Fakultät für Physik
R: Rechenmethoden für Physiker, WiSe 2015/16
Dozent: Jan von Delft
Übungen: Benedikt Bruognolo, Dennis Schimmel, Frauke Schwarz, Lukas Weidinger

http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/15r/

Blatt 03.2: Vektorprodukt, Raumkurven, Linienintegrale

Ausgabe: Freitag, 30.10.15 Abgabe: Freitag, 06.11.15, 13:00 Zentralübung: 11.11.15
[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll

Beispielaufgabe 1: $1/(1-x^2)$**-Integrale mittels hyperbolischer Substitution [3]**
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M)

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\tanh(y)$ ('Tangens Hyperbolicus') und $\operatorname{sech}(y) = \frac{1}{\cosh(y)}$ ('Sekans Hyperbolicus') die folgenden Identitäten erfüllen:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\tanh(y) = \operatorname{sech}^2(y), \qquad 1 - \tanh^2(y) = \operatorname{sech}^2(y).$$

Deshalb empfiehlt sich bei Integralen, die $1 - x^2$ enthalten, die hyperbolische Substitution $x = \tanh(y)$, mit Umkehrfunktion $y = \operatorname{artanh}(x)$, denn $1 - x^2 = \operatorname{sech}^2(y)$.

Berechnen Sie das folgende Integral für $|z| < 1$; überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Berechnung von $\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}$.

(b) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x \, \frac{1}{1-x^2}$. $\big[$Kontrollergebnis: $I\big(\tfrac{3}{5}\big) = \ln 2.\big]$

Beispielaufgabe 2: Rechnen mit Vektoren [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E)

Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a} = (4,3,1)^T$ und $\mathbf{b} = (1,-1,1)^T$.

(a) Berechnen Sie $\|\mathbf{b}\|$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

(b) Zerlegen Sie $\mathbf{a}$ in einen Vektor $\mathbf{a}_\parallel$ parallel und einen Vektor $\mathbf{a}_\perp$ senkrecht zu $\mathbf{b}$.

(c) Berechnen Sie $\mathbf{a}_\parallel \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a}_\parallel \times \mathbf{b}$ und $\mathbf{a}_\perp \times \mathbf{b}$. Entsprechen die Ergebnisse der Erwartung?

Beispielaufgabe 3: Spatprodukt [2]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[1](E); (c)[0.5](E)

Diese Aufgabe illustriert einen wichtigen Bezug zwischen dem Spatprodukt und der Frage, ob drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind oder nicht.

(a) Berechnen Sie das Spatprodukt $S(y)$ von $\mathbf{v}_1 = (1,0,2)^T$, $\mathbf{v}_2 = (3,2,1)^T$ und $\mathbf{v}_3 = (-1,-2,y)^T$ als Funktion der Variablen y. $\big[$Kontrollergebnis: $S(1) = -4\,\big]$.

(b) Finden Sie durch Lösen der Vektorgleichung $\mathbf{v}_i a^i = \mathbf{0}$ denjenigen Wert von y für den $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ *nicht* linear unabhängig sind.

(c) Welchen Wert hat $S(y)$ für den in (b) gefundenen Wert von y? Interpretieren Sie das Ergebnis!

Beispielaufgabe 4: Grassmann-Identität (BAC-CAB) und Jacobi-Identität [5]
Punkte: (a)[2](M); (b)[1](E); (c)[2](M)

(a) Beweisen Sie die Grassmann (oder 'BAC-CAB') Identität für beliebige Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,.$$

Hinweis: Nutzen die Eigenschaft $\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ des Levi-Civita-Tensors.

(b) Beweisen Sie mittels der Grassmann-Identität die Jacobi-Identität:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

(c) Überprüfen Sie beide Identitäten explizit für $\mathbf{a} = (1,1,2)^T$, $\mathbf{b} = (3,2,0)^T$, $\mathbf{c} = (2,1,1)^T$, indem Sie alle in ihnen vorkommenden Terme separat berechnen.

Beispielaufgabe 5: Geschwindigkeit und Beschleunigung [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](E)

Gegeben sei die Raumkurve $\gamma = \{\mathbf{r}(t)\,|\,t \in [0, 2\pi/\omega]\}$, $\mathbf{r}(t) = (aC(t), S(t))^T \in \mathbb{R}^2$, mit $C(t) = \cos[\pi(1 - \cos\omega t)]$, $S(t) = \sin[\pi((1 - \cos\omega t)]$, und $0 < a, \omega \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie dazu den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{r}}(t)$. Lässt sich $\mathbf{r}(t)$ durch $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ ausdrücken?

(b) Können Sie die Kurve ohne den Parameter t durch eine Gleichung darstellen? Um welche Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie die Raumkurve für den Fall $a = 2$.

(c) Berechnen Sie $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$. Für welchen Wert von a gilt $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ für alle t?

Beispielaufgabe 6: Natürliche Parametrisierung einer Kurve [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[0.5](M); (c)[0.5](E)

Gegeben ist die Raumkurve $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^T \in \mathbb{R}^2$ für $t \in [0, 2\pi]$.

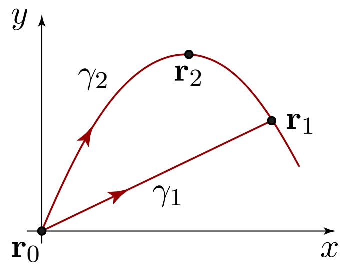
(a) Skizzieren Sie die Raumkurve qualitativ.

(b) Bestimmen Sie ihre Bogenlänge $s(t)$ im Zeitinterval $[0, t]$. [Kontrollergebnis: $s(2\pi) = 8$.]

(c) Geben Sie die natürliche Parametrisierung $\mathbf{r}_L(s)$ an. [Kontrollergebnis: $\mathbf{r}_L(4) = (\pi, 2)^T$.]

Beispielaufgabe 7: Linienintegral: Bergwanderung [3]
Punkte: [3](M)

Zwei Wanderer wollen vom Punkt $\mathbf{r}_0 = (0,\,0)^T$ im Tal zu einer Hütte am Punkt $\mathbf{r}_1 = (3,\,3a)^T$ wandern. Wanderer 1 wählt den geraden Weg zwischen Tal und Hütte, γ_1. Wanderer 2 wählt einen parabolischen Weg, γ_2, über den Gipfel bei $\mathbf{r}_2 = (2,\,4a)^T$, dem Scheitel der Parabel (vgl. Skizze). Auf sie wirkt die Schwerkraft $\mathbf{F}_g = -10\,\mathbf{e}_y$, sowie eine höhenabhängige Windkraft, $\mathbf{F}_w = -y^2\,\mathbf{e}_x$.



Finden Sie die von den Wanderern entlang γ_1 und γ_2 verrichtete Arbeit, $W[\gamma_i] = -\int_{\gamma_i} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}$, als Funktion des Parameters a. [Kontrollergebnisse: für $a = 1$ gilt $W[\gamma_1] = 39$, $W[\gamma_2] = 303/5$.]

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 21]

Hausaufgabe 1: $1/(1+x^2)$-Integrale mittels trigonometrischer Substitution [5]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M); (c)[2](M)

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\tan(y)$ und $\sec(y) = \frac{1}{\cos(y)}$ ('Sekans') die folgenden Identitäten erfüllen:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\tan(y) = \sec^2(y), \qquad 1 + \tan^2(y) = \sec^2(y).$$

Deshalb empfiehlt sich bei Integralen, die $1 + x^2$ enthalten, die trigonometrische Substitution $x = \tan(y)$, mit Umkehrfunktion $y = \arctan(x)$, denn $1 + x^2 = \sec^2(y)$.

Berechnen Sie folgende Integrale; überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Berechnung von $\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}$.

(b) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x\,\frac{1}{1+x^2}$. [Kontrollergebnis: $I(\infty) = \frac{\pi}{2}$.]

(c) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x\,\frac{1}{(1+x^2)^3}$. [Kontrollergebnis: $I(1) = \frac{1}{32}(8 + 3\pi)$.]

Hausaufgabe 2: Rechnen mit Vektoren [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E)

Seien die Vektoren $\mathbf{a} = (1, 0, 3)^T$ und $\mathbf{b} = (-5, 2, 1)^T$ gegeben.

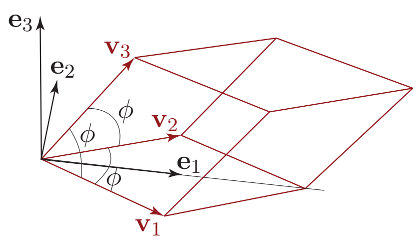
(a) Berechnen Sie $\|\mathbf{b}\|$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

(b) Zerlegen Sie $\mathbf{a}$ in einen Vektor $\mathbf{a}_\parallel$ parallel and einen Vektor $\mathbf{a}_\perp$ senkrecht zu $\mathbf{b}$.

(c) Berechnen Sie $\mathbf{a}_\parallel\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_\perp\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_\parallel\times\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}_\perp\times\mathbf{b}$. Entsprechen die Ergebnisse ihren Erwartungen?

Hausaufgabe 3: Spatprodukt [3]
Punkte: [3](M)

Berechnen Sie das Volumen $V(\phi)$ eines Parallelepipeds, das durch drei Einheitsvektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ aufgespannt wird, die paarweise jeweils den Winkel ϕ einschließen (mit $0 \le \phi \le \frac{2}{3}\pi$; warum ist diese Einschränkung nötig?).
Kontrollergebnisse: (i) Was erwarten Sie für $V(\frac{\pi}{2})$ bzw. $V(\frac{2}{3}\pi)$? (ii): $V(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Hinweis: Wählen Sie die Orientierung des Parallelepipeds so, dass $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ beide in der durch $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ aufgespannten Ebene liegen und $\mathbf{e}_1$ den Winkel zwischen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ halbiert (siehe Skizze).

Hausaufgabe 4: Lagrange-Identität [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E)

(a) Beweisen Sie die Lagrange-Identität für beliebige Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,.$$

Hinweis: Nutzen Sie den Levi-Civita-Tensor!

(b) Berechnen Sie [mittels (a)] den Betrag $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ und drücken Sie das Ergebnis aus durch $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ und den Winkel φ, den die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ einschliessen.

(c) Überprüfen Sie die Lagrange-Identität explizit für $\mathbf{a} = (1, 2, -1)^T$, $\mathbf{b} = (1, 2, 1)^T$, $\mathbf{c} = (-3, 0, 1)^T$, $\mathbf{d} = (0, 1, -2)^T$, indem Sie alle Terme darin separat berechnen.

Hausaufgabe 5: Kurvengeschwindigkeit und Beschleunigung [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[0.5](E); (c)[0.5](E)

Gegeben sei die Raumkurve $\gamma = \{\mathbf{r}(t)\,|\,t \in [-\infty, \infty]\}$, $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^{-t^3}, a\mathrm{e}^{t^3})^T \in \mathbb{R}^2$, mit $0 < a \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie dazu den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{r}}(t)$. Lässt sich $\mathbf{r}(t)$ durch $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ ausdrücken?

(b) Können Sie die Kurve ohne den Parameter t durch eine Gleichung darstellen? Um welche Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie die Raumkurve für den Fall $a = 2$.

(c) Berechnen Sie $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$. Finden Sie die Zeit $t(a)$, bei der $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ gilt? [Kontrollergebnis: $t(\mathrm{e}^{-2}) = 1$.

Hausaufgabe 6: Natürliche Parametrisierung einer Kurve [4]
Punkte: (a)[1](M); (b)[0.5](E); (c)[0.5](E); (d)[1](E); (e)[1](E)

Gegeben sei die Raumkurve $\gamma = \{\mathbf{r}(t)\,|\,t \in [0, \tau]\}$, $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^{ct}(\cos\omega t, \sin\omega t)^T \;\in \mathbb{R}^2$, mit $c \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Raumkurve für den Fall $\tau = 8\pi/\omega$ und $c = 1/\tau$. [Diese Angaben gelten nur für Teilaufgabe (a), nicht für (b-f).]

(b) Berechnen Sie den Betrag der Kurvengeschwindigkeit, $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$.

(c) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ im Zeitintervall $[0, t]$.

(d) Bestimmen Sie die natürliche Parametrisierung $\mathbf{r}_L(s)$.

(e) Überprüfen Sie explizit, dass $\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_L}{\mathrm{d}s}\right\| = 1$ gilt.

[Kontrollergebnisse für $c = \omega = \tau = 1$: (b) $\sqrt{2}\mathrm{e}^t$, (c) $\sqrt{2}(\mathrm{e}^t - 1)$, (d) $\mathbf{r}_L(s) = [s/\sqrt{2} + 1]\left(\cos[\ln(s/\sqrt{2}+1)], \sin[\ln(s/\sqrt{2}+1)]\right)^T$.]

Hausaufgabe 7: Linienintegral in kartesischen Koordinaten [4]
Punkte: (a)[2](M); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1](M,Bonus)

Sei $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x^2, z, y)^T$ ein dreidimensionales Vektorfeld in kartesischen Koordinaten, mit $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$. Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$ entlang folgender Wege von $\mathbf{r}_0 \equiv (0,0,0)^T$ nach $\mathbf{r}_1 \equiv (0,2,-1)^T$:

(a) $\gamma_a = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ist der zusammengesetzte Weg aus γ_1, der geraden Linie von $\mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}_2 \equiv (1,1,1)^T$, und γ_2, der geraden Linie von $\mathbf{r}_2$ nach $\mathbf{r}_1$.

(b) γ_b ist parametrisiert durch $\mathbf{r}(t) = (\sin(\pi t), 2t^{1/2}, -t^2)^T$, mit $0 \leq t \leq 1$.

(c) γ_c ist eine in der y-z-Ebene liegende Parabel der Form $z(y) = y^2 - \frac{5}{2}y$.

Hinweis: die Ergebnisse von (a), (b) und (c) sind alle gleich. Optionale Frage (d): Warum ist das so? [Die Antwort setzt Stoff der Vorlesungen 7 und 8 voraus.]

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 24]
