LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

FAKULTÄT FÜR PHYSIK
R: RECHENMETHODEN FÜR PHYSIKER, WISE 2015/16
DOZENT: JAN VON DELFT
ÜBUNGEN: BENEDIKT BRUOGNOLO, DENNIS SCHIMMEL, FRAUKE SCHWARZ, LUKAS WEIDINGER

http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/15r/

Blatt 02.4: Vektorräume, Euklidischer Räume

Ausgabe: Freitag, 23.10.15 Abgabe: Freitag, 30.10.2015, 13:00 Zentralübung: 04.11.15
[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll

Beispielaufgabe 1: $\sqrt{1-x^2}$-Integrale mittels trigonometrischer Substitution [4]
Punkte: (a)[1](M); (b)[3](A)

Die Sinus- und Cosinus-Funktionen erfüllen folgende Identitäten:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sin(y) = \cos(y), \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\cos(y) = -\sin(y), \qquad \cos^2(y) = 1 - \sin^2(y).$$

Wegen letzterer empfiehlt sich bei Integralen, die $\sqrt{1-x^2}$ enthalten, die trigonometrische Substitution $x = \sin(y)$, denn $\sqrt{1-x^2} = \cos(y)$.
Berechnen Sie folgenden Integrale für $|z| < 1$; überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Berechnung von $\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}$.

(a) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\left[\text{Kontrollergebnis: } I\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{\pi}{4}.\right]$

(b) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x \, \sqrt{1-x^2}$. $\left[\text{Kontrollergebnis: } I\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{4}.\right]$

Hinweis: Das nach der Substitution auftretende $\cos^2 y$ Integral läßt sich partiell integrieren!

Beispielaufgabe 2: Lineare Unabhängigkeit [3]
Punkte: (a)[2](M); (b)[1](M)

(a) Sind die drei Vektoren $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 2)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)^T$ und $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 4)^T$ linear unabhängig?

(b) Falls ja (oder falls nein), finden Sie einen neuen Vektor $\mathbf{v}_2'$, so dass $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2'$ und $\mathbf{v}_3$ linear abhängig (oder linear unabhängig) sind, und zeigen Sie explizit, dass diese Eigenschaft gilt.

Beispielaufgabe 3: Projektion auf eine Orthonormalbasis [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$, $\mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$ eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^2$ bilden.

(b) Stellen Sie den Vektor $\mathbf{w} = (-2, 3)^T$ in der Form $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1' w^1 + \mathbf{e}_2' w^2$ dar, indem Sie seine Komponenten w^i bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_i'\}$ mittels Projektion auf die Basisvektoren bestimmen.

Beispielaufgabe 4: Gram-Schmidt-Verfahren [2]
Punkte: [2](E)

Finden Sie mittels Gram-Schmidt-Verfahren für die folgenden linear unabhängigen Vektoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ einen orthonormalen Satz $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ mit demselben Span und mit $\mathbf{e}'_1 || \mathbf{v}_1$.

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)^T, \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)^T, \qquad \mathbf{v}_3 = (0, 1, 2)^T.$$

Beispielaufgabe 5: Nicht-Orthogonale Basis und Metrik [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1](M)

Geben sind die Vektoren $\mathbf{v}_1 = \binom{2}{0}$ und $\mathbf{v}_2 = \binom{1}{1}$, ausgedrückt durch Spaltenvektoren in der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^2$ bildet.

(b) $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 x^1 + \mathbf{v}_2 x^2$ und $\mathbf{y} = \mathbf{v}_1 y^1 + \mathbf{v}_2 y^2$ seien zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$, deren Komponenten bzgl. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ gegeben sind durch $x^1 = 3$, $x^2 = -4$ bzw. $y^1 = -1$, $y^2 = 3$. Drücken Sie $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ als Spaltenvektoren in der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ aus und berechnen Sie deren Skalarprodukt, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

(c) Wird das Skalarprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ durch die Komponenten x^i von $\mathbf{x}$ und y^j von $\mathbf{y}$ bezüglich der nicht-orthonormalen Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ausgedrückt, nimmt es die Form eines inneren Produkts mit einer Metrik an: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{v}_i x^i) \cdot (\mathbf{v}_j y^j) = x^i g_{ij} y^j$, mit $g_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$. Berechnen Sie die Komponenten der Metrik explizit (konkret: finden Sie g_{11}, g_{12}, g_{21} und g_{22}).

(d) Das innere Produkt aus (c) lässt sich in die Form eines Skalarprodukts ohne Metrik schreiben, indem die Metrik in die Definition von Komponenten mit Index unten absorbiert wird: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x^i g_{ij}) y^j = x_j y^j$, mit $x_j = x^i g_{ij}$. Berechnen Sie $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ auf diese Weise, indem Sie zunächst x_1 und x_2 finden. [Kontrolle: ist das Ergebnis konsistent mit dem von (b)?]

Beispielaufgabe 6: Vektorraum der Monome vom Grad 2 [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E)

Der Vektorraum aller reeller Funktion ist unendlichdimensional. Falls jedoch nur Funktionen einer vorgeschriebenen Form betrachtet werden, kann der entsprechende Vektorraum endlichdimensional sein. Als Beispiel wird in dieser Aufgabe gezeigt, dass die Menge aller Monome vom Grad 2 einen Vektorraum der Dimension 1 bildet, der isomorph zu $\mathbb{R}$ ist.
[Anmerkung zur Notation: im aktuellen Kontext von Polynomen bedeutet x^2 wirklich 'x zur Potenz 2', im Gegensatz zur Notation der Vorlesung, wo x^k für die k-Kompenente des Vektors $\mathbf{x} = \sum_k \mathbf{v}_k x^k$ bezüglich einer Basis von Vektoren $\{\mathbf{v}_k\}$ steht. Jede Notationsregel hat Ausnahmen!]

p_a bezeichne ein Monom in der Variable $x \in \mathbb{R}$ vom Grad 2, eindeutig bestimmt durch den Koeffizienten $a \in \mathbb{R}$:

$$p_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto p_a(x) \equiv ax^2 .$$

$P_2 = \{p_a | a \in \mathbb{R}^1\}$ sei die Menge aller solcher Monome. Die naheliegenden Definitionen der Addition von Monomen oder deren Multiplikation mit einem Skalar $c \in \mathbb{R}$ sind

$$\begin{aligned} p_a \boldsymbol{+} p_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto p_a(x) + p_b(x) , \\ c \boldsymbol{\cdot} p_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto c\, p_a(x) , \end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite die übliche Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ gemeint ist.

(a) Zeigen Sie, dass obige Definitionen von Addition und skalarer Multiplikation zu folgenden Verknüpfungsregeln in P_2 führen,

Addition von Monomen:	$\boldsymbol{+}$:	$P_2 \times P_2 \to P_2,$	$(p_a, p_b) \mapsto p_a \boldsymbol{+} p_b = p_{a+b}\,,$
Skalare Multiplikation:	$\cdot$:	$\mathbb{R} \times P_2 \to P_2,$	$(c, p_x) \mapsto c \cdot p_a = p_{ca}\,,$

wobei $a + b$ und ca die übliche Addition und skalare Multiplikation in $\mathbb{R}$ bezeichnen.

(b) Zeigen Sie, dass $(P_2, \boldsymbol{+}, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und dass er isomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

(c) Geben Sie eine Basis für $(P_2, \boldsymbol{+}, \cdot)$ an.

Beispielaufgabe 7: Vektorraum der reellen Funktionen [2]
Punkte: [2](M)

Sei $F \equiv \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\}$ die Menge der reellen Funktionen. Beweisen Sie anhand der Vektorraumaxiome, dass $(F, \boldsymbol{+}, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar wie folgt definiert sind:

$$\boldsymbol{+} : F \times F \to F \qquad (f, g) \mapsto f \boldsymbol{+} g, \qquad \text{mit} \qquad f \boldsymbol{+} g : x \mapsto \big[f \boldsymbol{+} g\big](x) \equiv f(x) + g(x) \tag{1}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times F \to F \qquad (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f, \qquad \text{mit} \qquad \lambda \cdot f : x \mapsto \big[\lambda \cdot f\big](x) \equiv \lambda f(x) \tag{2}$$

Anmerkung zur Notation: Es ist wichtig, den 'Namen' einer Funktion, f, zu unterscheiden von dem 'Funktionswert', $f(x)$, den sie liefert, wenn sie am Argument x ausgewertet wird. Die Summe der Funktionen f und g ist eine Funktion namens $f \boldsymbol{+} g$. Laut Eq. (1) ist deren Funktionswert bei x, notiert als $\big[f \boldsymbol{+} g\big](x)$ (eckige Klammern kennzeichnen den Funktionsnamen), per Definition gleich $f(x) + g(x)$, der Summe der Funktionswerte von f und g bei x. Das Produkt der Zahl c und der Funktion f ist eine Funktion namens $c \cdot f$. Laut Gl. (2) ist deren Funktionswert bei x, notiert als $\big[c \cdot f\big](x)$, per Definition gleich $cf(x)$, dem Produkt von c und dem Funktionswert von f bei x.

Beispielaufgabe 8: Reeller Vektorraum mit unkonventionellen Verknüpfungsregeln [Bonus]
Punkte: [2](M,Bonus)

Die Vektorraum-Axiome können im Allgemeinen auf vielerlei unterschiedliche Arten erfüllt werden, z.B. durch unkonventionelle Definitionen von Vektoraddition und skalarer Multiplikation. Wir wollen dies anhand eines Beispiels veranschaulichen:
Für alle $a \in \mathbb{R}$, sei $V_a \equiv \{\mathbf{v}_x\}$ eine Menge, deren Elemente $\mathbf{v}_x$, indiziert durch reele Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die folgenden Rechenregeln erfüllen:

Addition:	$\boldsymbol{+}$:	$V_a \times V_a \to V_a,$	$(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y) \mapsto \mathbf{v}_x \boldsymbol{+} \mathbf{v}_y \equiv \mathbf{v}_{x+y+a}$
Multiplikation mit einem Skalar:	$\cdot$:	$\mathbb{R} \times V_a \to V_a,$	$(\lambda, \mathbf{v}_x) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}_x \equiv \mathbf{v}_{\lambda x + a(\lambda - 1)}$

Als reele Zahlen erfüllen die Indizes a und x die üblichen Additions- und Multiplikationsregeln in $\mathbb{R}$; z.B. gilt für V_2: $\mathbf{v}_3 \boldsymbol{+} \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_{3+4+2} = \mathbf{v}_9$ und $3 \cdot \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_{3 \cdot 4 + 2(3-1)} = \mathbf{v}_{16}$.
Zeigen Sie, dass das Tripel $(V_a, \boldsymbol{+}, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei $\mathbf{v}_{-a}$ und 1 die neutralen Elemente bezüglich Vektoraddition und skalarer Multiplikation sind. *Hinweis:* Das Inverse von $\mathbf{v}_x$ ist $\mathbf{v}_{-x-2a}$.

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 20]

Hausaufgabe 1: $\sqrt{1+x^2}$-Integrale mittels hyperbolischer Substitution [4]
Punkte: (a)[1](M); (b)[3](A)

Die Funktionen 'Sinus Hyperbolikus' und 'Cosinus Hyperbolikus', definiert durch

$$\sinh(y) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}), \qquad \cosh(y) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}),$$

erfüllen folgende Identitäten:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sinh(y) = \cosh(y), \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\cosh(y) = \sinh(y), \qquad \cosh^2(y) = 1 + \sinh^2(y).$$

Wegen letzterer empfiehlt sich bei Integralen, die $\sqrt{1+x^2}$ enthalten, die hyperbolische Substitution $x = \sinh(y)$, denn $\sqrt{1+x^2} = \cosh(y)$.
Berechnen Sie folgenden Integrale; überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Berechnung von $\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}$.

(a) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. [Kontrollergebnis: $I\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 2$.]

(b) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x \, \sqrt{1+x^2}$. [Kontrollergebnis: $I\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\sqrt{2} + \frac{15}{32}$.]

Hinweis: Das nach der Substitution auftretende $\cosh^2 y$ Integral läßt sich partiell integrieren!

Hausaufgabe 2: Lineare Unabhängigkeit [3]
Punkte: (a)[2](M); (b)[1](M)

(a) Sind die Vektoren $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)^T$, $\mathbf{v}_2 = (2,4,6)^T$ und $\mathbf{v}_3 = (-1,-1,0)^T$ linear unabhängig?

(b) Falls ja (oder falls nein), finden Sie einen neuen Vektor $\mathbf{v}_2'$, so dass $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2'$ und $\mathbf{v}_3$ linear abhängig (oder linear unabhängig) sind, und zeigen Sie explizit, dass diese Eigenschaft gilt.

Hausaufgabe 3: Projektion auf eine Orthonormalbasis [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$, $\mathbf{e}_2' = \frac{1}{2}(-1,\sqrt{2},1)^T$ und $\mathbf{e}_3' = \frac{1}{2}(-1,-\sqrt{2},1)^T$ eine Orthonormalbasis im Raum $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) $\mathbf{w} = \mathbf{e}_i' w^i$ sei die Zerlegung von $\mathbf{w} = (1,2,3)^T$ in dieser Basis. Wie lauten die Komponenten w^i?

Hausaufgabe 4: Gram-Schmidt Verfahren [2]
Punkte: [2](E)

Finden Sie mittels Gram-Schmidt-Verfahren für die folgenden linear unabhängigen Vektoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ einen orthonormalen Satz $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ mit demselben Span und mit $\mathbf{e}_1' || \mathbf{v}_1$.

$$\mathbf{v}_1 = (2,0,0)^T, \qquad \mathbf{v}_2 = (1,-3,0)^T, \qquad \mathbf{v}_3 = (3,4,-2)^T.$$
$$\mathbf{v}_1 = (-1,0,1)^T, \qquad \mathbf{v}_2 = (1,1,3)^T, \qquad \mathbf{v}_3 = (2,-5,-4)^T.$$

Hausaufgabe 5: Nicht-Orthogonale Basis und Metrik [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1](M)

Geben sind die Vektoren $\mathbf{v}_1 = (1,2,1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,2)^T$, und $\mathbf{v}_3 = (2,2,0)^T$ ausgedrückt durch Spaltenvektoren in der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Drücken Sie den Standardbasisvektor $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T$ als Linearkombination von $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ aus. Ditto für $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T$ und $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T$. Bilden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ eine Basis für $\mathbb{R}^3$?

(b) $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 x^1 + \mathbf{v}_2 x^2 + \mathbf{v}_3 x^3$ und $\mathbf{y} = \mathbf{v}_1 y^1 + \mathbf{v}_2 y^2 + \mathbf{v}_3 y^3$ seien zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$, deren Komponenten bzgl. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ gegeben sind durch $x^1 = 2$, $x^2 = -5$, $x^3 = 3$ bzw. $y^1 = 4$, $y^2 = -1$, $y^3 = -2$. Drücken Sie $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ als Spaltenvektoren in der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ aus und berechnen Sie deren Skalarprodukt, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

(c) Berechnen Sie die Komponenten der Metrik $g_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ explizit.

(d) Berechnen Sie nun das Skalarprodukt von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ mittels der Formel $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^i g_{ij} y^j = x_j y^j$, mit $x_j = x^i g_{ij}$, indem Sie die Summen über i und j explizit durchführen. [Kontrolle: ist das Ergebnis konsistent mit dem von (b)?]

Hausaufgabe 6: Vektorraum der Polynome [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[M](E); (c)[1](E)

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Menge aller Polynome des Grades n einen $n+1$ dimensionalen Vektorraum bildet, der isomorph zu $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.
[Anmerkung zur Notation: im aktuellen Kontext von Polynomen bedeutet x^k wirklich 'x zur Potenz k', und a_k "der Koeffizient von x^k", im Gegensatz zur Notation der Vorlesung, wo x^k für die k-Kompenente des Vektors $\mathbf{x} = \sum_k \mathbf{v}_k x^k$ bezüglich einer Basis von Vektoren $\{\mathbf{v}_k\}$ steht. Jede Notationsregel hat Ausnahmen!]

$p_\mathbf{a}$ bezeichne ein Polynom in der Variable $x \in \mathbb{R}$ vom Grad n:

$$p_\mathbf{a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto p_\mathbf{a}(x) \equiv a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots a_n x^n .$$

$p_\mathbf{a}$ ist eindeutig bestimmt durch die $n+1$ reelle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, für welche wir die Kompaktnotation eines $(n+1)$ Tupels, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ benutzen. $P_n = \{p_\mathbf{a} | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ sei die Menge aller solcher Polynome vom Grad n. Die naheliegenden Definitionen der Addition von Polynomen oder deren Multiplikation mit einem Skalar $c \in \mathbb{R}$ sind

$$\begin{aligned} p_\mathbf{a} \boldsymbol{+} p_\mathbf{b} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x &\mapsto p_\mathbf{a}(x) + p_\mathbf{b}(x)\,, \\ c \boldsymbol{\cdot} p_\mathbf{a} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x &\mapsto c\, p_\mathbf{a}(x)\,, \end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite die übliche Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ gemeint ist.

(a) Zeigen Sie, dass obige Definitionen von Addition und skalarer Multiplikation zu folgenden Verknüpfungsregeln in P_n führen,

Addition von Polynomen: $\boldsymbol{+} : \quad P_n \times P_n \to P_n, \qquad (p_\mathbf{a}, p_\mathbf{b}) \mapsto p_\mathbf{a} \boldsymbol{+} p_\mathbf{b} = p_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$
Skalare Multiplikation: $\boldsymbol{\cdot} : \quad \mathbb{R} \times P_n \to P_n, \qquad (c, p_\mathbf{x}) \mapsto c \boldsymbol{\cdot} p_\mathbf{a} = p_{c\mathbf{a}}$

wobei $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ und $c\mathbf{a}$ die übliche Addition und skalare Multiplikation in $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnen.

(b) Zeigen Sie, dass $(P_n, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und dass er isomorph zu $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

(c) Geben Sie eine Menge aus $n+1$ Polynomen an, $\{p_{\mathbf{a}_0}, \ldots, p_{\mathbf{a}_n}\} \subset P_n$, die eine Basis für diesen Vektorraum bildet.

Hausaufgabe 7: Inneres Produkt und Norm für Vektorraum stetiger Funktionen [3]
Punkte: (a)[2](M); (b)[1](M)

Diese Aufgabe illustriert ein besonders wichtiges Beispiel eines inneren Produkts: im Raum der stetigen Funktionen kann ein inneres Produkt mittels Integration definiert werden.
V sei der Vektorraum V der *stetigen* reellen Funktionen auf einem Interval $I =\in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, mit den üblichen Verknüpfungsregeln der Vektoraddition und skalaren Multiplikation:

$$\begin{aligned} &\forall f, g \in V : && f + g : I \to \mathbb{R}, && x \mapsto (f+g)(x) \equiv f(x) + g(x)), \\ &\forall f \in V, \lambda \in \mathbb{R} : && \lambda \cdot f : I \to \mathbb{R}, && x \mapsto (\lambda \cdot f)(x) \equiv \lambda\,(f(x))\,. \end{aligned}$$

(a) Weisen Sie nach, dass folgende Abbildung ein inneres Produkt auf V darstellt:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \to \mathbb{R}, \qquad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle \equiv \int_I \mathrm{d}x\, f(x) g(x)\ .$$

(b) Sei nun $I = [-1, 1]$. Berechnen Sie $\langle f_1, f_2 \rangle$ für $f_1(x) \equiv \sin\left(\frac{x}{\pi}\right)$ und $f_2(x) \equiv \cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$.

Hausaufgabe 8: Reeller Vektorraum mit unkonventionellen Verknüpfungsregeln [Bonus]

Punkte: (a)[1](M,Bonus); (b)[1](M,Bonus); (c)[1](E,Bonus)

Für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, sei $V_\mathbf{a} \equiv \{\mathbf{v_x}\}$ eine Menge, deren Elemente $\mathbf{v_x}$, indiziert durch zwei-dimensionale reelle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, die folgenden Rechenregeln erfüllen:

Addition:	$\boldsymbol{+}$:	$V_\mathbf{a} \times V_\mathbf{a} \to V_\mathbf{a}$,	$(\mathbf{v_x}, \mathbf{v_y}) \mapsto \mathbf{v_x} \boldsymbol{+} \mathbf{v_y} \equiv \mathbf{v}_{\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{a}}$
Multiplikation mit einem Skalar:	$\boldsymbol{\cdot}$:	$\mathbb{R} \times V_\mathbf{a} \to V_\mathbf{a}$,	$(\lambda, \mathbf{v_x}) \mapsto \lambda \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v_x} \equiv \mathbf{v}_{\lambda\mathbf{x}+f(\mathbf{a},\lambda)}$

Hier ist $f(\mathbf{a}, \lambda)$ eine in $\mathbf{a}$ und λ lineare Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass $V_\mathbf{a}$ mit der Addition $\boldsymbol{+}$ eine abelsche Gruppe ist und bestimmen Sie das neutrale Element sowie das Inverse von $\mathbf{v_x}$ bezüglich der Addition.

(b) Finden Sie die spezielle Form von f, so dass das Tripel $(V_\mathbf{a}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(c) Kann Ihre Konstruktion auf $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (wobei n eine positive, ganze Zahl ist) anstelle von $\mathbb{R}^2$ erweitert werden?

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 21]
