C7.5Bsp.a

<u>Beispiel für: Fourier-Integrale, Greensche Funktion, Homogene + Partikuläre Lösungen, δ - Funktion, komplexe Wegintegration</u>

Überdämpfter Harmonischer Oszillator mit periodischem Antrieb:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2 x = f(t) \quad , \text{Überdämpft: } \gamma > \Omega \tag{1}$$

$$D(d_t)\,x = f(t), \qquad D(d_t) = \left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) \tag{2}$$

Endziel: Finde x(t), mit Anfangsbedingung:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \tag{3}$$

für Antriebsfunktion $f(t)$ wird später angegeben (als $f(t) = f_0 \sin\omega_0 t$) (4)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{5}$$

$x_h(t)$: Finde mittels exp-Ansatz.

$x_p(t)$: Finde mittels GF: erst $\tilde{g}(\omega)$ mittels Fourier-Transf. dann $g(t)$ mittels komplexem Wegintegral

---

ZC7-IIIa
C7.5Bsp.b

<u>Zusammenfassung: C7.3 DGL mit konstanten Koeffizienten - Fourier, Green</u>

$$\underbrace{\left[c_n d_t^n + c_{n-1} d_t^{n-1} + \ldots + c_1 d_t + c_0\right]}_{\equiv D(d_t)} x(t) = f(t) \tag{1}$$

Kurznotation: $D(d_t)\,x(t) = f(t)$ (2)

Fourier-transformiert:

$$x(t) \overset{\text{(ZC6.3b.1)}}{=} \int\frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\tilde{x}(\omega), \qquad f(t) = \int\frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\tilde{f}(\omega) \tag{3}$$

(ZC6.3b.2)

$$\tilde{D}(-i\omega)\,\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \quad (4) \qquad \text{mit} \quad \tilde{D}(-i\omega) \equiv \sum_{l=0}^{n} c_l(-i\omega)^l \tag{5}$$

Aufgelöst:

$$\tilde{x}(\omega) \overset{(4)}{=} \tilde{g}(\omega)\,\tilde{f}(\omega) \quad (6) \qquad \text{mit} \quad \tilde{g}(\omega) \overset{(4)}{\equiv} \frac{1}{\tilde{D}(-i\omega)} \tag{7}$$

Green'sche Funktion erfüllt:

$$\tilde{D}(-i\omega)\cdot\tilde{g}(\omega) \overset{(7)}{=} \underbrace{1}_{=\tilde{\delta}(\omega)} \quad (8) \quad \xrightarrow{\text{Fourier-tr.}} \quad D(d_t)\,g(t) \overset{(1)}{=} \delta(t) \tag{9}$$

[(1) mit $f(t) = \delta(t)$]

Faltungstheorem, angewandt auf (6):

$$x(t) \overset{\text{(ZC6.3b.5)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{t}\; g(t-\tilde{t})\,f(\tilde{t}) \tag{10}$$

= allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb!

C7.5Bsp.c

Vorschau, Zusammenfassung der Ergebnisse

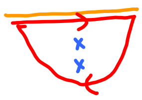
Homogene Lösung: $x_h(t) \overset{(d.6)}{=} A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}$ (1)

mit $\lambda_\pm^2 + 2\gamma\lambda_\pm + \Omega^2 = 0. \Rightarrow \lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2}$ (2)

Partikuläre Lösung: $x_p(t) \overset{(e.1)}{=} \int_{\infty}^{\infty} d\bar{t}\, g(t-\bar{t})\, f(\bar{t})$, $f(t) = f_0 \sin\omega_0 t$ (3)

Greensche Funktion: $\tilde{G}(\omega) \overset{(f.5)}{=} \frac{1}{\tilde{D}(-i\omega)} = \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}$ (4)

FT:

t>0: 

$$g(t) \overset{(g.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\tilde{D}(-i\omega)} \overset{(i.7)}{=} \theta(t)\frac{1}{\gamma_r}\left[e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}\right] \quad (5)$$

(5) in (3) : $x_p(t) \overset{(m.2)}{=} \frac{-f_0}{2\gamma_r} \frac{e^{i\omega_0 t}}{\omega_0 + i\lambda_\pm} + k.k. \overset{(m.7)}{=} -f_0 \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin\omega_0 t + 2\gamma\omega_0 \cos\omega_0 t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}$ (6)

Volle Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ (7) + Anpassen der Konstanten:

C7.5Bsp.d

(a) Homogene Lösung: Exp-Ansatz :

$$x_h(t) = A e^{\lambda t} \quad (1)$$

Kurznotation

eingesetzt in: $(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2)\, x_h(t) \overset{(a.2)}{=} 0$ (2) $\quad D(d_t)\, x_h = 0$

$(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2)\, A e^{\lambda t} = 0$ (3) $\quad D(d_t)\, A e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega^2 = 0.$ (4) $\Leftarrow \quad \tilde{D}(\lambda) = 0$

$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \equiv \lambda_\pm < 0$ (5) (wichtig !!)

[vergleiche (C7.5j.6) und Blatt 9, Bsp.Aufgabe]

Allgemeine homogene Lösung:

$x_h(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}$ (6)

$\dot{x}_h(t) = \lambda_+ A_+ e^{\lambda_+ t} + \lambda_- A_- e^{\lambda_- t}$ (7)

Konstanten A+ , A- werden festgelegt, wenn partikuläre Lösung bekannt ist.

Für späteren Gebrauch: $\lambda_+ + \lambda_- = -2\gamma$, $\lambda_+ - \lambda_- = 2\sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \equiv \gamma_r$ (8)

$\lambda_+ \cdot \lambda_- = (-\gamma + \sqrt{\ })(-\gamma - \sqrt{\ }) = \gamma^2 - \sqrt{\ }^2 = \Omega^2$ (9)

b) Partikuläre Lösung : mittels Greenscher Funktion

C7.5Bsp.e

$$x_p(t) \overset{(b.10)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{t}\; g(t-\bar{t})\, f(\bar{t}) \quad : \tag{1}$$

wobei G(t) per Definition die Diff.Gl. mit δ - Antrieb erfüllt:

$$\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) g(t-\bar{t}) \overset{(b.9)}{\equiv} \delta(t-\bar{t}) \tag{2}$$

Kurznotation:

$$D(d_t)\, g(t) = \delta(t)$$

Check, dass (e.1) die Gl. (a.1) erfüllt: (Logik: siehe Seite b.)

$$\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) x_p(t) = \tag{3}$$

$$\overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{t}\; \underbrace{\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) g(t-\bar{t})}_{\delta(t-\bar{t})}\, f(\bar{t}) \tag{4}$$

$$= f(t) \checkmark \tag{5}$$

$$D(d_t)\, x_p(t)$$

$$\overset{(1)}{=} \int d\bar{t}\; \underbrace{D(d_t)\, g(t-\bar{t})}_{\delta(t-\bar{t})} f(\bar{t})$$

$$= f(t) \checkmark$$

c) Bestimmung der Greenschen Funktion im Fourier-Raum

C7.5Bsp.f

$$g(t) \overset{(ZC6.3b.1)}{=} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, \tilde{g}(\omega) \tag{1}$$

$$d_t \overset{(ZC6.3b.2)}{\longrightarrow} -i\omega \tag{2}$$

$$\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right) g(t) \overset{(e.2)}{=} \delta(t) \tag{3}$$

Kurznotation:

$$\overset{(b.4)}{\Longrightarrow} \Big(\underbrace{(-i\omega)^2 + 2\gamma(-i\omega) + \Omega^2}_{\equiv \tilde{D}(-i\omega)}\Big)\, \tilde{g}(\omega) = 1 \qquad \tilde{D}(-i\omega)\tilde{g}(\omega) = 1 \tag{4}$$

$$\overset{(b.7)}{\Longrightarrow} \tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \tag{5}$$

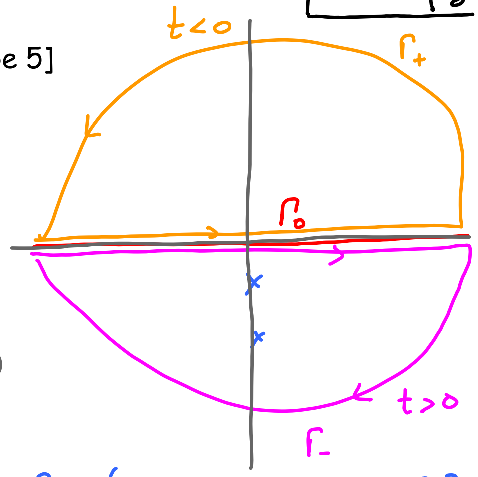
[vgl.: (C7.5m)]

nützliche Kurznotation: $\overset{(b.7)}{\equiv} \dfrac{1}{\tilde{D}(-i\omega)}$ (6)

C7.5 Bsp.g

d) Bestimmung v. G(t) mittels komplexer Wegintegration

[vergleiche (C8.3g-h) und Blatt 15, Bsp.Aufgabe 5 & Hausaufgabe 5]



$$G(t) \overset{(f.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \, \frac{e^{-i\omega t}}{\tilde{D}(-i\omega)} \qquad (1)$$

$$G(t \lessgtr 0) = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_0} dz \, \underbrace{\frac{e^{-iz(\mp|t|)}}{2\pi \, \tilde{D}(-iz)}}_{\equiv h_\pm(z)} \qquad (2)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{(\Gamma_0,\Gamma_\pm)} dz \, h_\pm(z) \qquad (4)$$

$$\Gamma_0 : \{\gamma(s) = s, \; s \in [-R, R]\} \qquad (3)$$

Falls t < 0: Schließe Weg in oberer Halbebene,
 > unterer

entlang $\Gamma_\pm : \{ \gamma(\phi) = R e^{i\phi}, \; \phi \in [0, \pm\pi] \}$ (5)

denn $e^{\pm iz|t|} = e^{\pm i\gamma(\phi)|t|} = e^{\pm i|t|R(\cos\phi + i\sin\phi)} \sim e^{\mp|t|R\underbrace{\sin\phi}_{\geq 0}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$ ✓ (6)

C7.5 Bsp.h

Finde nun Pole von $h_\pm(z)$, d.h. die Nullstellen von:

$$-\Omega^2 + z^2 + 2i\gamma z \overset{(f.5)}{=} -\tilde{D}(-iz) = 0 \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ Pole der Ordnung 1 bei:

$$z_\pm = -i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2+\Omega^2} = i\left(-\gamma \pm \sqrt{+\gamma^2-\Omega^2}\right) \overset{(d.5)}{=} i\overbrace{\lambda_\pm}^{<0} \qquad (2)$$

Check: $(z - i\lambda_+)(z - i\lambda_-) = z^2 - iz(\lambda_+ + \lambda_-) - \lambda_+\lambda_-$

$$= z^2 - 2iz\gamma - [\gamma^2 - (\gamma^2 - \Omega^2)] = -\tilde{D}(-iz) \checkmark \qquad (3)$$

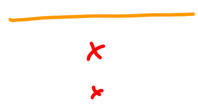
Übrigens:

$\lambda_\pm$ sind die in (d.5) gefundenen "Eigenfrequenzen" für die homogene Lösung!
Das ist kein Zufall, denn die Gleichungen für $z_\pm$ und $\lambda_\pm$ sind analog:

Einerseits: $\tilde{D}(-iz) \overset{(h.1)}{=} 0$, andererseits $\tilde{D}(\lambda) \overset{(d.4)}{=} 0$ $\Rightarrow$ konsistent mit (h.3) $-iz = \lambda$ ✓ (4)

Liegen die Pole in oberer oder unterer Halbebene?

Es gilt: $\mathrm{Im}(z_\pm) \overset{(h.2)}{=} \mathrm{Im}(i\lambda_\pm) = \lambda_\pm < 0$ (5) also liegen beide in unterer Halbebene!



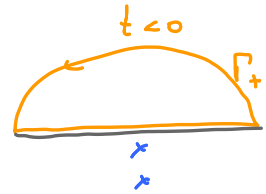
C7.5 Bsp.i

$$\Rightarrow \quad h_\pm(z) \overset{(g.2)}{=} \frac{e^{\pm i z|t|}}{2\pi \tilde{D}(-iz)} \overset{(h.3)}{=} \left(\frac{-1}{2\pi}\right) \frac{e^{\pm i z |t|}}{(z-i\lambda_+)(z-i\lambda_-)} \qquad (1)$$

$$G(t<0) \overset{(g.4)}{=} \oint_{(\Gamma_0,\Gamma_+)} dz\; h_+(z) \overset{(C8.2g.3)}{=} 0 \qquad (2)$$

Satz v. Cauchy

denn $h_+(z)$ ist analytisch in oberer Halbebene!

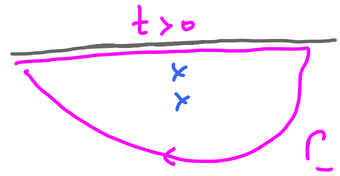


$$G(t>0) \overset{(g.4)}{=} \oint_{(\Gamma_0,\Gamma_-)} dz\; h_-(z) \qquad (3)$$

– Zeichen, weil (Γ_0, Γ_-) in math. negativer Richtung durchlaufen wird

(C8.3c.4) : Residuensatz

$$= -2\pi i \left[\mathrm{Res}(h_-, \underbrace{i\lambda_+}_{z_+\,(h.2)}) + \mathrm{Res}(h_-, \underbrace{i\lambda_-}_{z_-\,(h.2)})\right] \qquad (4)$$



$$\overset{(1)}{=} (-2\pi i)\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\left[\frac{e^{-i(i\lambda_+)|t|}}{(i\lambda_+ - i\lambda_-)} + \frac{e^{-i(i\lambda_-)|t|}}{(i\lambda_- - i\lambda_+)}\right] \qquad (5)$$

$$\lambda_+ - \lambda_- \overset{(d.8)}{=} 2\sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \equiv \gamma_r \qquad (6)$$

$$G(t) = \overset{(2)}{\Theta(t)} \underset{(6)}{\frac{1}{\gamma_r}} \left[e^{+\lambda_+ t} - e^{+\lambda_- t}\right] \qquad (7)$$

C7.5 Bsp.j

(e) Skizziere G(t):

$$G(0) = 0. \qquad (1)$$

$$G(t\to\infty) \longrightarrow 0^+ \qquad (2)$$

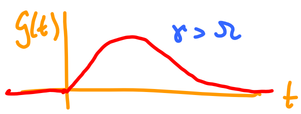
denn $|\lambda_+| < |\lambda_-|$, also dominiert der erste Term.

Steigung bei $t = 0^+$:

$$d_t G(t) \overset{(i.7)}{=} \delta(t) \frac{1}{\gamma_r}\left[\underbrace{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}_{=0}\right]$$

$$+ \Theta(t) \frac{1}{\gamma_r}\left[\lambda_+ e^{\lambda_+ t} - \lambda_- e^{\lambda_- t}\right] \qquad (3)$$

$$d_t G(t)\Big|_{t\to 0^+} = \frac{1}{\gamma_r}\left[\underbrace{\lambda_+ - \lambda_-}_{\gamma_r}\right] = 1 \checkmark \qquad (4)$$

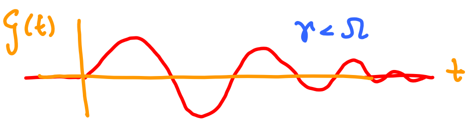


Vergleiche: Analoge Eigenschaft gilt für den unterdämpften Fall, $\gamma < \Omega$:

$$G(t) = \Theta(t) \frac{1}{\Omega_r} \sin(\Omega_r t) e^{-\gamma t} \overset{(C6.5b.5)}{=} \chi(t) \qquad \Omega_r \overset{(C7.5n.4)}{=} \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2} \qquad (5)$$

$$d_t G(t) = \frac{1}{\Omega_r}\left\{\delta(t) \underbrace{\cancel{\sin(\Omega_r t)}}_{=0} + \Theta(t)\left[\Omega_r \cos(\Omega_r t) + (-\gamma)\sin(\Omega_r t)\right]\right\} e^{-\gamma t} \qquad (6)$$

$$d_t G(t)\Big|_{t\to 0^+} \overset{(6)}{=} \frac{1}{\Omega_r} \cdot \Omega_r = 1 \qquad (7)$$



f) Erfüllt G(t) die definierende Gleichung (e.2) ?

C7.5Bsp.k

Vergleiche Blatt 12, Bsp-Aufgabe 4, Hausaufgabe 4

$$\left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right] G(t) \overset{?}{\equiv} \delta(t) \quad (1)$$

$$G(t) \overset{(i.7)}{=} \Theta(t) \frac{1}{\gamma_r}\left[e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}\right] \quad (2)$$

$$d_t G(t) \overset{(j.3)}{=} \Theta(t) \frac{1}{\gamma_r}\left[\lambda_+ e^{\lambda_+ t} - \lambda_- e^{\lambda_- t}\right] \quad (3)$$

$$d_t^2 G(t) \overset{(2)}{=} \delta(t) \frac{1}{\cancel{\gamma_r}} \underbrace{\left[\lambda_+ e^{\lambda_+ \cancel{t}^{\,0}} - \lambda_- e^{\lambda_- \cancel{t}^{\,0}}\right]}_{= \lambda_+ - \lambda_- \overset{(d.8)}{=} \cancel{\gamma_r}} \quad (4a)$$

$$+ \Theta(t) \frac{1}{\gamma_r}\left[\lambda_+^2 e^{\lambda_+ t} - \lambda_-^2 e^{\lambda_- t}\right] \quad (4b)$$

$$\left[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right] G(t) = \overset{\swarrow (4a)}{\delta(t)} + \Theta(t) \left[\underbrace{\lambda_+^2 + 2\gamma\lambda_+ + \Omega^2}_{\overset{(d.4)}{=0}}\right] \frac{1}{\gamma_r} e^{\lambda_+ t} \quad (6)$$

$$- \left[\overbrace{\lambda_-^2 + 2\gamma\lambda_- + \Omega^2}^{}\right] \frac{1}{\gamma_r} e^{\lambda_- t}$$

$$= \delta(t) \checkmark$$ [wie gefordert in (e.2)] (5)

g) Partikuläre Lösung: Für periodischen Antrieb:

C7.5Bsp.l

mittels G(t):

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{t}\; G(t-\bar{t})\, f(\bar{t}) \quad (1)$$

$$\overset{(i.7)}{=} \int_{-\infty}^{\cancel{\infty}\; t} d\bar{t}\; \cancel{\Theta(t-\bar{t})}\, \frac{1}{\gamma_r}\left[e^{\lambda_+(t-\bar{t})} - e^{\lambda_-(t-\bar{t})}\right] f(\bar{t}) \quad (2)$$

Substitution:

$t - \bar{t} = t'$

$\int_{-\infty}^{t} d\bar{t} = -\int_{\infty}^{0} dt' = +\int_{0}^{\infty} dt'$

$$= \int_0^{\infty} dt'\, \overbrace{\Theta(t')}^{=1} \frac{1}{\gamma_r}\left(e^{\lambda_+ t'} - e^{\lambda_- t'}\right) f(t-t') \quad (3)$$

$$\equiv x_+(t) - x_-(t) \quad (4)$$

Annahme: Periodischer Antrieb: $f(t) = f_0 \sin \omega_0 t$ (5)

$$x_\pm(t) \overset{(3)}{=} \int_0^{\infty} dt' \frac{1}{\gamma_r} e^{\lambda_\pm t'} f_0 \sin \omega_0 (t-t') \quad (6)$$

$$= \frac{f_0}{\gamma_r} \int_0^{\infty} dt'\, e^{\lambda_\pm t'}\, \mathrm{Im}\left[e^{i\omega_0(t-t')}\right] \quad (7)$$

$$x_\pm(t) = \frac{f_0}{\gamma_r}\,\mathrm{Im}\left[e^{+i\omega_0 t}\,\frac{e^{t'(-i\omega_0+\lambda_\pm)}}{-i\omega_0+\lambda_\pm}\Bigg|_0^\infty\right] \qquad (\gamma_\pm \overset{(d.5)}{<} 0) \tag{1}$$

$$= \frac{f_0}{\gamma_r}\,\mathrm{Im}\left[e^{i\omega_0 t}\,\frac{-1}{-i\omega_0+\lambda_\pm}\right] = \frac{f_0}{\gamma_r}\,\mathrm{Im}\left[\frac{e^{i\omega_0 t}(-i)}{\omega_0+i\lambda_\pm}\right] \tag{2}$$

Volle partikuläre Lösung:

$$x_p(t) \overset{(l.4)}{=} x_+ - x_- \overset{(2)}{=} \mathrm{Im}\left[\frac{f_0}{\gamma_r}e^{i\omega_0 t}(-i)\left[\frac{1}{\omega_0+i\lambda_+} - \frac{1}{\omega_0+i\lambda_-}\right]\right] \tag{3}$$

$$= \mathrm{Im}\left[-\frac{i f_0}{\gamma_r}e^{i\omega_0 t}\,\frac{(\cancel{\omega_0}+i\lambda_-)-(\cancel{\omega_0}+i\lambda_+)}{(\omega_0+i\lambda_+)(\omega_0+i\lambda_-)}\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{f_0}{\cancel{\gamma_r}}e^{i\omega_0 t}\,\frac{(-i)\;i\overbrace{(\lambda_- - \lambda_+)}^{-\cancel{\gamma_r}}}{\omega_0^2 + i\omega_0\underbrace{(\lambda_+ + \lambda_-)}_{\overset{(d.8)}{}\,-2\gamma} - \underbrace{\lambda_+\lambda_-}_{\overset{(d.9)}{}\,\Omega^2}}\right]. \tag{4}$$

$$= \mathrm{Im}\left[f_0\, e^{i\omega_0 t}\,\frac{-1}{\omega_0^2-\Omega^2-2i\gamma\omega_0}\right] \tag{5}$$

← bequemste Form, weil $\sim e^{i\omega_0 t}$.

$$= \mathrm{Im}\left\{-f_0(\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t)\left[\frac{\omega_0^2-\Omega^2+2i\gamma\omega_0}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\omega_0^2}\right]\right\} \tag{6}$$

$$x_p(t) = f_0\,\frac{-(\omega_0^2-\Omega^2)\sin\omega_0 t - 2\gamma\omega_0\cos\omega_0 t}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\omega_0^2} \quad ✓ \tag{7}$$

Check: erfüllt $x_p(t)$ die Gl. (a.1), mit $f(t) \overset{(l.5)}{=} f_0\sin(\omega_0 t)$

$$(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2)\,x_p(t) \overset{?}{=} f_0\sin\omega_0 t \tag{1}$$

Ausgangspunkt:

$$x_p(t) \overset{(m.5)}{=} \mathrm{Im}\left[f_0\, e^{i\omega_0 t}\,\frac{-1}{\omega_0^2-\Omega^2-2i\gamma\omega_0}\right] \tag{2}$$

(2) in (1):

$$(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2)\;\mathrm{Im}\left[f_0\, e^{i\omega_0 t}\,\frac{-1}{\omega_0^2-\Omega^2-2i\gamma\omega_0}\right] \tag{3}$$

$$= \mathrm{Im}\left[\left((i\omega_0)^2 \cancel{+ 2\gamma i\omega_0 + \Omega^2}\right) f_0\, e^{i\omega_0 t}\,\frac{-1}{(-)(-\omega_0^2 \cancel{+ \Omega^2 + 2i\gamma\omega_0})}\right]. \tag{4}$$

$$= \mathrm{Im}\left[f_0\, e^{i\omega_0 t}\right] = f_0\sin\omega_0 t \quad = (1)\ ✓ \tag{5}$$

h) Bestimme jetzt Anfangsbedingungen:

C7.5Bsp.o

Allgemeine Lösung: $x(t) \overset{(a.5)}{=} x_h(t) + x_p(t)$ (1)

$x_h(0) \overset{(d.6)}{=} A_+ + A_-$, (2) $\dot{x}_h(0) \overset{(d.7)}{=} \lambda_+ A_+ + \lambda_- A_-$ (3)

$$x_p(t) \overset{(m.7)}{=} f_0 \frac{-(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin\omega_0 t - 2\gamma\omega_0 \cos\omega_0 t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \quad (4)$$

$$x_p(0) \overset{(4)}{=} f_0 \frac{-2\gamma\omega_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \quad (5)$$

$$\dot{x}_p(t) \overset{(4)}{=} f_0 \frac{-(\omega_0^2 - \Omega^2)\omega_0 \cos\omega_0 t - 2\gamma\omega_0(-\omega_0)\sin\omega_0 t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \quad (6)$$

$$\dot{x}_p(0) \overset{(6)}{=} f_0 \frac{-\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \quad (7)$$

Wähle A_+ , A_- so, dass $x(0) = x_0 = x_p(0) + x_h(0)$ (8)

$\dot{x}(0) = v_0 = \dot{x}_p(0) + \dot{x}_h(0)$ (9)

i) Abkürzung bei Berechnung v. $x_p(t)$:

C7.5Bsp.p

$$x_p(t) \overset{(l.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{t}\, G(t-\bar{t})\, f(\bar{t}) \quad (1) \qquad f(t) \overset{(l.5)}{=} f_0 \sin\omega_0 t \quad (2)$$

$$G(t) \overset{(f.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\tilde{G}(\omega) \overset{(f.6)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\tilde{D}(-i\omega)} \quad (3) \qquad \tilde{D}(-i\omega) \overset{(f.4)}{=} \Omega^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega \quad (4)$$

(2), (3) in (1) :

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-\bar{t})}}{\tilde{D}(-i\omega)} \frac{f_0}{2i}\left[e^{i\omega_0\bar{t}} - e^{-i\omega_0\bar{t}}\right] \quad (5)$$

vertausche Integrale:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{f_0}{2i} \frac{e^{-i\omega t}}{\tilde{D}(-i\omega)} \Big\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{t}}{2\pi} e^{i\bar{t}(\omega_0+\omega)}}_{\delta(\omega_0+\omega)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{t}}{2\pi} e^{-i\bar{t}(\omega_0-\omega)}}_{\delta(\omega_0-\omega)} \Big\} \quad (6)$$

$\delta(\omega_0+\omega) \leftarrow$ (ZC6.3a.3) $\rightarrow \delta(\omega_0-\omega)$

$$= \frac{f_0}{2i}\left\{\frac{e^{+i\omega_0 t}}{\tilde{D}(+i\omega_0)} - \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{D}(-i\omega_0)}\right\} \overset{(4)}{=} \mathrm{Im}\left[f_0 \frac{e^{i\omega_0 t}}{(-\omega_0^2 + 2\gamma i\omega_0 + \Omega^2)}\right] \quad (7)$$

$= (m.5)$