http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/15r/

Blatt 09.3: Reihenentwicklung

Ausgabe: Freitag, 11.12.15 Abgabe: Freitag, 18.12.15, 13:00 Zentralübung: 23.12.15
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Beispielaufgaben: {T}: wird im Tutorien besprochen; {S}: Selbststudium.

Beispielaufgabe 1: Sinus- und Cosinus-Additionstheoreme [1]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E). (S)

Beweisen Sie die Sinus- und Cosinus-Additionstheoreme:

(a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,

(b) $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$.

Hinweis: Nutzen Sie die Euler-de Moivre-Identität auf beiden Seiten von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$.

Beispielaufgabe 2: Taylor-Reihen [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M). [T]

Entwickeln Sie folgende Funktionen. Dabei können Sie wählen, ob Sie die entsprechenden Ableitungen berechnen um die Koeffizienten der Taylorreihe zu bestimmen, oder ob Sie die bekannten Entwicklungen von $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\frac{1}{1-x}$ und $\ln(1+x)$ einsetzen.

(a) $f(x) = \frac{1}{1-\sin(x)}$ um $x = 0$, bis einschließlich 4. Ordnung.

(b) $g(x) = \sin(\ln(x))$ um $x = 1$, bis einschließlich 2. Ordnung.

(c) $h(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$ um $x = 0$, bis einschließlich 2. Ordnung.

Kontrollergebnisse: der Term höchster erbetener Ordnung ist: (a) $\frac{2}{3}x^4$, (b) $-\frac{1}{2}(x-1)^2$, (c) $-\mathrm{e}\frac{1}{2}x^2$.

Beispielaufgabe 3: Reihenentwicklung zum iterativen Lösen einer Gleichung [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M). [T]

(a) Lösen Sie die quadratische Gleichung $y^2 - 1 = 2\varepsilon y$ iterativ bis einschließlich $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ für kleine ε, stellen Sie y also dar als $y = y_0 + y_1\varepsilon + \frac{1}{2!}y_2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$. *Hinweis:* Beachten Sie, dass die Gleichung mehrere Lösungen haben kann. [Kontrollergebnis: $y_2 = \pm 1$.]

(b) Finden Sie anschließend die exakten Lösungen dieser Gleichung und berechnen Sie die ersten drei Terme der Taylorentwicklung dieser exakten Lösungen. Vergewissern Sie sich, dass die Entwicklungen mit den iterativen Lösungen übereinstimmen.

Beispielaufgabe 4: Taylor-Reihe für Umkehrfunktion [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M). [S]

Lernziel: Berechnen der Reihenentwicklung einer Umkehrfunktion durch das iterative Lösen einer Gleichung.
Die Umkehrfunktion $g(x)$ der Funktion $f(x)$ erfüllt die definierende Gleichung $f(g(x)) = x$. Die Reihenentwicklung der Umkehrfunktion um den Punkt x_0, von der Form $g(x_0 + x) \equiv y(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^{(n)}(0) x^n$, läßt sich berechnen durch iteratives Lösen der Gleichung $f(y(x)) = x_0 + x$ nach $y(x)$. Berechnen Sie auf diese Weise die Reihenentwicklungen der folgenden Funktionen um $x = 0$, bis einschließlich 2. Ordnung in x:

(a) $\ln(1 + x)$, (b) 2^x.

[Kontrollergebnisse: der Term höchster erbetener Ordnung ist jeweils: (a) $-\frac{1}{2}x^2$, (b) $\frac{1}{2}\ln^2(2)x^2$.]

Beispielaufgabe 5: Taylor-Entwicklung in 2 Dimensionen [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M). [S]

Geben Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion $g(x, y) = \mathrm{e}^x \cos(x + 2y)$ in x und y um den Punkt $(x, y) = (0, 0)$ an. Berechnen Sie explizit alle Terme bis einschließlich zweiter Ordnung,

(a) durch Ausmultiplizieren der Reihenentwicklungen der Exponential- und Cosinus-Funktionen;

(b) mittels der Formel für die Taylor-Reihe einer Funktion von zwei Variablen.

[Kontrollergebnisse: der gemischte Term zweiter Ordnung ist jeweils: (a) $-2xy$, (b) $-2xy$.]

Beispielaufgabe 6: Lagrange-Multiplikatoren [2]
Punkte: [2](M). [T]

Finden Sie das Extremum der Funktion $j(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2$ mit den Nebenbedingungen $x + y + z = 1$ und $x - y + 2z = 2$.

Beispielaufgabe 7: $1/(1 + x^2)$-Integrale mittels Partialbruchzerlegung [3]
Punkte: (a)[2](A); (b)[1](M). [S]

(a) Bestimmen Sie das Integral $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x \frac{1}{1 + x^2}$ mittels einer Partialbruchzerlegung.

(b) Alternativ lässt sich dieses Integral auch mittels der trigonometrischen Substitution $y = \tan(x)$ lösen, mit dem Ergebnis $I(z) = \arctan(z)$. Zeigen Sie mittels einer expliziten Umformung, dass Ihr Ergebnis aus (a) hiermit übereinstimmt.

Beispielaufgabe 8: Funktionen von Matrizen [4]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1.5](M). [T]

Der Zweck dieser Aufgabe ist, Erfahrung mit dem Begriff "Funktion einer Matrix" zu sammeln. Sei f eine analytische Funktion, mit Taylor-Reihe $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l$, und $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$ eine quadratische Matrix, dann ist $f(A)$ definiert als $f(A) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l A^l$, mit $A^0 = \mathbb{1}$.

(a) Eine Matrix A heisst 'nilpotent', falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $A^l = 0$. Dann endet die Taylor-Reihe von $f(A)$ nach l Termen. Beispiel: Berechnen Sie e^A für $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[Ergebniskontrolle: falls $\theta = -\frac{\pi}{6}$, dann $\mathrm{e}^A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.]

(b) Falls $A^2 \propto \mathbb{1}$, gilt $A^{2m} \propto \mathbb{1}$ und $A^{2m+1} \propto A$, und die Taylor-Reihe von $f(A)$ hat die Form $f_0\mathbb{1} + f_1 A$. Beispiel: Berechnen Sie e^A explizit für $A = \theta\tilde{\sigma}$, mit $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Falls A diagonalisierbar ist, lässt sich $f(A)$ durch dessen Eigenwerte ausdrücken. Sei S die Ähnlichkeitstransformation die A diagonalisiert, mit Diagonalmatrix $D = S^{-1}AS$ und Diagonalelementen $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$f(A) = Sf(D)S^{-1} = S \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} S^{-1} .$$

Anmerkung: Hier sind die beiden Gleichheitszeichen unabhängig voneinander zu zeigen.

(d) Berechnen Sie die Matrixfunktion e^A aus (b) nun mittels Diagonalisierung, wie in (c).

Beispielaufgabe 9: Exponentialdarstellung der Rotationsmatrix in 2 Dimensionen [1]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E). [T]

Die Matrix $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ eine Rotation um den Winkel θ in $\mathbb{R}^2$. Finden Sie mittels folgender 'unendlicher Produktzerlegung' eine Exponentialdarstellung dieser Matrix:

(a) Eine Rotation um den Winkel θ kann als Folge von m Rotationen, jede um den Winkel θ/m, dargestellt werden: $R_\theta = [R_{(\theta/m)}]^m$. Für $m \to \infty$ geht $\theta/m \to 0$, also kann die Matrix $R_{(\theta/m)}$ kann als $R_{(\theta/m)} = \mathbb{1} + (\theta/m)\tilde{\sigma} + \mathcal{O}\big((\theta/m)^2\big)$ geschrieben werden. Finden Sie die Matrix $\tilde{\sigma}$.

(b) Zeigen Sie nun mittels der Identität $\lim_{m\to\infty}[1 + x/m]^m = \mathrm{e}^x$, dass $R_\theta = \mathrm{e}^{\theta\tilde{\sigma}}$.

Anmerkung: Begründung dieser Identität: Es gilt $\mathrm{e}^x = [\mathrm{e}^{x/m}]^m = [1 + x/m + \mathcal{O}\big((x/m)^2\big)]^m$. Im Limes $m \to \infty$ können die Terme $\mathcal{O}\big((x/m)^2\big)$ vernachlässt werden.

[Ergebnissekontrolle: Reproduziert die Taylor-Entwicklung von $\mathrm{e}^{\theta\tilde{\sigma}}$ die eingangs angegebene Matrix für R_θ?]

Anmerkung: Das hier illustrierte Verfahren, mit dem eine unendliche Folge von identischen, infinitesimal kleinen Transformationen exponentiert wird, ist ein Grundstein der Theorie der 'Lie-Gruppen', deren Elemente mit kontinuierlichen Parametern (hier der Winkel θ) assoziert sind. In diesem Zusammenhang wird obige Matrix $\tilde{\sigma}$ der 'Generator' der Rotation genannt.

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 20]

Hausaufgabe 1: Sinus- und Cosinus-Potenzen [1]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E)

Nutzen Sie die Euler-de Moivre-Identität, um folgende Identitäten zu beweisen:

(a) $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a)\,, \qquad \sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2a)\,.$

(b) $\cos^3 a = \frac{3}{4}\cos a + \frac{1}{4}\cos(3a)\,, \qquad \sin^3 a = \frac{3}{4}\sin a - \frac{1}{4}\sin(3a)\,.$

Hausaufgabe 2: Taylor-Reihen [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M)

Entwickeln Sie folgende Funktionen. Dabei können Sie wählen, ob Sie die entsprechenden Ableitungen berechnen um die Koeffizienten der Taylorreihe zu bestimmen, oder ob Sie die bekannten Entwicklungen von $\cos(x)$, $\frac{1}{1-x}$, e^x und $\ln(1+x)$ einsetzen.

(a) $f(x) = \frac{\cos(x)}{1-x}$ um $x = 0$ bis einschließlich dritter Ordnung.

(b) $g(x) = \mathrm{e}^{\cos(x^2+x)}$ um $x = 0$ bis einschließlich dritter Ordnung.

(c) $h(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(x)$ um $x = 1$ bis einschließlich dritter Ordnung.

[Kontrollergebnisse: der Term höchster erbetener Ordnung ist jeweils: (a) $\frac{1}{2}x^3$, (b) $-\mathrm{e}\,x^3$, (c) $\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-1}(x-1)^3$.]

Hausaufgabe 3: Reihenentwicklung zum iterativen Lösen einer Gleichung [2]
Punkte: [2](M)

Eine reelle und analytische Funktion $f(x)$ erfülle für $|x| \ll 1$ folgende Gleichung:

$$\ln\left[(x+1)^2\right] + \mathrm{e}^{y(x)} = 1 - y(x)\ .$$

Bestimmen Sie $y(x)$ iterativ bis einschließlich $\mathcal{O}(x^2)$, mittels einer Reihenentwicklung der Form $y(x) = y_0 + y_1 x + \frac{1}{2!}y_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3)$. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass die Lösung die Eigenschaft $y(0) = 0$ hat. [Kontrollergebnis: $y_2 = \frac{1}{2}$.]

Hausaufgabe 4: Taylor-Reihe für Umkehrfunktion [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M)

Berechnen Sie die Reihenentwicklung von $\arcsin(x)$ um $x = 0$, bis einschließlich 3. Ordnung, auf den folgenden zwei alternativen Lösungswegen:

(a) Bestimmen Sie $\arcsin(x) \equiv y(x)$ durch iteratives Lösen der Gleichung $\sin[y(x)] = x$.

(b) Nutzen Sie, ausgehend von der Identität arcsin $(\sin(y)) = y$, die bekannte Reihenentwicklung für $\sin(y)$ sowie den Ansatz $\arcsin(x) = c_1 x^1 + c_3 x^3 + \mathcal{O}(x^5)$, und bestimmen Sie c_1 und c_3 mittels Koeffizientenvergleich. [Warum kommen nur ungerade Potenzen vor?]

Lernziel: realisieren, dass unterschiedliche Lösungswege unterschiedlich aufwendig sein können!
[Kontrollergebnis: $c_3 = \frac{1}{6}$.]

Hausaufgabe 5: Taylorentwicklung in mehreren Dimensionen [2]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[1.5](M)

Berechnen Sie für folgende Funktionen die Taylorentwicklung in x und y um den Punkt $(x, y) = (0, 0)$, bis einschließlich zweiter Ordnung:

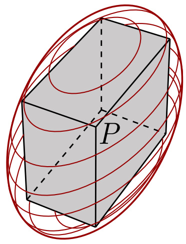
(a) $f(x, y) = e^{-(x+y)^2}$, (b) $g(x, y) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1+xy}}$.

[Kontrollergebnisse: der gemischte Term zweiter Ordnung ist jeweils: (a) $-2xy$, (b) $-\frac{1}{2}xy$.]

Hausaufgabe 6: Lagrange-Multiplikatoren [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M)

(a) Ein Hersteller möchte sein Produkt in einer rechteckigen Schachtel möglichst materialsparend verpacken, indem er ihre Oberfläche O bei vorgegebenem Volumen V minimiert. Bestimmen Sie mittels einer Extremalrechnung die Seitenlängen x, y, und z und die minimale Oberfläche $O_{\min}$ der Schachtel, ausgedrückt durch V. [Ergebniskontrolle: falls $V = \frac{1}{8}\mathrm{m}^3$, dann $A = \frac{3}{2}\mathrm{m}^2$.]

(b) Ein Ellipsoid sei definiert durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Betrachten Sie einen Quader, dessen Eckpunkte auf dem Ellipsoid liegen und dessen Kanten parallel zu den Symmetrieachsen des Ellipsoids verlaufen. Wie ist der Eckpunkt $P = (x_p, y_p, z_p)^T$ des Quaders, der im positiven Quadranten liegt ($x_p > 0$, $y_p > 0$, $z_p > 0$), zu wählen, damit das Volumen des Quaders maximal wird? Was ist der Wert des maximalen Volumens?



Hinweis: Maximieren Sie hierzu das Volumen $V(x, y, z) = 8\,xyz$ des Quaders mit Eckpunkt $(x, y, z)^T$, unter der Nebenbedingung, dass dieser Punkt auf dem Ellipsoid liegt.
[Kontrollergebnis: falls $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = \sqrt{3}$, dann $V_{\max} = 4$.]

Hausaufgabe 7: $1/(1-x^2)$-Integrale mittels Partialbruchzerlegung [3]
Punkte: (a)[2](A); (b)[1](M)

(a) Bestimmen Sie das Integral $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x \frac{1}{1-x^2}$ mittels einer Partialbruchzerlegung.

(b) Alternativ lässt sich dieses Integral auch mittels der hyperbolischen Substitution $y = \tanh(x)$ lösen, mit dem Ergebnis $I(z) = \operatorname{artanh}(z)$. Zeigen Sie mittels einer expliziten Umformung, dass Ihr Ergebnis aus (a) hiermit übereinstimmt.

Hausaufgabe 8: Funktionen von Matrizen [3]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[1](E); (c)[1.5](M); (d)[1](A,Bonus).

Drücken Sie jede der folgenden Matrixfunktionen explizit durch eine Matrix aus:

(a) e^A, mit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) e^B, mit $B = b\sigma_1$ und $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mittels der Taylor-Reihe der Exponentialfunktion.

[Ergebniskontrolle: falls $b = \ln 2$, dann $\mathrm{e}^A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.]

(c) Dieselbe Funktion wie in (b), diesmal mittels Diagonalisierung von B.

(d) e^C, mit $C = \mathrm{i}\theta\,\Omega$, wobei $\Omega = n_j S_j$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ ein Einheitsvektor ist ($\|\mathbf{n}\| = 1$), und S_j die Spin-$\frac{1}{2}$-Matrizen sind: $S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $S_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst Ω^2 (dabei ist die Eigenschaft $S_i S_j + S_j S_i = \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbb{1}$ der Spin-$\frac{1}{2}$-Matrizen nützlich), und nutzen Sie dann die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion.
[Ergebniskontrolle: falls $\theta = -\pi/2$ und $n_1 = -n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dann $\mathrm{e}^C = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$.]

Anmerkung: Die Exponentialform e^C ist eine Darstellung von SU(2)-Transformationen, die Gruppe aller speziellen, unitären Transformationen in $\mathbb{C}^2$. Ihre Elemente werden durch drei kontinuierliche reelle Parameter charakterisiert (hier θ, n_1 und n_2, mit $n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$). Die S_j-Matrizen sind 'Generatoren' dieser Transformationen; sie erfüllen die SU(2)-Algebra, d.h. ihre Kommutatoren liefern $[S_i, S_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} S_k$.

Hausaufgabe 9: Exponentialdarstellung der Rotationsmatrix in 3 Dimensionen [3]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](M); (c)[1](M); (d)[1](A)

In $\mathbb{R}^3$ wird eine Rotation mit Winkel θ um eine Drehachse, deren Richtung durch den Einheitsvektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ gegeben ist, durch eine 3×3-Matrix dargestellt, mit Matrixelementen:

$$(R_\theta(\mathbf{n}))_{ij} = \delta_{ij} \cos\theta + n_i n_j (1 - \cos\theta) - \epsilon_{ijk}\, n_k \sin\theta \qquad (\epsilon_{ijk} = \text{Levi-Civita-Tensor})\,. \tag{1}$$

Ziel der folgenden Schritte ist es, eine Begründung für Gleichung (1) zu liefern.

(a) Betrachten Sie zunächst die drei Matrizen $R_\theta(\mathbf{e}_j)$ für Rotationen mit Winkel θ um die drei Koordinatenachsen $\mathbf{e}_j$, mit $j = 1, 2, 3$. Einfache geometrischen Überlegungen liefern:

$$R_\theta(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_\theta(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_\theta(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie für jede dieser Matrizen mittels einer unendlichen Produktzerlegung der Form $R_\theta(\mathbf{n}) = \lim_{m\to\infty}[R_{\theta/m}(\mathbf{n})]^m$ eine Exponentialdarstellung der Form $R_\theta(\mathbf{e}_i) = \mathrm{e}^{\theta\tau_i}$. Wie lauten die drei 3×3-Matrizen τ_1, τ_2 und τ_3? [Ergebniskontrolle: Die τ_i-Kommutatoren liefern $[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ijk}\tau_k$. Dies ist die sogenannte SO(3)-Algebra, die der Darstellungstheorie von 3-dimensionalen Rotationen zugrunde liegt. Ferner gilt $\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = -2\mathbb{1}$.]

(b) Betrachten Sie nun eine Rotation mit Winkel θ um eine beliebige Achse $\mathbf{n}$. Um hier mittels einer unendlichen Produktzerlegung eine Exponentialdarstellung zu finden, wird eine Näherung für $R_{\theta/m}(\mathbf{n})$ bis zur ersten Ordnung in dem kleinen Winkel θ/m benötigt. Sie hat die Form

$$R_{(\theta/m)}(\mathbf{n}) = R_{(n_1\theta/m)}(\mathbf{e}_1) R_{(n_2\theta/m)}(\mathbf{e}_2) R_{(n_3\theta/m)}(\mathbf{e}_3) + \mathcal{O}\big((\theta/m)^2\big). \tag{2}$$

Intuitive Begründung: Wenn der Rotationswinkel θ/m genügend klein ist, kann die Rotation in drei Teilschritten gemacht werden, jeweils um die Richtung $\mathbf{e}_j$, mit 'anteiligem' Winkel $n_j\theta/m$. Die Vorfaktoren n_j gewährleisten, dass für $\mathbf{n} = \mathbf{e}_j$ (Rotation um Koordinatenachse j) nur *ein* Faktor in (2) verschieden von $\mathbb{1}$ ist, nämlich derjenige, der $R_{(\theta/m)}(\mathbf{e}_j)$ liefert; z.B. für $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$: $R_{(0\theta/m)}(\mathbf{e}_1) R_{(1n_2\theta/m)}(\mathbf{e}_2) R_{(0\theta/m)}(\mathbf{e}_3) = R_{(n_2\theta/m)}(\mathbf{e}_2)$.

Zeigen Sie, dass so eine Produktzerlegung von $R_\theta(\mathbf{n})$ folgende Expontialdarstellung liefert:

$$R_\theta(\mathbf{n}) = \mathrm{e}^{\theta\Omega}, \qquad \Omega = n_i\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\Omega)_{ij} = -\epsilon_{ijk} n_k\,. \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass Ω, der 'Generator' der Rotation, folgende Eigenschaften besitzt:

$$(\Omega^2)_{ij} = n_i n_j - \delta_{ij}, \qquad \Omega^l = -\Omega^{l-2} \quad \text{für } 3 \le l \in \mathbb{N}. \qquad \text{[Cayley-Hamilton-Theorem]} \tag{4}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst Ω^2 und Ω^3. Die Form von $\Omega^{l>3}$ ist dann offensichtlich.

(d) Zeigen Sie, dass die Taylor-Entwicklung von $R_\theta(\mathbf{n}) = \mathrm{e}^{\theta\Omega}$ folgenden Ausdruck liefert,

$$R_\theta(\mathbf{n}) = \mathbb{1} + \Omega \sin\theta + \Omega^2(1 - \cos\theta), \tag{5}$$

und dass dessen Matrixelemente Gleichung (1) entsprechen.

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 21]
