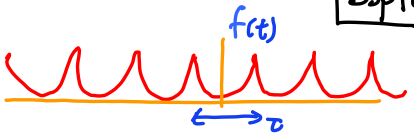
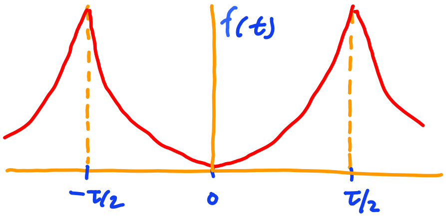
1. Fourier-Reihe (vergleiche C6.1s-v)

Bspl1a





Finde Fourierkoeffizienten der periodischen Funktionen

$$f(t) = t^2 \quad \text{falls} \quad -\tau/2 < t < \tau/2 \tag{1}$$

$$\text{und} \quad f(t) = f(t+\tau) \quad \text{für beliebige t.} \tag{2}$$

x(t) ist gerade Funktion v. t :

$$f(t) = f(-t) \tag{3}$$

Fourier-Reihe enthält nur cos-Terme:

$$f(t) \overset{(C6.1t.3)}{=} \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\omega_n t + \overset{=0}{b_n} \sin\omega_n t\right] \tag{4}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

Koeffizienten:

$$a_n \overset{(C6.1t.4)}{=} 2\cdot\frac{2}{\tau}\int_{\underset{0}{\cancel{-\tau/2}}}^{\tau/2} dt\, f(t)\cos\omega_n t \tag{6}$$

denn Integrand ist symmetrisch

Bspl1b

$\underline{n \geq 1}$:

$$a_n \overset{(1a.1)}{=} \frac{4}{\tau}\int_0^{\tau/2} dt\, \overset{u}{t^2}\, \overset{v'}{\cos\omega_n t} \tag{1}$$

Partielle Integration :

$$\int_0^{\tau/2} dt\, \underbrace{u(t)\,v'(t)}_{=\frac{d}{dt}[u(t)v(t)] - u'(t)v(t)} = u(t)\,v(t)\Big|_0^{\tau/2} - \int_0^{\tau/2} dt\, u'(t)\,v(t) \tag{2}$$

$$a_n \overset{(1),(2)}{=} \frac{4}{\tau}\left\{\overbrace{t^2}^{u}\,\overbrace{\frac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t)}^{v}\Big|_0^{\tau/2} - \int_0^{\tau/2} dt\, \underbrace{\overbrace{2t}^{u'}}_{=\tilde{u}}\, \underbrace{\overbrace{\frac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t)}^{v}}_{\tilde{v}'}\right\} \tag{3}$$

nochmal Part. Int.:

$$= \frac{4}{\tau}\left\{\frac{(\tau/2)^2}{\omega_n}\underbrace{\sin(\overbrace{\omega_n\,\tau/2}^{\pi n})}_{=0} \overset{(1a.5)}{} - \left[\overbrace{2t}^{\tilde{u}}\overbrace{\left(-\frac{1}{\omega_n^2}\right)\cos\omega_n t}^{\tilde{v}}\Big|_0^{\tau/2} - \int_0^{\tau/2} dt\, \overbrace{2}^{\tilde{u}'}\overbrace{\left(-\frac{1}{\omega_n^2}\right)\cos\omega_n t}^{\tilde{v}}\right]\right\} \tag{4}$$

Bsp1c

$$a_n = 0 + \frac{4}{\cancel{\tau}}\Big\{ + \frac{2(\tau/2)}{\omega_n^2}\underbrace{\overset{(1a.5)}{\cos}(\overbrace{\omega_n \tau/2}^{\pi n})}_{(-1)^n} + \underbrace{\left(\frac{-2}{\omega_n^2}\right)\sin\omega_n t\,\Big|_0^{\tau/2}}_{=0}\Big\} \qquad (1)$$

(wie bei (1b.3))

$$a_n = \frac{4}{\omega_n^2}(-1)^n \qquad \forall\ n \geq 1 \qquad (2)$$

$$\underline{n=0:} \quad a_0 = 2\cdot\frac{2}{\tau}\int_{\cancel{-\tau/2}\ 0}^{\tau/2} dt\ t^2 = \frac{4}{\tau}\,\frac{1}{3}\,t^3\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{4}{\tau}\,\frac{1}{3}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 = \frac{\tau^2}{6} \qquad (3)$$

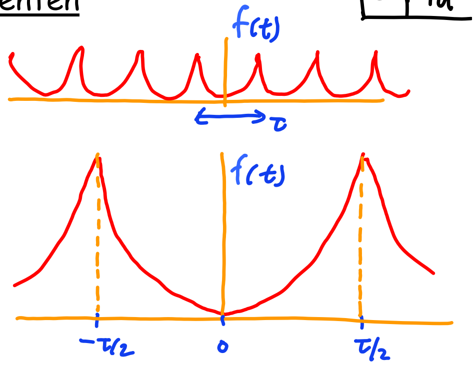
(1c.2) & (1c.3) in (1a.4) liefert die gewünschte Fourier-Reihe:

$$f(t) = \frac{\tau^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\omega_n^2}(-1)^n \cos\omega_n t \qquad (4)$$

$$\frac{4}{\omega_n^2} = \frac{\tau^2\cdot 4}{(2\pi n)^2} = \frac{\tau^2}{\pi^2 n^2}$$

Bsp1d

Alternativer Lösungsweg, mit komplexen Fourier-Koeffizienten



Finde Fourierkoeffizienten der periodischen Funktionen

$$f(t) = t^2 \quad \text{falls} \quad -\tau/2 < t < \tau/2 \qquad (1)$$

$$f(t) = f(t+\tau) \qquad (2)$$

Fourier-Reihe: $$f(t) \overset{(C6.1l.2)}{=} \frac{1}{\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i\omega_n t}\,\tilde{f}_n, \qquad \omega_n = \frac{2\pi n}{\tau},\ n\in\mathbb{Z} \qquad (3)$$

$$\tilde{f}_n \overset{(C6.1l.3)}{=} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau\ f(t)\ e^{i\omega_n t} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau\ \overset{u}{t^2}\ \overset{v'}{e^{i\omega_n t}} \qquad (4)$$

Für $n\neq 0$:

$$\tilde{f}_{n\neq 0} = \overset{u}{t^2}\ \overset{v}{\frac{e^{i\omega_n t}}{i\omega_n}}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \overset{-\int u'v}{-\int_{-\tau/2}^{\tau/2}} dt\ \underset{\tilde{u}}{2t}\ \underset{\tilde{v}'}{\frac{e^{i\omega_n t}}{i\omega_n}} \qquad (5)$$

Bsp 1e

$$\tilde f_{n\neq 0} = \frac{1}{\omega_n}(\tau/2)^2 \underbrace{\frac{2\,1}{2\,i}\left[e^{i\omega_n\tau/2} - e^{-i\omega_n\tau/2}\right]}_{} \rightarrow \sin(\omega_n\tau/2) = \sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}\cdot\tau/2\right) = \sin(n\pi) = 0 \qquad (1a)$$

$$\tilde u\,\tilde v \qquad - \int \tilde u'\,\tilde v$$

$$-\frac{1}{i\omega_n}\left\{2t\,\frac{e^{i\omega_n t}}{i\omega_n}\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt\; 2\,\frac{e^{i\omega_n t}}{i\omega_n}\right\} \qquad (1b)$$

$$= \frac{2}{\omega_n^2}\,\tau\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\left[e^{i\omega_n\tau/2} + e^{-i\omega_n\tau/2}\right]}_{\cos\omega_n\tau/2 \,=\, \cos(n\pi) \,=\, (-1)^n \quad (2a)} - \frac{2}{\omega_n^2}\,\frac{1}{i\omega_n}\underbrace{\left[e^{i\omega_n\tau/2} - e^{-i\omega_n\tau/2}\right]}_{=0} \qquad (2b)$$

[wie (1a)]

$$\tilde f_{n\neq 0} = \frac{2\tau}{(2\pi n/\tau)^2}(-1)^n = \frac{\tau^3(-1)^n}{2\pi^2 n^2} = \tilde f_{-n} \qquad (3)$$

$$\tilde f_{n=0} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt\; t^2\cdot 1 = \frac{1}{3}t^3\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2}{3}\cdot(\tau/2)^3 = \frac{\tau^3}{12} \qquad (4)$$

Bsp 1f

Wie kommt man von hier zu einer trigonometrischen Fourier-Reihe?
(cos, sin)

$$f(t) = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t}\,\tilde f_n \qquad (1)$$

weil $\tilde f_n \overset{(1e.3)}{=} \tilde f_{-n}$

$$= \frac{1}{\tau}\tilde f_0 + \frac{1}{\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(e^{-i\omega_n t} + e^{+i\omega_n t}\right)\frac{1}{2}}_{\cos\omega_n t}\cdot 2\tilde f_n \qquad (2)$$

$$= \frac{\tau^2}{12} + \frac{\cancel{2}\tau^2}{\cancel{2}\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\omega_n t\,\frac{(-1)^n}{n^2} \quad = (1c.4) \qquad (3)$$

Falls f(x) symmetrisch/antisymmetrisch ist, hat man die Wahl:
Entweder cos/sin-Reihe, oder komplexe Fourier-Reihe. Die Ergebnisse sind äquivalent.
Empfehlung: nutze denjenigen Rechenweg, für den die entsprechenden Integrale leichter zu lösen sind:

$$\int dt \begin{Bmatrix}\cos\omega_n t\\ \sin\omega_n t\end{Bmatrix} f(t) \sim \int dt\,\frac{1}{2}\left(e^{i\omega_n t} \pm e^{-i\omega_n t}\right) f(t) \qquad \text{vs.} \qquad \int dt\; e^{i\omega_n t}\, f(t)$$

2. Iteratives Lösen einer Gleichung mittels Reihenentwicklung

Bsp 2a

Betrachte: $\sqrt{y(x)} = y(x) + \sin(x)$ mit $0 < x \ll 1$ (1)

Finde $y(x)$ als Funktion v. x bis Ordnung $\mathcal{O}(x^2)$ inklusive, d.h. bestimme die Koeffizienten der ersten drei Terme in der Taylor-Entwicklung:

$$y(x) = y(0) + y'(0)\,x + \tfrac{1}{2!}\,y''(0)\,x^2 + \mathcal{O}(x^3) \qquad (2)$$

$$= y_0 + y_0'\,x + \tfrac{1}{2!}\,y_0''\,x^2 + \mathcal{O}(x^3) \qquad (3)$$

$$\boxed{y_0^{(n)} \equiv y^{(n)}(x)\Big|_{x=0}}$$

Strategie: Mache Reihenentwicklungen von (1) in Potenzen von x, bis $\mathcal{O}(x^2)$,

links = $\ell(x)$ = $r(x)$ = rechts (4)

$$\ell_0 + \ell_0'\,x + \tfrac{1}{2!}\,\ell_0''\,x^2 + \mathcal{O}(x^3) = r_0 + r_0'\,x + \tfrac{1}{2!}\,r_0''\,x^2 + \mathcal{O}(x^3) \qquad (5)$$

und vergleiche Koeffizienten: von

x^0 : $(4)\big|_{x=0}$: $\ell_0 = r_0$ (6)

x^1 : $(4)'\big|_{x=0}$: $\ell_0' = r_0'$ (7)

x^2 : $(4)''\big|_{x=0}$: $\ell_0'' = r_0''$ (8)

Kompaktnotation:

Bsp 2b

$$y^{1/2} \overset{(2a.1)}{=} y + \sin x \qquad (1)$$

$(1)\big|_{x=0}$: $y_0^{1/2} = y_0 + \underbrace{\sin(0)}_{=0}$ (2) $\Rightarrow$ $y_0 = 1$ (3)

$(1)'$: $\tfrac{1}{2}\,y^{-1/2}\cdot y' = y' + \cos x$ (4)

$(1)'\big|_{x=0}$: $\tfrac{1}{2}\underbrace{(y_0)^{-1/2}}_{(3):\ =1}\cdot y_0' = y_0' + \underbrace{\cos(0)}_{=1}$ (5) $\Rightarrow$ $\tfrac{1}{2}y_0' = y_0' + 1$ (6a)

$\Rightarrow$ $y_0' = -2$ (6b)

$(1)'' = (4)'$: $-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot y^{-3/2}\cdot(y')^2 + \tfrac{1}{2}\,y^{-1/2}\cdot y'' = y'' - \sin x$ (7)

$(1)''\big|_{x=0}$: $-\tfrac{1}{4}\,y_0^{-3/2}\cdot(y_0')^2 + \tfrac{1}{2}\,y_0^{-1/2}\cdot y_0'' = y_0'' - \sin(0)$ (8)

$-\tfrac{1}{4}\cdot 1\cdot 4 + \tfrac{1}{2}\,1\cdot y_0'' = y_0''$ $\Rightarrow$ $y_0'' = -2$ (9)

Endergebnis: $y(x) \overset{(2a.3)}{=} 1 + (-2)\cdot x + \tfrac{1}{2!}(-2)\,x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 1 - 2x - x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ (10)

3. Iteratives Lösen einer Diff.Gleichung mittels Reihenentwicklung

Bsp 3a

Betrachte: $\dot x(t) \overset{(C7j-k)}{=} 1 + x^2(t)$ (1) Anfangsbedingung: $x_0 \equiv x(0) = 0$ (2)

[Lösung bereits bekannt : $x(t) \overset{(C7k.7)}{=} \tan t \overset{(C5.2b)}{=} t + \frac{1}{3} t^3 + O(t^5)$ (3)]

Alternativer Zugang, mittels Reihenentwicklung, bis $O(t^3)$, inklusive:

Ansatz : $x(t) = \underset{(2) \uparrow x(0)}{0} + \underset{\uparrow \dot x(0)}{\dot x_0} t + \frac{1}{2!} \underset{\uparrow \ddot x(0)}{\ddot x_0} t^2 + \frac{1}{3!} \underset{\uparrow \dddot x(0)}{\dddot x_0} t^3 + O(t^4)$ (4)

$(1)\big|_{t=0}$ $\dot x_0 = 1 + \underbrace{x_0^2}_{(2)} = 0$ (6) $\Longrightarrow$ $\dot x_0 = 1$ (7)

$(\dot 1)$: $\ddot x = 2x\dot x$ (8)

$(\dot 1)\big|_{t=0}$: $\ddot x_0 = 2x_0 \dot x_0 \overset{(2)}{=} 0$ (9) $\Longrightarrow$ $\ddot x_0 = 0$ (10)

$(\ddot 1) = (\dot 8)$: $\dddot x = 2\dot x \dot x + 2x\ddot x$ (11)

$(\ddot 1)\big|_{t=0}$ $\dddot x_0 = 2(\dot x_0)^2 + 2\overset{0}{\overset{\|}{x_0}} \ddot x_0$ (12) $\Longrightarrow$ $\dddot x_0 = 2$ (13)

Endergebnis: $x(t) \overset{(5)}{=} 0 + 1 \cdot t + \frac{1}{2!} 0 \cdot t^2 + \frac{1}{3!} 2 \cdot t^3 + O(t^4) = t + \frac{1}{3} t^3 + O(t^4) \checkmark = (3)$

4. Beispiel: Lineare Inhomogene Diff-Gl mit zeitabhängigen Vorfaktoren

Bsp4a

Löse $\dot x(t) - \gamma \cos(\omega t) \cdot x(t) = v \cos(\Omega t)\, e^{\gamma/\omega} \sin(\omega t)$ (1)

mit $x(0) = x_0$

4a) Homogene Gl: $\frac{dx}{dt} = \dot x(t) = \gamma \cos(\omega t) \cdot x(t)$ (2)

Trennung d. Variablen:
(siehe Seite C7j)

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde x}{\tilde x} = \int_{t_0=0}^{t} d\tilde t\, \gamma \cos(\omega \tilde t) \quad (3)$$

$$\ln x/x_0 = \ln x - \ln x_0 = \frac{\gamma}{\omega} \left(\sin(\omega t) - \overset{=0}{\sin(0)} \right) \quad (4)$$

Homogene Lösung: $x_h(t) = x_0\, e^{\frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t)}$ (5)

Check: $\dot x(t) \overset{(5)}{=} x_0\, e^{\frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t)} \cdot \frac{\gamma}{\omega} \cdot \omega \cdot \cos \omega t = x(t) \cdot \gamma (\cos \omega t)$ (6)

$= (2) \checkmark$

4b) Partikuläre Lösung :

(1) | Bsp 4b

Linke Seite v. (4a.1) ist linear in x, also benutze Variation d. Konstanten:

Methode der Variation der Konstanten (siehe C7.4h):

Angenommen, Lösung der homogenen Gleichung ist bekannt: $\dot{x}_h = a(t)\, x_h$ (1)

Gesucht: partikuläre Lösung der inhomogenen DGL: $\dot{x}_p - a(t)\, x_p = b(t)$ (2)

Ansatz: $x_p(t) = c(t)\, x_h(t)$ (der Vorfaktor c, normalerweise konstant, sei nun t-abhängig, d.h. "variabel") (3)

(3) eingesetzt in die inhomogene DGL (2):

$$\frac{d}{dt}\left[c(t)\, x_h(t)\right] - a(t)\left[c(t)\, x_h(t)\right] = b(t) \qquad (4)$$

Produktregel:

$$\dot{c}(t)\, x_h(t) + \underbrace{c(t)\, \dot{x}_h(t) - c(t)\, a(t)\, x_h(t)}_{\overset{(1)}{=}0} = b(t) \qquad (5)$$

Wir erhalten DGL für $c(t)$:

$$\dot{c}(t) = \frac{b(t)}{x_h(t)} \qquad (6)$$

Elementar zu lösen, siehe (8.3):

mit $c(t_0) = 0$

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, \frac{b(\tilde{t})}{x_h(\tilde{t})} \qquad (7)$$

kann und sollte man sich merken!

Für unser Beispiel: Inhomogenität $b(t) = v_0 \cos(\Omega t)\, e^{\gamma/\omega \sin(\omega t)}$

(1) | Bsp 4c

$$c(t) \overset{(4b.7)}{=} \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, \frac{b(\tilde{t})}{x_h(\tilde{t})} = \int_{0}^{t} d\tilde{t}\, \frac{v \cos(\Omega \tilde{t})\, \cancel{e^{\gamma/\omega \sin(\omega \tilde{t})}}}{x_0\, \cancel{e^{\frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t)}}} \qquad (2)$$

(4a.5):

$$= \frac{1}{x_0} \frac{v}{\Omega} \sin(\Omega t) \qquad (3)$$

Partikuläre Lösung:

(3) in (4b.3):

$$x_p(t) = \overset{(3)}{c(t)} \cdot \overset{(4b.3)}{x_h(t)} \qquad (4)$$

$$= e^{\frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t)} \cdot \frac{v}{\Omega} \sin(\Omega t) \qquad (5)$$

Check, ob (5) die Gl. (4a.1) erfüllt?

einsetzen!

$$\dot{x}_p(t) - \gamma \cos(\omega t) \cdot x_p(t)$$

$$= \Big(\underbrace{\tfrac{\gamma}{\omega} \cdot \omega \cos \omega t \cancel{- \gamma \cos(\omega t)}}_{=0\ ✓}\Big) x_p(t) + e^{\frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t)} \cdot v \cos(\Omega t) \qquad (6)$$

$= (4a.1)$ ✓

5. Satz v. Stokes - Anwendung: Fluss eines Magnetfelds durch gekrümmte Fläche

Bsp5a

Eine d. Maxwell-Gleichungen besagt, dass Magnetfeld quellfrei ist:

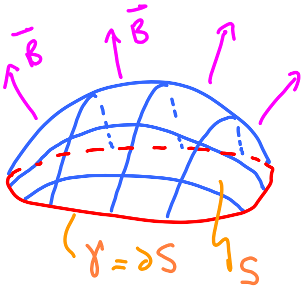
$$\vec\nabla\cdot\vec B(\vec r,t) = 0 \qquad (1)$$

Folglich lässt es sich als Rotation eines "Vektorpotentials", $\vec A(\vec r,t)$ ausdrücken:

$$\vec B(\vec r,t) = \vec\nabla\times\vec A(\vec r,t) \qquad (2)$$

(denn $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A) \overset{\text{(V4.3b.7)}}{=} 0$)

Folglich lässt sich jedes Flussintegral des Magnetfelds mittels Stokes als Linienintegral des Vektorpotentials ausdrücken:



Flächenelement

Vektorpotential

Stokes

$$\int_S d\vec S\cdot\vec B \overset{(2)}{=} \int_S d\vec S\cdot(\vec\nabla\times\vec A) = \oint_{\gamma=\partial S} d\vec r\cdot\vec A \qquad (3)$$

Fläche

Bsp5b

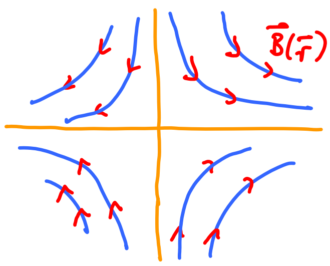
Betrachte nun das Magnetfeld eines "magnetischen Quadrupol": (rotationssymmetrisch um z-Achse)

$$\vec B = c\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z\end{pmatrix} \qquad (1)$$

$(c\equiv 1)$

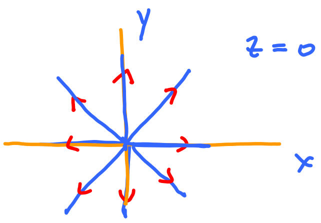
kann ausgedrückt werden durch folgendes Vektorpotential:

$$\vec A(\vec r) = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ 0\end{pmatrix} \qquad (2)$$



Check:

$$\vec\nabla\times\vec A = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x\end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z\end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} (1) \qquad (3)$$



Aufgabe: Berechne den Fluss des Magnetfelds durch zwei Flächen mit demselben kreisförmigen Rand: (Vergleich: V4.3k-m)

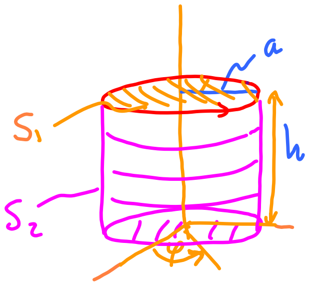
$\rho^2 = x^2+y^2 = a^2$, $z = h$:

$$\text{Rand:}\quad \gamma = \left\{\vec r(\phi) = \begin{pmatrix} a\cos\phi \\ a\sin\phi \\ h\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3,\ 0\le\phi\le 2\pi\right\} \qquad (4)$$

Kreisfläche: S_1

Zylindermantel + Boden: $\Big\}$ S_2

$$\gamma = \partial S_1 = \partial S_2$$



Wegen Zylindersymmetrie der Flächen, arbeite in Zylinderkoordinaten: Bsp 5b

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\rho = \frac{\partial_\rho \vec{r}}{\|\partial_\rho \vec{r}\|} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\phi = \frac{\partial_\phi \vec{r}}{\|\partial_\phi \vec{r}\|} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ -2z \end{pmatrix} = \rho\,\hat{e}_\rho - 2z\,\hat{e}_z \equiv B_\rho\,\hat{e}_\rho + B_\phi\,\hat{e}_\phi + B_z\,\hat{e}_z \qquad (2)$$

$$B_\rho \equiv \rho, \quad B_\phi \equiv 0, \quad B_z \equiv -2z \qquad (3)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ 0 \end{pmatrix} = \rho z \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\rho z\,\hat{e}_\phi \equiv A_\rho\,\hat{e}_\rho + A_\phi\,\hat{e}_\phi + A_z\,\hat{e}_z \qquad (4)$$

$$A_\rho \equiv 0, \quad A_\phi \equiv -\rho z, \quad A_z \equiv 0 \qquad (5)$$

Check:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left[\frac{1}{\rho}\partial_\phi \overset{0}{\overset{\shortparallel}{A_z}} - \partial_z \overset{(-\rho z)}{\overset{\shortparallel}{A_\phi}}\right]\hat{e}_\rho + \left(\partial_z \overset{0}{\overset{\shortparallel}{A_\rho}} - \partial_\rho \overset{0}{\overset{\shortparallel}{A_z}}\right)\hat{e}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\partial_\rho(\rho \overset{(-\rho z)}{\overset{\shortparallel}{A_\phi}}) - \partial_\phi \overset{0}{\overset{\shortparallel}{A_\rho}}\right]\hat{e}_z \qquad (6)$$

$$\overset{(5)}{=} \rho\,\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\underbrace{\partial_\rho(-\rho^2 z)}_{-2\rho z}\hat{e}_z = \rho\,\hat{e}_\rho - 2z\,\hat{e}_z \underset{(2)}{\overset{\checkmark}{=}} \vec{B}$$

5a) Lösung mittels Stokes: Bsp 5c

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \int_{S_1} d\vec{S}\cdot\vec{B} \\ \Phi_2 &\equiv \int_{S_2} d\vec{S}\cdot\vec{B} \end{aligned}\right\} \underset{(5a.3)}{\overset{\text{Stokes}}{=}} \oint_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{A} \equiv \Phi \qquad (1)$$

Allgemeine Definition von Linienintegral:
gegeben eine Parametrisierung

$$\{\vec{r} = \vec{r}(\phi),\ \phi\in[\phi_0,\phi_1]\} \qquad (2)$$

$$\int_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{A} = \int_{\phi_0}^{\phi_1} d\phi\ \frac{d\vec{r}}{d\phi}\cdot\vec{A}(\vec{r}(\phi)) \qquad (3)$$

Parametrisierung: $\vec{r} = \vec{r}(\phi)$

Im aktuellen Fall, für $\gamma =$ (5a.4):

$$\frac{d}{d\phi}\vec{r}(\phi)\Big|_\gamma \overset{(5b.1)}{=} \rho\,\hat{e}_\phi\Big|_\gamma \overset{(5a.4)}{=} a\,\hat{e}_\phi \qquad (4)$$

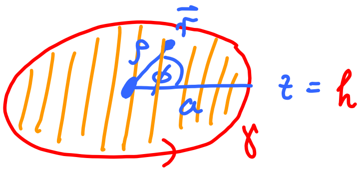
$$\vec{A}(\vec{r})\Big|_\gamma \overset{(5b.4)}{=} -\rho z\,\hat{e}_\phi\Big|_\gamma = -ah\,\hat{e}_\phi \qquad (5)$$

$$\Phi = \oint_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{A} \overset{(3)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi\,(a\,\hat{e}_\phi)\cdot(-ah\,\hat{e}_\phi) = -2\pi a^2 h \qquad (6)$$

5b) Flussintegral über Kreisfläche S_1:

Bsp 5d

$$\Phi_1 \overset{(5c.1)}{=} \int_{S_1} d\vec{S} \cdot \vec{B} \qquad (1)$$



Kreisfläche: $S_1 = \{ \vec{r}(\rho,\phi,z) \in \mathbb{R}^3 ; \ \rho \leq a \ , \ z = h = \text{fest} \}$ (2)

$$d\vec{S} = d\rho\, d\phi\, \underbrace{\rho\, \hat{e}_z}_{\overset{(5b.1)}{} (\partial_\rho \vec{r} \times \partial_\phi \vec{r})} \qquad (3)$$

$$\hat{e}_z \cdot \vec{B} = B_z \overset{(5b.3)}{=} -2z \qquad (4)$$

$$d\vec{S} \cdot \vec{B} \Big|_{S_1} = d\rho\, d\phi \cdot \rho(-2h) \qquad (5)$$

$$\Phi_1 \overset{(1,5)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{a} d\rho \ \rho \cdot (-2h) = 2\pi \cdot \tfrac{1}{2} a^2 \cdot (-2h) = -2\pi a^2 h$$

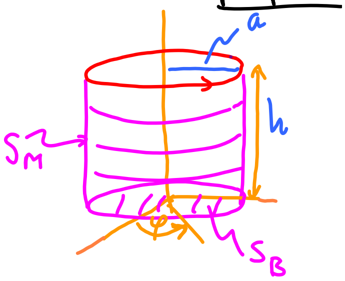
$$\overset{✓}{=} (5c.6)$$

5b) Flussintegral über Zylindermantel + Boden: $S_2 = S_M + S_B$ (1)

Bsp 5e

$$\Phi_B = \int_{S_B} d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{analog zu (5d.5), aber mit} \\ \hat{n} \cdot \vec{B} \Big|_{S_B} = -2z \Big|_{S_B} = 0 \end{array} \right\}$



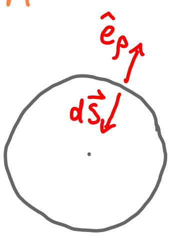
$$\Phi_M = \int_{S_M} d\vec{S} \cdot \vec{B} \qquad (3)$$

mit $d\vec{S} = -\, dz\, d\phi \cdot \underbrace{a\ \hat{e}_\rho}_{\overset{(5b.1)}{} = (\partial_\phi \vec{r} \times \partial_z \vec{r}) |_{S_M}}$ (4)

$$\hat{e}_\rho \cdot \vec{B} = B_\rho \overset{(5b.3)}{=} \rho \qquad (5)$$

$$d\vec{S} \cdot \vec{B} \Big|_{S_M} = -dz\, d\phi \cdot a \cdot a \qquad (6)$$

S_2 und S_1 müssen dieselbe Orientierung haben, also muss $d\vec{S}$ "nach innen" zeigen, d.h. in die $-\hat{e}_\rho$ -Richtung



$$\Phi_M = -\int_0^{h} dz \int_0^{2\pi} d\phi \ a \cdot a = -h\, 2\pi\, a^2 \qquad (7)$$

$$\overset{(1,2,7)}{\Longrightarrow} \quad S_2 = -2\pi h a^2$$

$$= (5c.6) = (5d.6) ✓$$