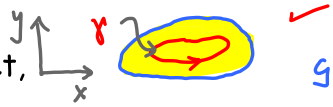
Beispiel: (2d.4b) für $n \neq -1$.

[Für $n = -1$, (d.4a), sind Voraussetzungen v. (d.2) nicht erfüllt, da die Stammfunktion von $1/z$ nämlich $\ln(z)$, nicht überall auf einem geschlossenem Weg um 0 herum existiert.]

Falls $f(z)$ analytisch ist, läßt sich (3) zeigen auch ohne Verweis auf die Stammfunktion $F(z)$, und zwar mittels Satz. von Cauchy:

<u>Satz v. Chauchy:</u>

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet,



$f: G \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) \overset{(C8.1e.2)}{\equiv} u(x,y) + i\,v(x,y)$ (1) eine analytische Funktion auf G

$\gamma: [0,1] \to G, \quad t \mapsto \gamma(t) \equiv x(t) + i\,y(t)$ (2) eine stetige, <u>geschlossene</u> Kurve in G

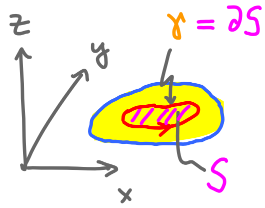
Dann gilt:

$$\oint_\gamma dz\, f(z) = 0 \qquad (3)$$

<u>Begründung:</u>

$$I \equiv \oint_\gamma dz\, f(z) \overset{(2b.2)}{=} \int_0^1 dt\, \frac{d\overset{(2)\,x+iy}{\gamma(t)}}{dt} \cdot \overset{(1)\,u+iv}{f(\gamma(t))} \qquad (4)$$

$$= \int_0^1 dt\, \frac{d}{dt}\big(x(t) + i\,y(t)\big) \cdot \Big(\underbrace{u(x(t),y(t))}_{\equiv u(\vec r(t))} + i\,\underbrace{v(x(t),y(t))}_{\equiv v(\vec r(t))}\Big) \qquad (5)$$



Interpretiere (5) als reelles Wegintegral in der x-y-Ebene, entlang dem Weg γ: $\quad \vec r: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \vec r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ (6)

Realteil v. (5):

$$Re(I) = \int_0^1 dt \left[\dot x(t)\, u(\vec r(t)) \overset{(i)^2}{-} \dot y(t)\, v(\vec r(t))\right] \qquad (7a)$$

Imaginärteil v. (5):

$$Im(I) = \int_0^1 dt \left[\dot x(t)\, v(\vec r(t)) + \dot y(t)\, u(\vec r(t))\right] \qquad (7b)$$

$$\mathrm{Re}(I) \overset{(2g.7a)}{=} \int_0^1 dt\, (\underbrace{\dot x, \dot y, 0}_{\equiv \dot{\vec r}(t)})^T \cdot (\underbrace{u, -v, 0}_{\equiv \vec P(\vec r(t))})^T \qquad (1a)$$

$$\overset{(V1m.6)}{=} \int_\gamma d\vec r \cdot \vec P \,, \qquad \vec P \equiv \begin{pmatrix} u(\vec r) \\ -v(\vec r) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2a)$$

$$\mathrm{Im}(I) \overset{(2g.7b)}{=} \int_0^1 dt\, (\underbrace{\dot x, \dot y, 0}_{\equiv \dot{\vec r}(t)})^T \cdot (\underbrace{v, u, 0}_{\equiv \vec Q(\vec r(t))})^T \qquad (1b)$$

$$\overset{(V1m.6)}{=} \int_\gamma d\vec r \cdot \vec Q \,, \qquad \vec Q \equiv \begin{pmatrix} v(\vec r) \\ u(\vec r) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2b)$$

Schreibe diese Wegintegrale mittels Stokes als Flussintegrale, über die von γ eingeschlossene Fläche (nenne sie S) in der x-y-Ebene, mit $\delta \vec S = \hat z\, \delta x\, \delta y$

$$\mathrm{Re}(I) \overset{(ZV4.3b.1)}{=} \iint_S d\vec S \cdot (\vec\nabla \times \vec P(\vec r)) \qquad (3a)$$

$$\overset{(1)}{=} \iint_S dx\, dy\, (\vec\nabla \times \vec P(\vec r))_z \qquad (4a)$$

$$= \iint_S dx\, dy \left(\underbrace{\partial_x(-v)}_{\partial_y u} - \partial_y u \right) \qquad (5a)$$

CRG (C8.1e.9):

$$= 0 \qquad (6a)$$

$$\mathrm{Im}(I) \overset{(ZV4.3b.1)}{=} \iint_S d\vec S \cdot (\vec\nabla \times \vec Q(\vec r)) \qquad (3b)$$

$$\overset{(1)}{=} \iint_S dx\, dy\, (\vec\nabla \times \vec Q(\vec r))_z \qquad (4b)$$

$$= \iint_S dx\, dy \left(\underbrace{\partial_x u}_{\partial_y v} - \partial_y v \right) \qquad (5b)$$

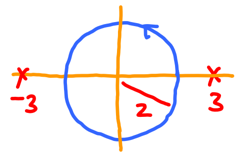
CRG (C8.1e.8):

$$= 0 \qquad (6b)$$

Wir durften Cauchy-Riemann-Gleichungen (C8.1e.8-9) nutzen, da $f(z)$ auf S analytisch ist! $\square$

Beispiel:

$$\oint_{\gamma: |z|=2} dz\, \frac{e^z}{z^2 - 9} = 0 \qquad (1)$$

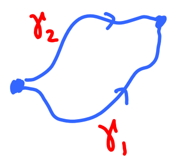


denn der Integrand ist überall analytisch ausser bei $z = \pm 3$, d.h.
überall analytisch in einem Gebiet, das γ enthält, also gilt der Satz v. Cauchy, (2g.3).

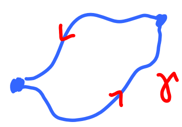
Faustregel: geschlossenes Wegintegral verschwindet, falls $f(z)$ analytisch ist "innerhalb des Wegs" (= "im vom Weg eingeschlossenen Gebiet") !

Korollar aus Satz v. Cauchy (mit denselben Voraussetzungen): Verschiedene Wegintegrale mit demselben Start- und Endpunkt sind gleich:

$$\int_{\gamma_1} dz\, f(z) = \int_{\gamma_2} dz\, f(z) \qquad (2)$$



Begründung: $\gamma = (\gamma_1, -\gamma_2)$ (2) bildet geschlossenen Weg,



also:

$$\int_{\gamma_1} dz\, f(z) - \int_{\gamma_2} dz\, f(z) = \oint_\gamma dz\, f(z) \overset{(g.3)}{=} 0 \qquad (4)$$

$\square$.

Zusammenfassung: C8.1-2 Analytische Funktionen I

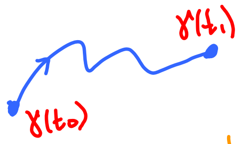
Def: Komplexe Funktion
$$f(z) = \begin{cases} \mathcal{U} \subset \mathbb{C} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto \quad f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y) \end{cases} \qquad (1)$$

ist analytisch in $\mathcal{U}$, falls $f'(z)$ überall in $\mathcal{U}$ existiert.

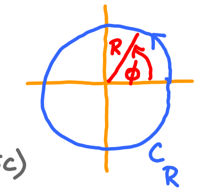
Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (CRG):
$$\partial_x u = \partial_y v \quad (2) \qquad \partial_x v = -\partial_y u \quad (3)$$

Def: Komplexes Wegintegral:
$$\int_\gamma dz\, f(z) \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{d\gamma(t)}{dt}\, f(\gamma(t)) \qquad (4)$$

Substitution: $z = \gamma(t)$

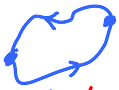


Wichtiges Beispiel:
$$I_n \equiv \oint_{C_R} dz\, z^n = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls} \quad n = -1 \quad (5a) \\ 0 & \text{falls} \quad n \neq -1 \quad (5b) \end{cases} = 2\pi i\, \delta_{n,-1} \quad (5c)$$



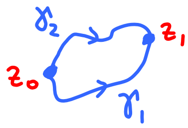
Satz v. Cauchy: falls $f(z)$ analytisch ist auf einfach zusammenhängendem Gebiet, gilt:

Geschlossener Weg liefert 0:
$$\oint_\gamma f(z) = 0 \qquad (6)$$


$\gamma = (\gamma_1, -\gamma_2)$

$\Longleftrightarrow$

Wegunabhängigkeit:
$$\int_{\gamma_1} dz\, f(z) = \int_{\gamma_2} dz\, f(z) \qquad (7)$$



$$= F(z_1) - F(z_0), \quad \text{mit} \quad F'(z) = f(z) \qquad (8)$$