Blatt 10.4: Differentialgleichungen

Ausgabe: Freitag, 18.12.15 Abgabe: Freitag, 08.01.16, 13:00 Zentralübung: 13.01.16
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Beispielaufgaben: {T}: wird im Tutorien besprochen; {S}: Selbststudium.

Beispielaufgabe 1: Separable Differentialgleichung [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E). [T]

Eine autonome Differentialgleichung 1. Ordnung heißt 'autonom', wenn sie die Form $\dot{x} = f(x)$ hat, also die rechte Seite zeitunabhängig ist [nicht-autonom wäre $\dot{x} = f(x,t)$]. Solche Gleichungen können mit Trennung der Variablen gelöst werden.

a) Lösen Sie die autonome Differentialgleichung $\dot{x} = x^2$ für zwei verschiedene Anfangsbedingungen: (i) $x(0) = 1$ und (ii) $x(2) = -1$. [Kontrollergebnis: (i) $x(-2) = \frac{1}{3}$, und (ii) $x(2) = -1$.]

b) Skizzieren Sie die gefundene Lösung qualitativ. Überzeugen Sie sich mittels einer graphischen Analyse, dass die gesuchten Funktion $x(t)$ und deren Ableitung $\dot{x}(t)$ den durch die Differentialgleichung vorgegebenen Zusammenhang erfüllt.

Beispielaufgabe 2: Barometrische Höhenformel [1]
Punkte: [1](E). [S]

Die Standard-Atmosphärenformel für den Luftdruck $p(x)$ als Funktion der Höhe x lautet: $\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} = -\alpha\frac{p(x)}{T(x)}$. Lösen Sie diese Gleichung, mit Anfangswert $p(x_0) = p_0$, für den Fall eines linearen Temperaturverlaufs, $T(x) = T_0 - b(x - x_0)$. *Hinweis:* Separation der Variablen!
[Kontrollergebnis: Für $\alpha, b, T_0, x_0, p_0 = 1$ gilt $p(1) = 1$.]

Beispielaufgabe 3: Differentialgleichung: Substitution und Separation der Variablen [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E). [T]

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $y' = f(y/x)$ für die Funktion $y(x)$ durch die Substitution $y = ux$ in eine Differentialgleichung für die Funktion $u(x)$ übergeht, die mittels Separation der Variablen lösbar ist.

(b) Lösen Sie mit dieser Methode die Gleichung $xy' = 2y+x$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 0$. [Kontrollergebnis: $y(2) = 2$.]

Beispielaufgabe 4: Inhomogene Differentialgleichung [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M). [T]

Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung $\dot{x} + 2x = t$ mit $x(0) = 0$, wie folgt:

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

(b) Finden Sie dann durch Variation der Konstanten eine spezielle (partikuläre) Lösung des inhomogenen Problems. [Kontrollergebnis: $x(-\ln 2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.]

Beispielaufgabe 5: Getriebener überdämpfter harmonischer Oszillator [7]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M); (c)[2](M); (d)[2](M). [T]

Betrachten Sie folgenden getriebenen, überdämpften harmonischen Oszillator, mit $\gamma > \Omega$:

Differentialgleichung: $$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2 x = f_\mathrm{A}(t). \tag{1}$$

Anfangswerte: $$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1\,, \tag{2}$$

Antrieb: $$f_\mathrm{A}(t) = \begin{cases} f_\mathrm{A} & \text{für} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{für} \quad t < 0. \end{cases}$$

Finden Sie für $t > 0$ eine Lösung dieser Gleichung in der Form $x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t)$, wobei $x_\mathrm{h}(t)$ und $x_\mathrm{p}(t)$, die homogene und partikuläre Lösungen der homogenen und inhomogenen DG, die Anfangswerte (2) bzw. $x_\mathrm{p}(0) = \dot{x}_\mathrm{p}(0) = 0$ erfüllen. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Rückführung auf Matrixgleichung: Schreiben Sie die DG (1) in die Matrixform

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \equiv (x, \dot{x})^T \equiv (x^1, x^2)^T\,. \tag{3}$$

Wie lauten die Matrix A, der Antriebsvektor $\mathbf{b}(t)$ und der Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$?

(b) Homogene Lösung: Finden Sie die Lösung $\mathbf{x}_\mathrm{h}(t)$ der homogenen DG $(3)|_{\mathbf{b}(t)=0}$, die den Anfangswert $\mathbf{x}_\mathrm{h}(0) = \mathbf{x}_0$ hat. Nutzen Sie dazu den Ansatz $\mathbf{x}_\mathrm{h}(t) = \sum_j c_\mathrm{h}^j \mathbf{x}_j(t)$, mit $\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{v}_j e^{\lambda_j t}$, wobei λ_j und $\mathbf{v}_j$ $(j = 1, 2)$ die Eigenwerte und Eigenvektoren von A sind. Wie lautet die entsprechende Lösung $x_\mathrm{h}(t) = x^1{}_\mathrm{h}(t)$ der homogenen DG $(1)|_{f_\mathrm{A}(t)=0}$? [Kontrollergebnis: Für $\gamma = \sqrt{2}\ln 2$ und $\Omega = \ln 2$ gilt $x_h(1) = \frac{3}{4}\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}$.]

(c) Partikuläre Lösung: Finden Sie mit dem Ansatz $\mathbf{x}_\mathrm{p}(t) = \sum_j c_\mathrm{p}^j(t)\mathbf{x}_j(t)$ (Variation der Konstanten) die partikuläre Lösung der inhomogenen DG (3), die den Anfangswert $\mathbf{x}_\mathrm{p}(0) = \mathbf{0}$ hat. Wie lautet die entsprechende Lösung $x_\mathrm{p}(t) = x^1{}_\mathrm{p}(t)$ der inhomogenen DG (1)? [Kontrollergebnis: Für $\gamma = 3\ln 2$, $\Omega = \sqrt{5}\ln 2$ und $f_A = 1$ gilt $x_p(1) = \frac{49}{640}\frac{1}{(\ln 2)^2}$.]

(d) Qualitative Diskussion: Die gesuchte Lösung der inhomogenen DG (1) ist gegeben durch $x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t)$. Skizzieren Sie Ihr Ergebnis für diese Funktion qualitativ für den Fall $f_\mathrm{A} < 0$, und erläutern Sie das Verhalten für $t \to 0$ und $t \to \infty$.

Beispielaufgabe 6: Kritisch gedämpfter harmonischer Oszillator [6]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M); (c)[1](E); (d)[2](M,Bonus). [T]

Finden Sie die allgemeine Lösung des gedämpften, homogenen, harmonischen Oszillators,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2 x = 0\,,$$

für den kritisch gedämpften Fall $\gamma = \Omega$, durch Rückführung auf eine Matrix-DG 1. Ordnung und Lösen des entsprechenden Eigenwertproblems.

(a) In diesem Fall sind die beiden Eigenwerte entartet, und entsprechend gibt es nur einen Eigenvektor. Finden Sie die dazugehörige Lösung $x_1(t)$.

(b) Finden Sie durch Variation der Konstanten eine zweite Lösung, indem Sie den Ansatz $x_2(t) = c(t)x_1(t)$ in die DG für x einsetzen, so eine DG für $c(t)$ aufstellen, und diese lösen.

(c) Finden Sie eine Lösung $x(t)$, die die Anfangswerte $x(0) = 1$, $\dot{x}(1) = 1$ erfüllt.
[Kontrollergebnis: Für $\gamma = 2$ gilt $x(\ln 2) = \frac{1}{4}\left(1 - \ln 2(2 + e^2)\right)$.]

(d) Der kritisch gedämpfte harmonische Oszillator kann als Grenzwert $\lambda \to \Omega$ von sowohl dem überdämpften (siehe Beispielaufgabe) als auch dem unterdämpften (siehe Vorlesung) harmonischen Oszillator aufgefasst werden. Machen Sie eine Taylor-Entwicklung der allgemeinen Lösung von sowohl dem überdämpften als auch dem unterdämpften Fall für kleine Werte von ϵt, mit $\epsilon \equiv \sqrt{|\gamma^2 - \Omega^2|}$, und zeigen Sie, dass das Ergebnis in beiden Fällen als Linearkombination der in (a) und (b) gefundenen Lösungen des kritisch gedämpften harmonischen Oszillators geschrieben werden kann.

Beispielaufgabe 7: Integration mittels Partialbruchzerlegung [4]
Punkte: (a)[2](M); (b)[2](M). [T]

Berechnen Sie folgende Integrale mittels einer Partialbruchzerlegung, für $z \in \mathbb{R}$, $z > -1$:

(a) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \, \frac{3x+3}{(x+1)^2(x-2)},$$ (b) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \, \frac{3x}{(x+1)^2(x-2)}.$$

[Kontrollergebnis: (a) $I(3) = -\ln 8$, (b) $I(3) = -\ln 4 + \frac{3}{4}$.]

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 25]

Hausaufgabe 1: Separable Differentialgleichung [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = -x^2/y^3$ für die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$, durch Trennung der Variablen für zwei verschiedene Anfangsbedingungen: (i) $y(0) = 1$, und (ii) $y(0) = -1$. [Kontrollergebnis: (i) $y(-1) = \left(\frac{7}{3}\right)^{1/4}$, (ii) $y(-1) = -\left(\frac{7}{3}\right)^{1/4}$.]

(b) Skizzieren Sie in beiden Fällen die gefundene Lösung qualitativ. Überzeugen Sie sich mittels einer graphischen Analyse, dass die gesuchte Funktion $y(x)$ und deren Ableitung $y'(x)$ den durch die Differentialgleichung vorgegebenen Zusammenhang erfüllt.

Hausaufgabe 2: Bakterienpopulation mit Toxin [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](E); (d)[1](E)

Eine Bakterienpopulation wird der Wirkung eines Toxins ausgesetzt. Die dadurch bewirkte Todesrate ist proportional zu der Anzahl $n(t)$ der zum Zeitpunkt t noch lebenden Bakterien und der Menge $T(t)$ des zu dieser Zeit vorhandenen Toxins, also insgesamt gleich $\tau n(t)T(t)$, wobei τ eine positive Konstante ist. Andererseits erfolgt die natürliche Vermehrung der Bakterien exponentiell, also mit einer Rate $\gamma n(t)$, wobei $\gamma > 0$. Insgesamt ergibt sich für die Anzahl der Bakterien die Differentialgleichung

$$\dot{n} = \gamma n - \tau n T(t), \quad \text{für } t \geq 0.$$

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung, mit $n(0) = n_0$.

(b) Nehmen Sie nun an, dass das Toxin mit einer konstanten Rate $T(t) = at$ zugeführt wird, wobei $a > 0$. Zeigen Sie mittels einer qualitativen Analyse der Differentialgleichung (d.h. ohne diese explizit zu lösen), dass die Bakterienpopulation bis zur Zeit $t = \gamma/(a\tau)$ noch wachsen, danach aber wieder abnehmen wird. Zeigen Sie außerdem, dass für $t \to \infty$ gilt $n(t) \to 0$, also dass praktisch alle Bakterien vernichtet werden.

(c) Finden Sie nun die explizite Lösung $n(t)$ der Differentialgleichung und skizzieren sie $n(t)$ qualitativ als Funktion von t. Vergewissern Sie sich, dass die Skizze den durch die Differentialgleichung vorgegebenen Zusammenhang zwischen $n(t)$, $\dot{n}(t)$ und t erfüllt. [Kontrollergebnis: Für $\tau = 1, a = 1, n_0 = 1$ und $\gamma = \sqrt{\ln 2}$ gilt $n(\sqrt{\ln 2}) = \sqrt{2}$.]

(d) Finden Sie die Zeit t_h, bei der die Population auf die Hälfte ihres Ausgangsbestandes geschrumpft ist.

Hausaufgabe 3: Differentialgleichung: Substitution und Separation der Variablen [5]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E); (d)[1](E); (e)[1](E)

Oft lassen sich Differentialgleichungen durch geschickte Substitutionen lösen. Hier untersuchen wir Differentialgleichungen vom Typ

$$y'(x) = f(ax + by(x) + c)\,. \tag{4}$$

(a) Substituieren Sie $u(x) = ax + by(x) + c$ und finden Sie eine Differentialgleichung für $u(x)$.

(b) Finden Sie einen impliziten Ausdruck für die Lösung $u(x)$ der neuen Differentialgleichung, mittels einem Integral, das die Funktion f enthält. *Hinweis:* Separation der Variablen!

(c) Nutzen Sie die Substitutionsstrategie von (a,b) um die Differentialgleichung $y'(x) = \mathrm{e}^{x+3y(x)+5}$ zu lösen, mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$.
[Kontrollergebnis: $y(\ln(e^{-8} + 3) - 2\ln 2) = \frac{1}{3}\,(2\ln 2 - \ln(e^{-8} + 3) - 5)$.]

(d) Check: Lösen Sie die in (c) angegebene Differentialgleichung direkt (d.h. ohne Subsitution) mittels Separation der Variablen. Stimmt das Ergebnis mit dem von (c) überein?

(e) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(x) = [a(x+y)+c]^2$, mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, mittels der in (a) angegebenen Substitution.
[Kontrollergebnis: Für $x_0 = y_0 = 0$ und $a = c = 1$ gilt $y(0) = 0$.]

Hausaufgabe 4: Inhomogene lineare Differentialgleichung, Variation der Konstanten [3]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E)

Die Funktion $x(t)$ erfülle die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) + tx(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad \text{mit Anfangsbedingung} \quad x(0) = x_0. \tag{5}$$

(a) Finden Sie die Lösung $x_h(t)$ der entsprechenden homogenen Gleichung, mit $x_h(0) = x_0$.

(b) Finden Sie die partikuläre Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Gleichung (5), mit $x_p(0) = 0$, mittels Variation der Konstanten, $x_p(t) = c(t)x_h(t)$. Wie lautet die Gesamtlösung?
[Kontrollergebnis: Für $x_0 = 0$ gilt $x(1) = e^{-1/2}$.]

(c) Für eine Differentialgleichung der Form $\dot{x}(t)+a(t)x(t) = b(t)$ (gewöhnlich, 1. Ordnung, linear, inhomogen) hat die Summe der homogenen und partikulären Lösungen die Form:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_h(t) + c(t)x_h(t) = (1 + c(t))x_h(t) = \tilde{c}(t)x_h(t)\,.$$

Die Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ lässt sich also auch erfüllen, wenn für $x_h(t)$ und $\tilde{c}(t)$ die Anfangsbedingungen $x_h(0) = 1$ und $\tilde{c}(0) = x_0$ gewählt werden. Konstruieren Sie auf diesem Weg eine Lösung der Differentialgleichung (5) von der Form $x(t) = \tilde{c}(t)x_h(t)$. Stimmt sie mit der in (b) erhaltene Lösung überein? (*Lernziel von Teil (c):* Verstehen, dieselbe Anfangsbedingung auf mehr als eine Weise implementiert werden kann.)

Hausaufgabe 5: Inhomogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung [5]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M); (c)[2](M).

Betrachten Sie folgende inhomogene lineare Differentialgleichung (DG) 3. Ordnung:

Differentialgleichung: $$\dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = f_{\mathrm{A}}(t), \tag{6}$$

Anfangswerte: $$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = a\,, \qquad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Antrieb: $$f_{\mathrm{A}}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-bt} & \text{für} \quad t \geq 0\,, \\ 0 & \text{für} \quad t < 0\,, \end{cases} \qquad \text{mit} \quad 0 < b \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Finden Sie für $t > 0$ eine Lösung dieser Gleichung in der Form $x(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_{\mathrm{p}}(t)$, wobei $x_{\mathrm{h}}(t)$ und $x_{\mathrm{p}}(t)$ die homogene bzw. partikuläre Lösungen der homogenen bzw. inhomogenen DG sind, mit Anfangswerten (7) bzw. $x_{\mathrm{p}}(0) = \dot{x}_{\mathrm{p}}(0) = \ddot{x}_{\mathrm{p}}(0) = 0$. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Schreiben Sie die DG (6) in die Matrixform

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \text{mit} \;\; \mathbf{x} \equiv (x, \dot{x}, \ddot{x})^T \equiv (x^1, x^2, x^3)^T, \;\; \mathbf{x}_0 = (x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0))^T\,. \tag{9}$$

(b) Finden Sie die homogene Lösung $\mathbf{x}_{\mathrm{h}}(t)$ von (9)$|_{\mathbf{b}(t)=0}$, mit $\mathbf{x}_{\mathrm{h}}(0) = \mathbf{x}_0$; dann $x_{\mathrm{h}}(t) = x^1_{\;\mathrm{h}}(t)$.
[Kontrollergebnis: $x_h(\ln 2) = 2 + a$.]

(c) Finden Sie die inhomogene Lösung $\mathbf{x}_{\mathrm{p}}(t)$ von (9), mit $\mathbf{x}_{\mathrm{p}}(0) = \mathbf{0}$; dann $x_{\mathrm{p}}(t) = x^1_{\;\mathrm{p}}(t)$.
[Kontrollergebnis: für $a = 2$ und $b = 1$ gilt $x_p(\ln 2) = \frac{7}{48}$.]

Hinweis: Diese Aufgabe ist direkt analog zur Beispielaufgabe zum getriebenen gedämpften harmonischen Oszillator. Die Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3 von A sind ganzzahlig, mit $\lambda_1 = 1$.

Hausaufgabe 6: Differentialgleichungssystem mit nicht diagonalisierbarer Matrix [Bonus]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](A); (d)[0.5](E); (e)[0.5](E). (alle Bonus)

Wir betrachten ein Verfahren zur Bestimmung der Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} \tag{10}$$

im Falle einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, n, n)$ mit $n - 1$ verschiedenen Eigenwerten λ_j und zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$, mit $j = 1, \ldots, n-1$, wobei der Eigenwert λ_{n-1} eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist(man sagt, seine 'algebraische Vielfachheit' ist zwei). Da λ_{n-1} nur einen zugehörigen Eigenvektor hat ist diese Matrix nicht diagonalisierbar. Sie kann aber auf sog. Jordan Normalform gebracht werden:

$$S^{-1}AS = J, \qquad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad S = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n)\,. \tag{11}$$

Mit $A = SJS^{-1}$, sowie $\mathbf{v}_j = S\mathbf{e}_j$ und $J\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j + \delta_{jn}\mathbf{e}_{j-1}$ folgt, dass dies äquivalent ist zu

$$A \cdot \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j-1}\delta_{jn}, \quad \forall j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Für $j = 1, \ldots, n-1$ entspricht dies der üblichen Eigenwertgleichung, und die $\mathbf{v}_j$ den üblichen Eigenvektoren. $\mathbf{v}_n$ ist jedoch kein Eigenvektor, sondern durch folgende Gleichung bestimmt:

$$(A - \mathbb{1}\lambda_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n-1}. \tag{13}$$

Da $(A - \mathbb{1}\lambda_n)$ nicht invertierbar ist, legt diese Gleichung den Vektor $\mathbf{v}_n$ in der Regel nicht eindeutig fest. Verschiedene Wahlen von $\mathbf{v}_n$ führen [via Gl. (11)] zu verschiedenen Transformationsmatrizen S, liefern aber alle dieselbe Form der Jordan-Matrix J.
Die so erhaltenen λ_j und $\mathbf{v}_j$ können genutzt werden, um eine Lösung für die DG (10) mit Hilfe eines Exponentialansatzes mit 'Variation der Konstanten' zu finden:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_j e^{\lambda_j t} c^j(t), \qquad \text{mit} \qquad \lambda_n \equiv= \lambda_{n-1}. \tag{14}$$

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in (10) können nun die Koeffizienten $c^j(t)$ bestimmt werden:

$$0 = \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A\right)\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_j e^{\lambda_j t}\left[\lambda_j c^j(t) + \dot{c}^j(t) - \lambda_j c^j(t)\right] - \mathbf{v}_{n-1} e^{\lambda_n t} c^n(t). \tag{15}$$

Koeffizientenvergleich für $\mathbf{v}_j$ ergibt:

$$\mathbf{v}_{j\neq n-1}: \qquad \dot{c}^j(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{c^j(t) = c^j(0) = \text{konst.}}, \tag{16}$$

$$\mathbf{v}_{n-1}: \qquad \dot{c}^{n-1}(t) = c^n(t) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{c^{n-1}(t) = c^{n-1}(0) + t\, c^n(0)}. \tag{17}$$

Die Werte von $c^j(0)$ werden mittels der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0)$ festgelegt:

$$\mathbf{x}(0) = \sum_j \mathbf{v}_j c^j(0) = S\mathbf{c}(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}(0) = S^{-1}\mathbf{x}(0)\,. \tag{18}$$

Finden Sie nun mit dieser Methode die Lösung der DG

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

(a) Zeigen Sie das charakteristischen Polynom von A eine einfache und eine doppelte Nullstelle hat, λ_1 bzw. $\lambda_2 = \lambda_3$.

(b) Zeigen Sie, dass die Eigenräume zu λ_1 und λ_2 beide nur ein-dimensional sind (was bedeutet, dass A nicht diagonalisierbar ist), und finden Sie entsprechende normierte Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$.

(c) Finden Sie mittels Gl. (13) einen dritten, normierten Vektor $\mathbf{v}_3$, mit der Eigenschaft, dass A mittels $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ in eine Jordan-Normalform gebracht werden kann. Nutzen Sie hierbei die Wahlfreiheit, die für $\mathbf{v}_3$ besteht, um diesen Vektor orthonormal zu $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ zu wählen. [*Anmerkung:* Orthonormalität ist für das aktuelle Beispiel erreichbar (und nützlich, da dann $S^{-1} = S^T$ gilt), im allgemeinen jedoch nicht.]

(d) Bestimmen Sie nun mittels einem Ansatz der Form (14) die Lösung $\mathbf{x}(t)$ der Differentialgleichung (19). [Kontrollergebnis: $\mathbf{x}(\ln 2) = (2, 4, 0)^T + \frac{4}{3}(1 + \ln 2)(2, -1, 2)^T$.]

(e) Überprüfen Sie durch explizites Einsetzen, ob Ihre gefundene Lösung die Differentialgleichung erfüllt.

Hausaufgabe 7: Integration mittels Partialbruchzerlegung [4]
Punkte: (a)[2](M); (b)[2](M).

Berechnen Sie folgende Integrale mittels einer Partialbruchzerlegung, für $z \in \mathbb{R}$, $z < 1$:

(a) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \frac{x+2}{x^3 - 3x^2 - x + 3}\,,$$ (b) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)^2}\,.$$

[Kontrollergebnis: (a) $I(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 3$, (b) $I(\frac{1}{2}) = 1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.]

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 23]
