

Beispiel 1: Wegverformung

Berechne: $I = \oint_{\gamma} dz f(z)$, mit $f(z) = \frac{1}{z}$ (1)

Lösung: $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ existiert für alle $z \neq 0$. (2)

[Man sagt: $\frac{1}{z}$ hat eine "Singularität" oder "Pol" bei $z = 0$.]

Folglich ist $\frac{1}{z}$ analytisch auf $\mathbb{C} \setminus 0$ (3)

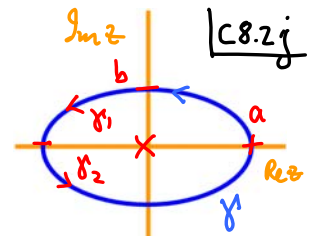
Deswegen kann Wegunabhängigkeit (i.2) genutzt werden, um Integrationsweg zu einem Kreisweg zu "verformen", für den das Integral aus (d.5a) bekannt ist:

$$I \stackrel{(1),(4)}{=} \oint_{(\gamma_1, \gamma_2)} dz f(z) \stackrel{(f.1)}{=} \int_{\gamma_1} dz f(z) + \int_{\gamma_2} dz f(z) \quad (6)$$

Wegunabhängigkeit: $\int_{\gamma_3} dz f(z) + \int_{\gamma_4} dz f(z) \quad (7)$

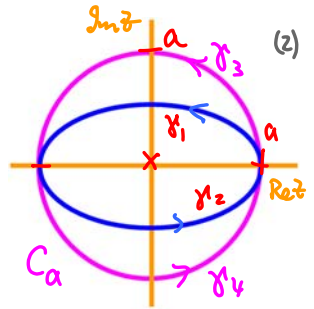
$$\stackrel{(f.1),(5)}{=} \oint_{C_a} dz \frac{1}{z} \stackrel{(d.3)}{=} I_{-1} \stackrel{(d.4a)}{=} 2\pi i \quad (8)$$

Kurzfassung: $\oint_{\gamma} dz f(z) = \oint_{C_a} dz \frac{1}{z} = 2\pi i \quad (9)$



$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \quad (4)$$

$$C_a = (\gamma_3, \gamma_4) \quad (5)$$



(denn γ_1 und γ_3 haben denselben Anfangs- und Endpunkt, und auf dem Gebiet dazwischen ist $f(z)$ analytisch. Ditto für γ_2 und γ_4 .)

Beispiel 1: Wegverformung, Fortsetzung

Alternative Konturverformung:

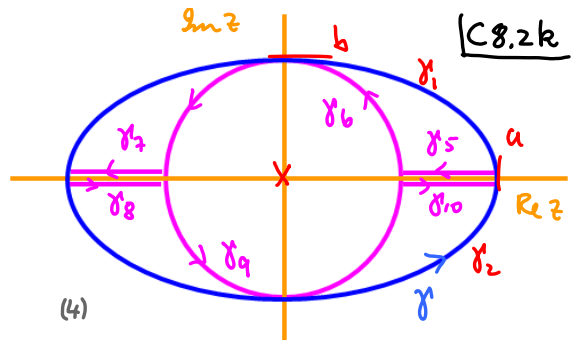
$$\int_{\gamma} = \int_{(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)} \quad (1) \quad \tilde{\gamma}_1 = (\gamma_5, \gamma_6, \gamma_7) \quad (2)$$

$$\tilde{\gamma}_2 = (\gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}) \quad (3)$$

$$I = \oint_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(1),(f.1)}{=} \int_{\tilde{\gamma}_1} dz f(z) + \int_{\tilde{\gamma}_2} dz f(z) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(2),(3),(f.1)}{=} \left[\int_{\gamma_5} dz f(z) + \int_{\gamma_6} dz f(z) + \int_{\gamma_7} dz f(z) \right] \\ &\quad \text{heben sich weg} \quad \text{bilden Kreis} \quad \text{heben sich weg} \\ &+ \left[\int_{\gamma_{10}} dz f(z) + \int_{\gamma_9} dz f(z) + \int_{\gamma_8} dz f(z) \right] \quad (5) \\ &= 0 + \int_{C_b} dz f(z) + 0 \stackrel{(d.3)}{=} I_{-1} \stackrel{(d.4a)}{=} 2\pi i \quad (8) \end{aligned}$$

Kurzfassung: $\oint_{\gamma} dz \frac{1}{z} = \oint_{C_b} dz \frac{1}{z} = 2\pi i \quad (9)$



Aber:

$$\int_{\gamma_5} dz f(z) = - \int_{\gamma_{10}} dz f(z) \quad (6)$$

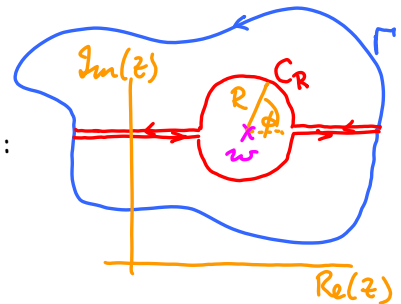
$$\int_{\gamma_7} dz f(z) = - \int_{\gamma_8} dz f(z) \quad (7)$$

(9) gilt für jede geschlossene Kontur, die $z = 0$ umschliesst!

Beispiel 2: Geschlossener Weg Γ um Pol bei $w \neq 0$ ($w \in \mathbb{C}$)

C8.2l

$$I_n^{(+)} \equiv \oint_{\Gamma} dz (z-w)^n \stackrel{(4)}{=} 2\pi i \delta_{n,-1} \quad (1)$$



Verforme Weg zu Kreis mit Radius R , Mittelpunkt w :

$$C_R \equiv \left\{ \gamma(\phi) = w + R e^{i\phi}, \phi \in [0, 2\pi) \right\} \quad (2)$$

$$I_n^{(+)} \stackrel{(i.2)}{=} \oint_{C_R} dz (z-w)^n \stackrel{(b.2)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\gamma}{d\phi} (\gamma(\phi) - w)^n \quad (3)$$

Wegverformung

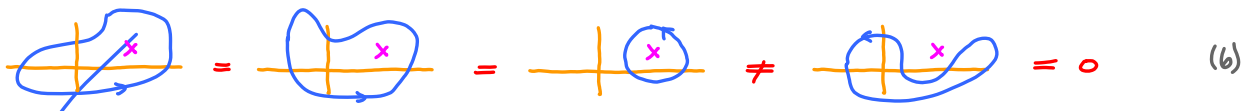
$$[\text{analog zu Seite C8.2d}] \stackrel{(2)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi i R e^{i\phi} (R e^{i\phi})^n \stackrel{(d.4)}{=} 2\pi i \delta_{n,-1} \quad (4)$$

Analog:

$$I_n^{(-)} \equiv \oint_{\Gamma} dz (z-w)^n \stackrel{(1)}{=} -2\pi i \delta_{n,-1}$$

[extra Vorzeichen, wegen $\int_0^{-2\pi} d\phi$]

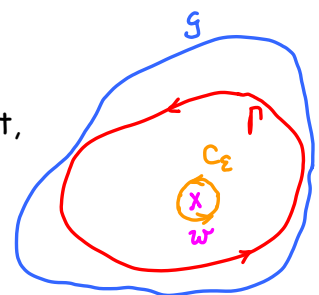
Faustregel: Geschlossener Weg darf beliebig verformt werden, solange dabei keine Singularität überkreuzt wird!



Satz: Cauchy's Integralformel (optional)

C8.2m

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $\Gamma \subset G$ ein "einfach" geschlossener (d.h. Windungszahl = 1), positiv orientierter Weg, $f(z)$ eine Funktion, die auf G analytisch ist, und w ein Punkt innerhalb Γ . Dann gilt:



$$f(w) = \int_{\Gamma} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z-w} \quad (1)$$

Bemerkenswert: Das Verhalten einer analytischen Funktion im Inneren eines Gebiets (hier das von Γ eingeschlossene) ist vollständig durch ihre Werte am Rand festgelegt !!

Begründung: Verforme Γ zu einem infinitesimal kleinen Kreis

mit Mittelpunkt w , Radius ε : $C_\varepsilon \equiv \left\{ \gamma(\phi) = w + \varepsilon e^{i\phi}; \phi \in [0, 2\pi) \right\} \quad (2)$

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z-w} \stackrel{(k.9)}{=} \oint_{C_\varepsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z-w} \quad (3)$$

Wegverformung

denn für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt $f(z)|_{z \in C_\varepsilon} = f(w + \varepsilon e^{i\phi}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(w) \quad (4)$

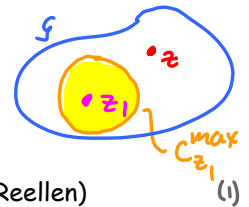
kleiner Kreis:

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(w)}{2\pi i} \left[\oint_{C_\varepsilon} dz \frac{1}{z-w} \right] \stackrel{(l.1)}{=} \frac{f(w)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(w) \quad (5)$$

C8.3 Reihenentwicklung einer analytischen Funktion und Residuensatz

C8.3a

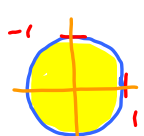
Sei $f(z)$ analytisch auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, dann hat die Reihen-Entwicklung v. $f(z)$ um einen Punkt $z_1 \in G$ die Form einer Taylor-Reihe:



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_1)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_1) \quad (\text{wie im Reellen})$$

[(1) konvergiert überall in $C_{z_1}^{max}$ (grösste offene Kreis $\subset G$, mit Mittelpunkt z_1)]

Wichtige Potenzreihen (bereits bekannt im Reellen, gelten genauso im Komplexen):

- Exp: $e^z \stackrel{(C5.1e.8)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$, Konvergenzgebiet: $G = \mathbb{C}$ (2)
- Cos: $\cos z \stackrel{(C5.1l.2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, $G = \mathbb{C}$ (3)
- Sin: $\sin z \stackrel{(C5.1l.1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $G = \mathbb{C}$ (4)
- Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-z} \stackrel{(C5.1a.1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $G = \{|z| < 1\}$ 

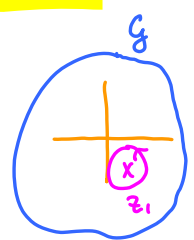
Reihenentwicklung einer analytischen Funktion mit Singularität

C8.3b

Sei $f(z)$ analytisch auf einem Gebiet $G \setminus z_1$, mit einer isolierten Singularität (oder "Pol") bei z_1 , dann hat die Reihen-Entwicklung v. $f(z)$ um z_1 die Form einer "Laurent-Reihe", die auch negative Potenzen enthält:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_1)^n, \quad (1) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} dz \quad (2)$$

(kann gezeigt werden, mittels ZC8.2-5c) \uparrow umschließt z_1



z_1 heisst "Pol der Ordnung p " falls $a_n = 0$ für alle $n < -p$:

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-z_1)^n = \frac{a_{-p}}{(z-z_1)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_1)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_1)^n \quad (3)$$

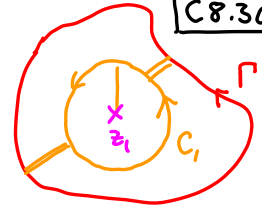
Beispiele: Laurent-Reihe v.

- $e^{1/z}$ bzgl. $z_1 = 0$: $e^{1/z} \stackrel{(a.2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n \quad (4)$
- $\frac{z^2}{(z-1)^2}$ bzgl. $z_1 = 1$: $\frac{z^2}{(z-1)^2} \stackrel{[Taylor-Entwicklung des Zählers um z=1]}{=} \frac{(z-1)^2 + 2(z-1) + 1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)} + 1 \quad (5)$

Residuensatz

C8.3c

Sei $f(z)$ analytisch auf einem Gebiet $G \setminus z_1$, mit einem isolierten Pol bei z_1 , und Γ ein einfach geschlossener, positiv orientierter Weg, der z_1 umschließt. Dann gilt



$$\oint_{\Gamma} dz f(z) \stackrel{(b.1)}{=} \oint_{\Gamma} dz \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_1)^n \stackrel{\text{Verforme Weg zum Kreis}}{=} \oint_{C_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_1)^n \quad (1)$$

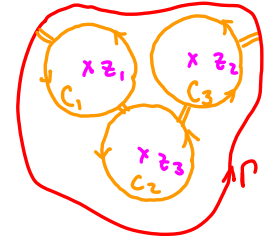
Laurent-Reihe

vertausche mutig Summe u. Integral:

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_{C_1} (z-z_1)^n \stackrel{(C8.21.4)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot 2\pi i \delta_{n,-1} = 2\pi i \cdot a_{-1} \stackrel{(3)}{=} 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) \quad (2)$$

Offenbar trägt nur der $n = -1$ Term bei! Der Koeffizient $a_{-1} \equiv \operatorname{Res}(f, z_1)$ spielt somit eine wichtige Rolle, und wird "das Residuum v. f bei z_1 " genannt:

Verallgemeinerung: $f(z)$ habe mehrere isolierte Pole, und der Weg Γ umschlieÙe N Pole, bei z_1, z_2, \dots, z_N



Residuensatz: $\oint_{\Gamma} dz f(z) \stackrel{(2),(3)}{=} \sum_{j=1}^N 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_j) \quad (4)$

Residuenformel $\operatorname{Res}(f, w) = ?$ (Herleitung optional; Anwendung wichtig!)

C8.3d

$f(z)$ sei (als Formel) gegeben, mit einem Pol der Ordnung p bei w . Die Laurent-Entwicklung v. $f(z)$ bezüglich w hat die allgemeine Form:

$$\begin{matrix} \text{---} & \ominus & \text{---} & \dots \\ \text{---} & \oplus & \text{---} & \dots \\ \text{---} & \oplus & \text{---} & \dots \end{matrix}$$

$$f(z) \stackrel{(b.3)}{=} \frac{a_{-p}}{(z-w)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-w)^{p-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-w)^1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n}_{\text{gesucht! } O(z-w)^{n \geq 0}} \quad (1)$$

$$(z-w)^p f(z) \stackrel{(1)}{=} a_{-p} + a_{-p+1}(z-w)^1 + \dots + a_{-1}(z-w)^{p-1} + O(z-w)^{n \geq p} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial z^{p-1}} \left[(z-w)^p f(z) \right] \stackrel{(2)}{=} (p-1)(p-2) \dots (p-p+1) a_{-1} \underbrace{(z-w)^{p-1-1-\dots-1}}_{(z-w)^0 = 1} + O(z-w)^{n \geq 1} \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow w} \left[\frac{\partial^{p-1}}{\partial z^{p-1}} \left[(z-w)^p f(z) \right] \right] \stackrel{(3)}{=} (p-1)! a_{-1} + \lim_{z \rightarrow w} O(z-w)^{n \geq 1} = 0 \quad (4)$$

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, w) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow w} \left[\frac{1}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial z^{p-1}} \left[(z-w)^p f(z) \right] \right]} \quad \text{NÜTZLICH \& WICHTIG!} \quad (5)$$

In der Praxis kommt der Fall $p=1$ am häufigsten vor:

C8.3e

$$\text{Res}(f, z) \stackrel{(d.5)}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{1}{(1-1)!} \partial_z^{1-1} \left[(z-z_0)^1 f(z) \right] \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) \quad (1)$$

(merken!)

Beispiel 1: Pole d. Ordnung 1

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} \quad (2) \text{ hat Singularität d. Ordnung } p=1 \text{ bei } z_1=i$$

$z_2=-i$

$$\text{Res}(f, i) \stackrel{(1),(2)}{=} \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i) \frac{1}{(z-i)(z+i)} \right] = \frac{1}{2i} \quad (3)$$

Faustregel: kürze Pol weg, setze $z=z_0$ im übrigen Faktor.

$$\text{Res}(f, -i) \stackrel{(1),(2)}{=} \lim_{z \rightarrow -i} \left[(z-(-i)) \frac{1}{(z-i)(z+i)} \right] = \frac{1}{-2i} \quad (4)$$

Beispiel 2: Pol d. Ordnung 2

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2} \quad (4) \text{ hat Singularität d. Ordnung } p=2 \text{ bei } z=1$$

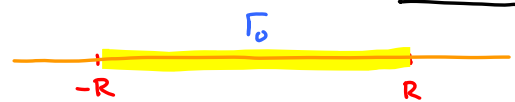
$$\text{Res}(f, 1) \stackrel{(d.5)}{=} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(2-1)!} \partial_z^{2-1} \left[(z-1)^2 f(z) \right] \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\partial_z (z-1)^2 \frac{z^2}{(z-1)^2} \right] \quad (5)$$

$$= 2z \Big|_{z=1} = 2 \quad (6) \quad \text{[konsistent mit (b.5)]}$$

Beispiel 3: Gewicht unter der Lorentz-Kurve

C8.3f

$$\pi \stackrel{(C5.11.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} I_{\Gamma_0} \quad (1)$$



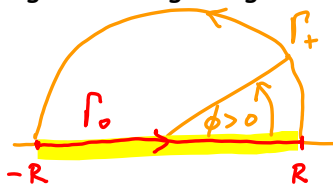
$$I_{\Gamma_0} \equiv \int_{-R}^R \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{\Gamma_0} \frac{1}{z^2+1} dz \quad (2)$$

$$\Gamma_0 = \{ \gamma(x) = x, x \in [-R, R] \}$$

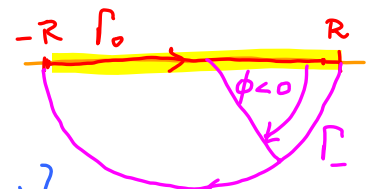
$\equiv f(z) \leftarrow$ 'analytische Fortsetzung von $f(x)$ nach $f(z)$ '

'Schließe' den Integrationsweg, um geschlossene Kontur zu erhalten (und Residuensatz zu nutzen):

Option 1:
in oberer
Halbebene:



Option 2:
in unterer
Halbebene:



Parametrisierung der
Halbkreise mit Radius R:

$$\Gamma_{\pm} = \{ \gamma(\phi) = R e^{i\phi}, \phi \in (0, \pm\pi) \} \quad (3)$$

Für beide Optionen ist das Linienintegral entlang Halbkreis gleich Null im Limes $R \rightarrow \infty$:

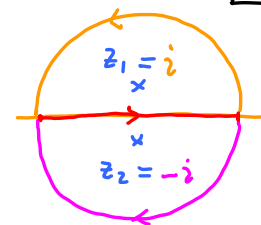
$$I_{\Gamma_{\pm}} \equiv \int_{\Gamma_{\pm}} dz f(z) \stackrel{(C8.2b.2)}{=} \int_0^{\pm\pi} d\phi \frac{d\gamma}{d\phi} f(\gamma(\phi)) = \int_0^{\pm\pi} d\phi \frac{iR e^{i\phi}}{(R e^{i\phi})^2 + 1} \xrightarrow{R \gg 1} \sim \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (4)$$

Also können wir die 'Kontur schließen':

C8.3g

$$I \stackrel{(3f.4)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[I_{\Gamma_0} + I_{\Gamma_{\pm}} \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(\Gamma_0, \Gamma_{\pm})} dz f(z) \quad (1)$$

oder: $(\Gamma_0, \Gamma_{\pm}) = \curvearrowright$



Finde Pole und Residuen von $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} \quad \text{hat zwei Pole d. Ordnung } 1, \quad (2)$$

$$\text{bei } z_1 = i \quad \text{mit} \quad \text{Res}(f, z_1) \stackrel{(e.1)}{=} \frac{1}{(z_1 - z_2)} = \frac{1}{i - (-i)} = \frac{1}{2i} \quad (3)$$

$$\text{und } z_2 = -i \quad \text{mit} \quad \text{Res}(f, z_2) \stackrel{(e.1)}{=} \frac{1}{(z_2 - z_1)} = \frac{1}{-i - i} = \frac{1}{-2i} \quad (4)$$

Laut Residuensatz liefert nur der von der Kontur eingeschlossene Pol einen Beitrag:

$$\text{Option 1: } I \stackrel{(1)}{=} I_{\curvearrowright} = +2\pi i \text{Res}(f, z_1) = +2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi \quad (5)$$



wegen positiver/negativer Integrationsrichtung, siehe (C8.21.1 & 5)

konsistent! 😊

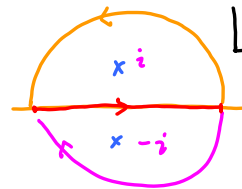
$$\text{Option 2: } I \stackrel{(1)}{=} I_{\curvearrowleft} = -2\pi i \text{Res}(f, z_2) = -2\pi i \cdot \frac{1}{-2i} = \pi \quad (6)$$



Kurzfassung für Erfahrene:

C8.3h

$$I \stackrel{(C5.11.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} = \int_{\curvearrowright} dz f(z) = \int_{\curvearrowleft} dz f(z) \quad (1)$$



$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} \quad \text{hat zwei Pole d. Ordnung } 1 \quad \text{bei } z = \pm i \quad (2)$$

$$\text{Res}(f, i) \stackrel{(e.1)}{=} \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i}, \quad \text{Res}(f, -i) \stackrel{(e.1)}{=} \frac{1}{-i-i} = -\frac{1}{2i} \quad (3)$$

$$I \stackrel{(1)}{=} I_{\curvearrowright} = +2\pi i \text{Res}(f, \pm i) = \pm 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{\pm 2i} \right) = \pi \quad (4)$$

Allgemeine Faustregel: schließen der Kontur entlang Halbkreis funktioniert, falls

$$I_{\Gamma_{\pm}} \stackrel{(3f.4)}{=} \int_{\Gamma_{\pm}} dz f(z) \stackrel{(C8.2b.2)}{=} \int_0^{\pm\pi} d\phi \frac{dy}{d\phi} f(y(\phi)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (5)$$

$iy = iRe^{i\phi} = iz$

$$\text{also, falls: } z f(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für } \phi \in (0, \pm\pi) \quad (6)$$

Beispiel 4: Fourier-Transformation v. Lorenz-Kurve

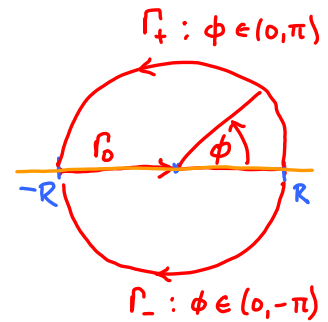
C8.3 i

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-\gamma|t|} \stackrel{(C6.3c.6)}{=} \frac{2\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (1) \iff I(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-it\omega} \frac{2\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \stackrel{?}{=} e^{-\gamma|t|} \quad (2)$$

Berechne (2) mittels Wegintegral; unterscheide $\begin{cases} -|t| = t < 0 \\ |t| = t > 0 \end{cases}$

$$I_{\pm}(t \lesseqgtr 0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i(\mp|t|)\omega} \frac{\gamma/\pi}{\omega^2 + \gamma^2} \stackrel{(3)}{\equiv} f_{\pm}(\omega)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} dz f_{\pm}(z), \quad f_{\pm}(z) = \frac{e^{\pm i|t|z} \gamma/\pi}{z^2 + \gamma^2} \quad (4) \quad (5)$$



Füge Halbkreis hinzu, um geschlossene Kontur zu erhalten:

Es gibt zwei Optionen: $\Gamma_{\pm} = \{ \gamma(\phi) = R e^{i\phi} = R(\omega\phi + i\sin\phi), \phi \in (0, \pm\pi) \}$ (6)

$$\int_{\Gamma} dz \frac{e^{\pm i|t|z}}{z^2 + \gamma^2} \stackrel{(C8.2b.2)}{=} \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\pm\pi} d\phi \frac{i R e^{i\phi} e^{\pm i|t|R(\omega\phi + i\sin\phi)}}{(R e^{i\phi})^2 + \gamma^2} \sim e^{\pm R|t|\sin\phi} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad ? \quad (7)$$

Vorzeichen = η

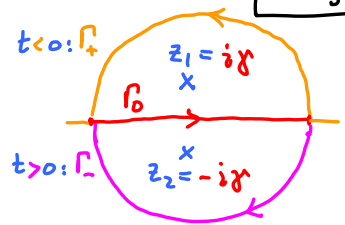
Für $t \lesseqgtr 0$ brauchen wir $\mp \sin\phi < 0$, also $\sin\phi \gtrless 0$, also Γ_{\pm} (8)

Fazit: schließe Weg in oberen Halbebene für $-|t| = t < 0$
in unteren Halbebene für $|t| = t > 0$

$$\begin{cases} -|t| = t < 0 \\ |t| = t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

C8.3 j

$$I_{\pm}(t \lesseqgtr 0) \stackrel{(i.4, i.6)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(\Gamma_0, \Gamma_{\pm})} dz f_{\pm}(z) \quad (2)$$



$$f_{\pm}(z) \stackrel{(i.5)}{=} \frac{\gamma/\pi e^{\pm i|t|z}}{(z - i\gamma)(z + i\gamma)} \equiv \frac{\gamma/\pi e^{\pm i|t|z}}{(z - z_1)(z - z_2)} \quad (3) \quad \text{hat zwei Pole d. Ordnung 1 bei } \begin{cases} z_1 = i\gamma \\ z_2 = -i\gamma \end{cases}$$

Residuensatz: nur eingeschlossener Pol trägt bei, also brauchen wir nur:

$$\text{Res}(f_{+}, z_1) \stackrel{(e.1)}{=} \frac{\gamma/\pi e^{+i|t|z_1}}{(z_1 - z_2)} = \frac{\gamma/\pi e^{+i|t|i\gamma}}{i\gamma - (-i\gamma)} = \frac{e^{-\gamma|t|}}{2\pi i} \quad (4)$$

$$\text{Res}(f_{-}, z_2) \stackrel{(e.1)}{=} \frac{\gamma/\pi e^{-i|t|z_2}}{(z_2 - z_1)} = \frac{\gamma/\pi e^{-i|t|(-i\gamma)}}{-i\gamma - i\gamma} = \frac{e^{-\gamma|t|}}{-2\pi i} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} I_{+} &\stackrel{(2)}{=} +2\pi i \text{Res}(f_{+}, z_1) \stackrel{(4)}{=} \frac{2\pi i}{2\pi i} e^{-|t|\gamma} \quad (6) \\ I_{-} &\stackrel{(2)}{=} -2\pi i \text{Res}(f_{-}, z_2) \stackrel{(5)}{=} \frac{-2\pi i}{-2\pi i} e^{-|t|\gamma} \quad (7) \end{aligned} \right\} = e^{-\gamma|t|} \stackrel{(i.2)}{=} \quad (8)$$

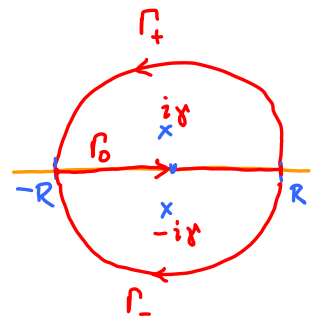
wegen Integrationsrichtung, siehe (C8.2I.1 & 5)]



Kurzfassung für Erfahrene:

C8.3k

$$I(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-it\omega} \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \stackrel{(5)}{=} e^{-\gamma|t|} \quad (1)$$



$$I_{\pm}(t > 0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(\pm|t|)z} \frac{\gamma/\pi}{z^2 + \gamma^2} = \int_{\Gamma_{\pm}} dz f_{\pm}(z) \quad (2)$$

denn $e^{\pm i|t|z} \sim e^{-|t|\infty} \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \pm i\infty$, also entlang Γ_{\pm} ✓ (3)

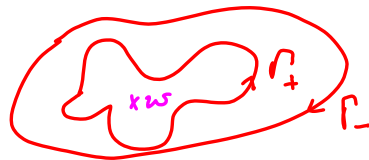
$$f_{\pm}(z) = \frac{\gamma/\pi e^{\pm i|t|z}}{(z-i\gamma)(z+i\gamma)} \text{ hat zwei Pole d. Ordnung 1 bei } \pm i\gamma \quad (4)$$

$$I_{\pm}(t > 0) = I_{\Gamma_{\pm}} = \pm 2\pi i \text{Res}(f_{\pm}, \pm i\gamma) = \pm 2\pi i \frac{\gamma/\pi e^{\pm i|t|(\pm i\gamma)}}{\pm 2i\gamma} = e^{-\gamma|t|} \quad (5)$$

Zusammenfassung: C8.3 Analytische Funktionen II

C8.3a

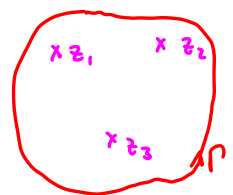
$$I_n^{(\pm)} \equiv \oint_{\Gamma_{\pm}} dz (z-w)^n = \pm 2\pi i \delta_{n,-1} \quad (1)$$



Reihenentwicklungen:
- wenn f analytisch ist: $f(z) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_1)^n$, $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_1)$ (2)

- wenn f einen Pol d. Ordnung p bei $z = z_1$ hat: $\equiv \text{Res}(f, z_1)$
Laurant $f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-z_1)^n = \frac{a_{-p}}{(z-z_1)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_1)^1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_1)^n$ (3)

$f(z)$ habe mehrere isolierte Pole,
und der Weg Γ umschließe N Pole, bei z_1, z_2, \dots, z_N

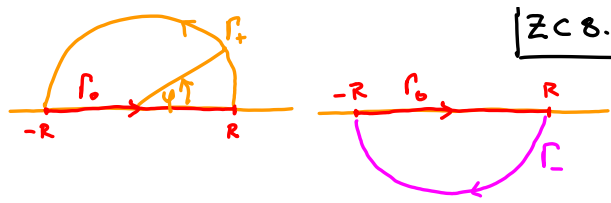


Residuensatz: $\oint_{\Gamma} dz f(z) \stackrel{(2),(3)}{=} \sum_{j=1}^N 2\pi i \text{Res}(f, z_j)$ (4)

Residuenformel: $\text{Res}(f, w) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow w} \left[\frac{1}{(p-1)!} \frac{d}{dz} \left[(z-w)^p f(z) \right] \right]$

Kontur schließen:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} dz f(z) \quad (1)$$



$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(\Gamma_0, \Gamma_+)} dz f(z) \quad (2) \quad \text{falls} \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} [z f(z)] = 0$$

$$= \pm 2\pi i \sum_j \text{Res}(f, z_j^{\pm}), \quad (3) \quad \left. \begin{matrix} z_j^+ \\ z_j^- \end{matrix} \right\} \text{ Pole innerhalb } \Gamma_{\pm}$$

Diese Strategie funktioniert insbesondere für Integrale folgender Form:

$$I = \int dx \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{mit} \quad P(x) = \sum_{n=0}^n P_n x^n, \quad Q(x) = \sum_{m=0}^m q_m x^m \quad \text{falls: } m \geq n+2 \quad (4)$$

$$I(t) = \int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{Q(\omega)} = \begin{cases} \oint_{\Gamma_+} dz \frac{e^{-iz|t|}}{Q(z)} & \text{falls } t < 0 \quad (5) \\ \oint_{\Gamma_-} dz \frac{e^{-iz|t|}}{Q(z)} & \text{falls } t > 0 \quad (6) \end{cases}$$

$Q(\omega) = \sum_{m=0}^m q_m \omega^m$