Blatt 05.2: Krummlinige Koordinaten

Ausgabe: Freitag, 13.11.15 Abgabe: Freitag, 20.11.15, 13:00 Zentralübung: 25.11.15
[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll

Beispielaufgabe 1: Flächenintegration mit kartesischen Koordinaten [2]
Punkte: [2](M)

Berechnen Sie das Flächenintegral $I(a) = \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = xy$ über dem Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq 1;\ 1 \leq x \leq a - y\}$, mit $2 \leq a \in \mathbb{R}$. [Kontrollergebnis: $I(2) = \frac{5}{24}$].

Beispielaufgabe 2: Flächenberechnung mit kartesischen Koordinaten [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](M)

Gegeben seien die Kurve $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, b(1 - t/a))^T$ sowie die geschlossene Kurve $\gamma_2 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (a\cos t, b\sin t)^T$ in kartesischen Koordinaten, mit $0 < a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurven γ_1 und γ_2.

(b) Berechnen Sie die von γ_2 umschlossene Fläche $S(a,b)$. [Kontrollergebnis: $S(1,1) = \pi$.]

(c) Die Kurve γ_1 teilt die von γ_2 umschlossene Fläche in zwei Teile. Bestimmen sie die Fläche $A(a,b)$ des kleineren Teilstücks mittels Berechnung eines Flächenintegrals. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer geometrischen Überlegung.

Beispielaufgabe 3: Flächenintegral: Volumen einer Pyramide [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M)

Betrachten Sie die von der xy-Ebene, der yz-Ebene, der xz-Ebene, und der Ebene $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = c(1 - x/a - y/b\}$ eingeschlossene Pyramide, mit $0 < a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Machen Sie eine qualitative Skizze der Pyramide. Finden Sie ihr Volumen $V(a,b,c)$ mittels geometrischen Überlegungen. [Kontrollergebnis: $V(1,1,1) = \frac{1}{6}$.]

(b) Berechnen Sie $V(a,b,c)$ indem Sie Höhe $h(x,y)$ der Pyramide über ihre Grundfläche in der xy-Ebene integrieren.

Beispielaufgabe 4: Explizite Koordinatenumrechnung [3]
Punkte: [3](E)

Die kartesischen Koordinaten (x,y,z) von drei Punkten seien P_1: $(3,-2,4)$, P_2: $(1,1,1)$ und P_3: $(-3,0,-2)$. Wie lauten die Zylinderkoordinaten (ρ,ϕ,z) und die Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ) dieser drei Punkte? (Winkel sind in Radiant anzugeben.)

Beispielaufgabe 5: Zylinderkoordinaten: Geschwindigkeit, kinetische Energie, Drehimpuls [5]
Punkte: (a)[2](E); (b)[1](E); (c)[1](E); (d)[0,5](E); (e)[0,5](E)

Der Bezug zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten ist gegeben durch $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, $z = z$, mit $\rho \in [0,\infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, \infty)$.
Lokale Basis: Konstruieren Sie das lokale Dreibein $\mathbf{e}_{y_i}$, und zeigen Sie explizit, dass
(a) $\mathbf{e}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_j} = \delta_{ij}$ und (b) $\mathbf{e}_{y_i} \times \mathbf{e}_{y_j} = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_{y_k}$.
Physikalische Größen: Zeigen Sie, dass in Zylinderkoordinaten (c) der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}$, (d) die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ und (e) der Drehimpulsvektor $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\phi\,\mathbf{e}_\phi + \dot z\,\mathbf{e}_z, \qquad T = \tfrac{1}{2}m\big[\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 + \dot z^2\big], \\ \mathbf{L} &= m\big[-z\rho\dot\phi\,\mathbf{e}_\rho + (z\dot\rho - \rho\dot z)\,\mathbf{e}_\phi + \rho^2\dot\phi\,\mathbf{e}_z\big]\,. \end{aligned}$$

Beispielaufgabe 6: Polarkoordinaten: Linienintegral entlang Spirale [2]
Punkte: (a)[2](E); (b)[1](E)

Die Kurve $\gamma_S = \{\mathbf{r}(\rho,\phi) \in \mathbb{R}^2 |\ \rho = R + \frac{1}{2\pi}\phi\Delta,\ \phi \in [0, 2\pi]\}$, mit $0 < R, \Delta \in \mathbb{R}$, beschreibt einen Spiralweg in zwei Dimensionen, parametrisiert mittels Polarkoordinaten.

(a) Skizzieren Sie den Spiralweg γ_S und berechnen Sie das Linienintegral $W_1[\gamma_S] = \int_{\gamma_S} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}_1$ des Feldes $\mathbf{F}_1 = \mathbf{e}_\phi$ entlang γ_S. [Kontrollergebnis: für $R = \Delta = 1$ gilt $W_1[\gamma] = 3\pi$.]

(b) Berechnen Sie das Linienintegral $W_2[\gamma] = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}_2$ des Feldes $\mathbf{F}_2 = \mathbf{e}_x$ entlang des geraden Wegs γ_G vom Punkt $(R, 0)^T$ zum Punkt $(R + \Delta, 0)^T$, sowie entlang des Spiralwegs γ_S. Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Ergebnissen? Erkläutern Sie!

Beispielaufgabe 7: Linienintegral in Kugelkoordinaten: Satellit auf Umlaufbahn [5]
Punkte: (a)[1,5](E); (b)[1](E); (c)[0,5](E); (d)[2](M)

Ein Satellit fliege auf einer die Nord-Süd-Achse umkreisenden Bahn γ von einem Punkt über dem Nordpol zu einem Punkt über dem Südpol. In Kugelkoordinaten ist die Bahn beschrieben durch $r(t) = r_0$, $\theta(t) = \omega_1 t$, $\phi(t) = \omega_2 t$, mit $t \in [0, \pi/\omega_1]$. Dabei übe die Erdatmosphäre aufgrund der Erdrotation eine Windkraft $\mathbf{F} = -F_0 \sin\theta\,\mathbf{e}_\phi$ auf ihn aus.

(a) Machen Sie eine qualitative Skizze der Bahn, für $\omega_2 = 20\omega_1$. Wie oft windet sich die Spirale um die Nord-Süd-Achse?

(b) Wie lautet die Kurvengeschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ in Kugelkoordinaten?

(c) Geben Sie die Länge $L[\gamma]$ der Bahn in Form eines Integrals an. (Sie brauchen es nicht zu lösen.)

(d) Berechnen Sie mittels des Linieningetrals $W[\gamma] = \int_\gamma d\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}$ die Arbeit, die die Windkraft entlang der Bahn geleistet hat. [Kontrollergebnis: für $F_0 = r_0 = \omega_1 = \omega_2 = 1$ gilt $W[\gamma] = -\frac{\pi}{2}$.]

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 23]

Hausaufgabe 1: Flächenintegration mit kartesischen Koordinaten [2]
Punkte: [2](M)

Berechnen Sie das Flächenintegral $I(a) = \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = y^2 + x^2$ über dem Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le \mathrm{e}^{ax}\}$, mit $a \in \mathbb{R}$. *Hinweis:* für $\int \mathrm{d}x\, x^2 \mathrm{e}^{ax}$, zwei mal partiell integrieren! [Kontrollergebnis: $I(1) = \mathrm{e} + (\mathrm{e}^3 - 19)/9$.]

Hausaufgabe 2: Flächenberechnung mit kartesischen Koordinaten [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M)

Gegeben seien die Kurven $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto ((t-2a)^2 + 2a^2, t)^T$ sowie $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (2(t-a)^2, t)^T$ in kartesischen Koordinaten, mit $0 < a \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurven γ_1 und γ_2.

(b) Berechnen Sie die endliche von diesen beiden Kurven eingeschlossene Fläche $S(a)$. Kontrollergebnis: $S(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$.

Hausaufgabe 3: Flächenintegration: Volumen eines ellipsförmigen Zeltes [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M)

Ein Zelt hat einen flachen, ellipsförmigen Boden, beschrieben durch die Ungleichung $(x/a)^2 + (y/b)^2 \le 1$; die Form des Zeltdaches wird beschrieben durch die Höhenfunktion $h(x,y) = c\big[1 - (x/a)^2 - (y/b)^2\big]$.

(a) Skizzieren Sie die Form des Zeltes qualitativ, für $a = 2$, $b = 1$ und $c = 2$.

(b) Berechnen Sie das Volumen V des Zeltes als Flächenintegral der Höhenfunktion. [Kontrollergebnis: für $a = b = c = 1$ ist $V = \pi/2$.]

Hinweis: Zeigen Sie mittels einer trigonometrischen Substitution, dass $\int_0^1 \mathrm{d}x\,(1-x^2)^{3/2} = \frac{3}{16}\pi$.

Hausaufgabe 4: Koordinatentransformation [2]
Punkte: [2](E)

Der Punkt P_1 habe Kugelkoordinaten $(r,\theta,\phi) = (2, \pi/4, 3\pi/4)$. Wie lauten seine kartesischen und Zylinderkoordinaten, (x,y,z) bzw. (ρ,ϕ,z)? Der Punkt P_2 habe Zylinderkoordinaten $(\rho,\phi,z) = (4, \pi/2, 1)$. Wie lauten seine kartesischen und Kugelkoordinaten? (Winkel sind in Radiant anzugeben.)

Hausaufgabe 5: Kugelkoordinaten: Geschwindigkeit, kinetische Energie, Drehimpuls [5]

Punkte: (a)[2](E); (b)[1](E); (c)[1](E); (d)[0,5](E); (e)[0,5](E)

Der Bezug zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten ist gegeben durch $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, mit $r \in [0,\infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0,\pi]$.
Lokale Basis: Konstruieren Sie das lokale Dreibein $\mathbf{e}_{y_i}$, und zeigen Sie explizit, dass
(a) $\mathbf{e}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_j} = \delta_{ij}$ und (b) $\mathbf{e}_{y_i} \times \mathbf{e}_{y_j} = \varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_{y_k}$.
Physikalische Größen: Zeigen Sie, dass in Kugelkoordinaten (c) der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$, (d) die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ und (e) der Drehimpulsvektor $\mathbf{L} = m(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$ wie folgt lauten:

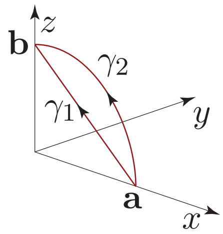
$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi, \quad T = \tfrac{1}{2}m\big[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\big], \quad \mathbf{L} = mr^2\big[\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\phi - \dot{\phi}\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta\big].$$

Hausaufgabe 6: Linienintegral in kartesischen und Kugelkoordinaten [3]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E)

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{F} = f(0,0,z)^T$, mit $f \in \mathbb{R}$. Berechen Sie explizit das Linienintegral $W[\gamma] = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$ von $\mathbf{a} = (1,0,0)^T$ nach $\mathbf{b} = (0,0,1)^T$ entlang den folgenden zwei Wegen:

(a) γ_1: eine gerade Linie. [Kontrollergebnis: Für $f = 2$ ist $W[\gamma_1] = 1$.]



(b) γ_2: ein Segment eines Kreises mit Radius $R = 1$ um den Ursprung. Nutzen Sie Kugelkoordinaten. [Kontrollergebnis: Für $f = 3$ ist $W[\gamma_2] = \frac{3}{2}$.]

(c) Wie hängen die Ergebnisse in (a) und (b) zusammen? Erläutern Sie!

Hausaufgabe 7: Linienintegral in Zylinderkoordinaten: Badewannenabfluss [5]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[2](M)

Eine Seifenblase treibt entlang einer spiralförmigen Bahn γ auf das Abflussloch der Badewanne zu. In Zylinderkoordinaten ist die Bahn beschrieben durch $\rho(t) = \rho_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$, $\phi(t) = \omega t$, $z(t) = z_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$, mit $\rho_0 > \rho_\mathrm{a}$ und $t \in [0, t_\mathrm{a}]$, wobei ρ_a der Radius des Abflusslochs ist, und $t_\mathrm{a} = \tau \ln(\rho_0/\rho_\mathrm{a})$ die Zeit, nach der das Abflußloch erreicht wird.

(a) Machen Sie eine qualitative Skizze der Bahn (z.B. für $\omega = 6\pi/\tau$ und $\rho_0 = 10\rho_\mathrm{A}$).

(b) Wie lautet die Kurvengeschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ in Zylinderkoordinaten? Was ist der Betrag der Endgeschwindigkeit, $v_\mathrm{a} = \|\mathbf{v}(t_\mathrm{a})\|$?

(c) Zeigen Sie, dass die Länge der Bahn durch $L[\gamma] = \tau v_\mathrm{a} (\rho_0/\rho_\mathrm{a} - 1)$ gegeben ist.

(d) Berechnen Sie mittels des Linieningetrals $W[\gamma] = \int_\gamma d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$ die Arbeit, die die Schwerkraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$ entlang der Bahn geleistet hat. Interpretieren Sie das Ergebnis für $W[\gamma]$ physikalisch!

[Kontrollergebnisse für $\tau = 2/\omega$, $z_0 = 2\rho_0$ und $\rho_\mathrm{a} = \rho_0/3$: (b) $v_\mathrm{a} = \rho_0/\tau$, (c) $L = 2\rho_0$, (d) $W[\gamma] = mg\rho_0 4/3$.]

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 23]
