Blatt 00: Ableiten und Integrieren

Ausgabe: Mittwoch, 30.09.15 Abgabe: keine

Beispielaufgabe 1: Ableitung [2]

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen. Eckige Klammern geben Kontrollergebnisse an: $[a, b]$ steht für $f'(a) = b$.

(a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$ $[2, 0]$

(b) $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$ $[2, \frac{1}{8}]$

(c) $f(x) = \mathrm{e}^x(2x - 3)$ $[1, \mathrm{e}]$

(d) $f(x) = x \sin\left[\pi\left(x + \frac{1}{6}\right)\right]$ $[0, \frac{1}{2}]$

(e) $f(x) = \sin^2(\pi x)$ $[\frac{1}{4}, \pi]$

(f) $f(x) = \tan(x) \equiv \frac{\sin x}{\cos x}$ $[\frac{\pi}{6}, \frac{4}{3}]$

(g) $f(x) = x \ln(9x^2)$ $[\frac{1}{3}, 2]$

(h) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{x}}{\ln x + x^{-2}}$ $[1, \frac{3}{2}]$

(i) $f(x) = \cosh x \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ $[\ln 3, \frac{4}{3}]$

(j) $f(x) = \tanh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ $[0, 1]$

Beispielaufgabe 2: Partielle Integration [1]

Berechnen Sie mittels partieller Integration:

(a) $\int \mathrm{d}x\, x \ln x$

(b) $\int \mathrm{d}x\, \sin x \cos x$

Beispielaufgabe 3: Partialbruchzerlegung [1]

Berechnen Sie mittels einer Partialbruchzerlegung:

(a) $\int \mathrm{d}x\, \frac{3x + 3}{(x+1)^2(x-2)}$

(b) $\int \mathrm{d}x\, \frac{3x}{(x+1)^2(x-2)}$

Beispielaufgabe 4: Substitutionsmethode [1]

Berechnen Sie mittels Substitution:

(a) $\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{7 - 3 \cdot x}}$

(b) $\int_0^2 \mathrm{d}x\, \frac{2 \cdot x + 3}{x^2 + 3 \cdot x + 5}$

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 5]

Hausaufgabe 1: Ableitung [2]

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen. Eckige Klammern geben Kontrollergebnisse an: $[a, b]$ steht für $f'(a) = b$.

(a) $f(x) = (x-1)(1+x)(x-2)$ $\quad [2, 3]$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad [8, \frac{1}{3}]$

(c) $f(x) = -\mathrm{e}^{(1-x^2)}$ $\quad [1, 2]$

(d) $f(x) = -x^2 \cos(\pi x)$ $\quad [1, 2]$

(e) $f(x) = -\cos^4(3x^2/\pi - x)$ $\quad [\frac{\pi}{2}, 2]$

(f) $f(x) = \cot(x) \equiv \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\quad [\frac{\pi}{2}, -1]$

(g) $f(x) = -2\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$ $\quad [\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}^2}]$

(h) $f(x) = \ln\left[\dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}\right]$ $\quad [0, -2]$

(i) $f(x) = \sinh x \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ $\quad [0, 1]$

(j) $f(x) = \coth x \equiv \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$ $\quad [\ln 2, \frac{16}{9}]$

Hausaufgabe 2: Partielle Integration [1]

Berechnen Sie mittels partieller Integration:

(a) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{ax} \cos(bx)$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x\, \frac{1}{x^2} \ln x$

Hausaufgabe 3: Partialbruchzerlegung [1]

Berechnen Sie mittels einer Partialbruchzerlegung:

(a) $\displaystyle\int \mathrm{d}x \frac{x+2}{x^3 - 3\cdot x^2 - x + 3}$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, \frac{4\cdot x - 1}{(x+2)\cdot(x-1)^2}$

Hausaufgabe 4: Substitutionsmethode [1]

Berechnen Sie mittels Substitution:

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}x\, \cos^4 x\, \sin x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, x\, \mathrm{e}^{x^2}$

(c) $\displaystyle\int_0^{100} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ (Hinweis: nach der Substitution empfiehlt sich eine partielle Integration!)

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 5]